*Информационные процессы, Том 1, № 2, 2001, стр. 147–149.*




# ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**К.Ю.Горбунов**

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*
*101447, Москва, ГСП-4, Б.Каретный пер., 19, Россия*
*e-mail: gorbunov@iitp.ru*
Поступила в редколлегию 21.06.2001

**Аннотация—**Рассматривается некоторая модель, отражающая зависимость между свойствами действительного многообразия, обределенного специальным выражением ($F$-термом) и свойствами функции $F(x)$ подставляемой в это выражение. Приводятся примеры свойств функции $F(x)$, выразимые в этой модели. Ставятся вопросы о выразимости различных классов функций. Формулируются полученные результаты, частично решающие эти вопросы.

Одной из основных тем в исследованиях по алгебраической геометрии является выяснение вида того или иного алгебраического многообразия, т.е. множества нулей некоторого многочлена, а также вида областей пространства, в которых многочлен положителен или отрицателен. Обобщим понятие многочлена, добавив новую одноместную функцию $F$.

**Определение.** $F$-термом от переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ называется терм, который может содержать эти переменные, функции сложения и умножения, действительные константы, а также одноместную функцию $F$ (например $0.5F(F(x_1)) + F(x_2)F(x_1) + 2x_3x_1$).

Рассматриваемая модель задается конечным множеством $K$ $F$-термов от переменных $x_1, \dots, x_k$. Число $k$ называется размерностью модели. Если мы подставим в каждый $F$-терм из $K$ вместо $F$ одну и ту же функцию от одной переменной, то получим в пространстве $R^k$ набор $M(K,F)$ множеств $M(q,F)$ нулей $F$-термов $q$ из $K$, а также множеств их положительности и отрицательности. Таким образом, естественно рассмотреть вопрос о том, как зависят свойства набора $M(K,F)$ от свойств функции $F$. Конечно, если $F$ не является многочленом, то $M(q,F)$ не является, вообще говоря, алгебраическим многообразием. Представляется интересным брать $F$ “склеенным из кусков” графиков многочленов, тогда $M(q,F)$ будет состоять из “кусков” алгебраических многообразий. Точнее, рассматриваются всюду определенные и непрерывные функции $F(x)$ следующего вида. Пусть есть бесконечная в обе стороны, строго возрастающая и стремящаяся к минус бесконечности влево и к бесконечности вправо последовательность действительных чисел: $\dots a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$. На каждом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ функция $F(x)$ задана некоторым многочленом от $x$ с действительными коэффициентами. Такие функции назовем *кусочно-многочленными*. Кусочно-многочленную функцию $F$ назовём *конечно-многочленной*, если количество чисел $a_i$, слева и справа от которых $F$ задается неравными друг другу многочленами, конечно, а если оно бесконечно, то назовём $F$ *бесконечно-многочленной*. Введем понятие $k$-формулы, смысл которого в том, что такие формулы можно в первом приближении считать описывающими существенные свойства набора $M(K,F)$, где модель $K$ имеет размерность $k$. Назовем $k$-формулой замкнутую формулу первого порядка (в пренексной форме) следующего вида. Все входящие в формулу переменные разбиты на $k$ типов: 1-ый тип, 2-ой, ..., $k$-ый. В кванторной приставке сначала идут все кванторы по переменным какого-либо одного типа, потом все кванторы по переменным другого типа, и так далее в соответствии с некоторой перестановкой множества типов. В бескванторной же части в качестве атомарных формул стоят выражения вида $x > 0$, $x' < x''$, $x' = x''$, где $x'$ и $x''$ — переменные одного типа, а также выражения вида $q = 0$, $q > 0$, где $q$ — $F$-терм из $K$, в котором вместо каждой переменной $x_i$ ($i = 1, \ldots, k$) стоит некоторая переменная $i$-го типа. Пусть $A$ и $B$ — два непересекающихся подмножества множества кусочно-многочленных функций, $K$ — модель размерности $k$, а $\Phi$ — $k$-формула. Скажем, что $A$ отделимо от $B$ в модели $K$ формулой $\Phi$, если при любой функции $F$ из $A$ $\Phi$ становится истинной, а при любой $F$ из $B$ — ложной. Теперь скажем, что множество $A$ формульно отделимо от множества $B$ в модели $K$, если существует $k$-формула, которая отделяет $A$ от $B$. Наконец, скажем, что $A$ формульно отделимо от $B$, если существует модель, в которой $A$ формульно отделимо от $B$.

**Пример 1.** Очевидно, класс всюду возрастающих функций отделим от своего дополнения в модели $\{F(x_1) - F(x_2),\ x_1 - x_2\}$ 2-формулой: $\neg\exists x \exists y((x - y < 0)\&(F(x) - F(y) = 0))$.

**Пример 2.** Класс функций, возрастающих так быстро, что частное $F(x+1)/F(x)$ не стремится к 1 когда $x$ стремится к плюс бесконечности, очевидно, отделим от своего дополнения в модели $\{F(x_1+1) - (1+x_2)F(x_1)\}$ 2-формулой: $\exists y \forall x' \exists x''(y > 0 \& x' < x'' \& F(x''+1) - (1+y)F(x'') > 0)$.

**Пример 3.** Легко проверить, что класс всюду дифференцируемых функций отделим от своего дополнения в модели $\{(x_2 - x_1)^2 - x_3,\ F(x_2) - F(x_1) - x_3(x_2 - x_1)\}$ 3-формулой:

$$\neg\exists x \exists z' \exists z'' \exists z''' \forall z'''' \forall y((z' \neq z'' \& 0 < z'''' < z''' \& (y-x)^2 - z'''' < 0)$$
$$\implies (F(y) - F(x) - z'(y-x))(F(y) - F(x) - z''(y-x)) > 0).$$

Можно показать, что для любого $i$ класс функций, имеющих производную порядка $i$, формульно отделим от своего дополнения. О том, насколько быстро растет с ростом $i$ минимальная размерность отделяющей модели, автору неизвестно. Автору неизвестно также, являются ли формульно отделимыми

А) класс конечно-многочленных функций от класса бесконечно-многочленных функций;

Б) класс многочленов от класса бесконечно-многочленных функций;

В) класс многочленов от своего дополнения в классе конечно-многочленных функций.

Также, представляют интерес и соответствующие варианты этих вопросов, если вместо моделей над действительными числами рассматривать такие же модели над действительными алгебраическими числами (об этом мы ещё скажем в конце). Более вероятными выглядят отрицательные ответы на вопросы А), Б), В). В качестве начального шага разумно упростить эти вопросы, заменив формульную отделимость формульной отделимостью конкретной формулой или достаточно просто описываемым классом формул. Например, для каждой модели $K$ размерности $k$ легко написать формулу $\Phi_{1,K}$, утверждающую, что в пространстве $R^k$ имеется лишь конечное число изолированных корней каждого $F$-терма из $K$ (корень называется изолированным, если в некоторой его окрестности нет других корней). Эту формулу интересно рассмотреть в контексте вопросов А) и Б), поскольку если она в некоторой модели ложна, то легко показать, что функция $F$ не является конечно-многочленной (действительно, при конечно-многочленной $F$ любой $F$-терм является сочленением лишь конечного числа многочленов, а у многочлена число изолированных корней конечно). Правда, автору не удалось доказать, что не существует модели $K$, в которой класс конечно-многочленных функций отделим от класса бесконечно-многочленных функций формулой $\Phi_{1,K}$ (даже если ограничиться моделями размерности 2). Однако, это удалось доказать для еще более простой формулы, которая является как бы одномерным вариантом формулы $\Phi_{1,K}$. А именно, пусть формула $\Phi_{2,K}$ утверждает, что на каждой прямой, параллельной какой-либо координатной оси, существует лишь конечное число изолированных (на этой прямой) корней каждого $F$-терма из $K$. Доказана следующая теорема (доказательство длинное и мы его опускаем).

**Теорема 1**. *Ни в какой модели $K$ класс многочленов не отделим от класса бесконечно-многочленных функций формулой $\Phi_{2,K}$.*

Рассмотрим еще одну формулу — формулу $\Phi_{3,K}$, утверждающую, что на любой прямой, параллельной координатной оси, каждый $F$-терм из $K$ либо имеет только изолированные (на этой прямой) корни, либо равен нулю на всей прямой. Поскольку при кусочно-многочленной $F$ ограничение $F$-терма на отрезок является сочленением конечного числа многочленов, формулу $\Phi_{3,K}$ можно уточнить так:

$$\forall q \in K \forall x_1 \ldots \forall x_k \forall i ((\exists r (q(x_1, \ldots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \ldots, x_k) \neq 0)) \\ \implies (\exists \varepsilon \forall 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon q(x_1, \ldots, x_i \pm \varepsilon_1, \ldots, x_k) \neq 0)).$$

Формулу $\Phi_{3,K}$ интересно рассмотреть в контексте вопросов Б) и В), так как если она ложна, то $F$, очевидно, не многочлен. Доказана следующая теорема (доказательство длинное и опускается).

**Теорема 2.** *Ни в какой модели $K$ класс многочленов не отделим формулой $\Phi_{1,K}$ ни от класса бесконечно-многочленных функций, ни от своего дополнения в классе конечно-многочленных функций.*

В конце скажем несколько слов об истории вопроса. В [1] Ан.А.Мучник поставил вопрос о том, самовыразима ли арифметика сложения и умножения действительных алгебраических чисел. Иначе говоря, существует ли формула с дополнительной многоместной предикатной переменной $P$, которая истинна тогда и только тогда, когда предикат $P$ выразим в теории структуры этих чисел (предикат называется выразимым, если существует эквивалентная ему формула). Пусть предикат $P(x, y)$ двуместный и представим в виде $y = F(x)$. Тогда верно следующее утверждение.

**Утверждение.** *При конечно-многочленной F предикат P выразим, а при бесконечно-многочленной $F$ — невыразим.*

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай, когда степени всех многочленов, из которых состоит функция $F$, ограничены сверху некоторым числом $n$. Рассмотрим формулу $\Phi(x)$ со свободной переменной $x$ и предикатом $P$, утверждающую, что справа и слева от $x$ составляющие функцию $F$ многочлены степени не более $n$ различны. Если бы предикат $P$ был выразим, то его можно было бы устранить из Ф, получив эквивалентную формулу. Но тогда по теореме Тарского об элиминации кванторов множество истинности формулы $\Phi(x)$ не могло бы состоять из бесконечного числа изолированных точек. Пусть теперь степени многочленов, составляющих $F$, неограничены сверху. Если бы предикат $P$ был выразим, то по теореме об элиминации кванторов он был бы выразим и бескванторно, т.е. только с помощью равенств и неравенств нулю полиномов от $x$ и $y$. Это противоречит тому очевидному факту, что при подстановке в любой ненулевой многочлен от $x$ и $y$ вместо $y$ многочлена от $x$ достаточно большой степени получается ненулевой многочлен от $x$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует, что если бы класс конечно-многочленных функций был бы формульно неотделим от класса бесконечно-многочленных функций (при ограничении на алгебраические числа), то ответ на вопрос Ан.А.Мучника был бы отрицательным. Решить этот вопрос не удалось, он остается открытым.

**Благодарность.** Автор выражает глубокую признательность Ан.А.Мучнику, привлёкшему внимание автора к данной теме и Н.К.Верещагину за полезные обсуждения и замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мучник. Ан.А. *Выразимый критерий выразимости в арифметике Пресбургера и его применения*. Препринт. Институт новых технологий, М., 1991.

*Статью представил к публикации член редколлегии В.А. Любецкий*