Информационные процессы, Том 1, № 2, 2001, стр. 126–146.
© 2001 Кривулец, Полесский.

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ

Квазиупаковочные оценки характеристик надежности сетей

В.Г.Кривулец[*], В.П.Полесский[**]

[*] *Московский физико-технический институт, Москва, Россия*
[**] *Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*

Поступила в редколлегию 5.06.2001

Аннотация—Недавно авторы получили новые (разностно-развязочные) оценки надежности монотонной структуры. Эти оценки оставались нераскрытыми в теории надежности, хотя их частный случай был установлен Оксли и Уэлшем в теории перколяции еще в 1979 г. Поэтому в статье дается вначале общий взгляд на теорию оценок характеристик надежности сетей, расширяющий существующие о ней представления и отражающий значимость для этой теории малоизвестных в ней результатов из теории перколяции и теории других случайных дискретных структур. Далее, из разностно-развязочных оценок надежности монотонной структуры извлекаются следствия – некоторые "квазиупаковочные" оценки характеристик надежности сетей, улучшающие известные упаковочные оценки. Если последние используют упаковки путей и блокеров, то квазиупаковочные оценки используют "квазиупаковки" – семейства путей и блокеров, получающиеся добавлением к упаковкам дополнительных членов, вообще говоря, пересекающихся друг с другом и членами упаковки. Ставится проблема построения наилучших разностно-развязочных оценок характеристик надежности сетей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно авторы получили [1] новые разностно-развязочные оценки надежности монотонной структуры. Их частный случай – оценки Оксли–Уэлша надежности однородной (элементы функционируют с одинаковой вероятностью) монотонной структуры был установлен еще в 1979 году [2, 3]. Удивительно, что Оксли и Уэлш не распространили свои оценки на общий случай (заодно существенно улучшив их) и что Мак-Диармид, рецензировавший работу Оксли–Уэлша, также не заметил очевидного обобщения.

Похожая история имела место в теории надежности и с так называемыми развязочными оценками надежности монотонной структуры, предложенными Полесским [4]. В этой работе Полесский предложил преобразование развязывания носителя клаттера и доказал, что оно не уменьшает надежность монотонной структуры. Удивительно, что эти преобразования оставались незамеченными в теории надежности монотонных структур, несмотря на то, что прямой намек на них явно содержался еще в работе Эзари–Прошана (см. [**?**], стр. 195, 1963 г.). Полесский применил преобразование развязывания носителя клаттера для получения оценок надежности монотонной структуры и назвал такие оценки развязочными оценками. К числу развязочных оценок принадлежат и классические оценки Эзари–Прошана. Однако, это самые плохие развязочные оценки и в [4] автор предложил лучшие, например, развязочно-антиблокирующие оценки.

40 лет прошло после работы Харриса [6], открывшей корреляционные неравенства для монотонных событий и почти 40 лет после работы Эзари и Прошана [?], независимо переоткрывших эти неравенства, и извлекших из них свои оценки надежности монотонных структур. Эти оценки стали классическими и и пользуются мировой известностью (например, указаны в энциклопедии [7]). До сих пор считается, что оценки Эзари–Прошана основаны на корреляционных неравенствах Харриса [6]; единственное новое, что появилось со временем, так это то, что сами корреляционные

неравенства стали считать следствием более общего FKG-неравенства [8] (см., например, гл. 6 в [9]).

На самом деле, Полесский показал, что никакие корреляционные неравенства не нужны для доказательства оценок Эзари–Прошана, более того, все развязочные оценки надежности монотонной структуры основаны исключительно на преобразовании развязывания носителя клаттера и том факте, что это преобразование не уменьшает надежность клаттера (вероятность клаттерной перколяции). Полесский заметил, что его преобразования развязывания являются специальными обратными преобразованиями к факторным преобразованиям клаттера, введенных и исследованных Мак-Диармидом в его теореме о клаттерной перколяции ещё в 1980 г. в [10, 11] (переоткрытой независимо Полесским в [4] значительно позже, но доказанной новым, отличным от Мак-Диармида способом).

Позже, в [12] Полесским было предложено преобразование носителей произвольного семейства клаттеров, являющееся обобщением преобразования развязывания носителя одного клаттера, и показано, что такое преобразование не уменьшает надежность соответствующей суммы клаттеров. Из преобразования развязывания носителей двух клаттеров легко следуют как сами корреляционные неравенства (неравенство Харриса [6]), так и характеризация статистической независимости монотонных событий. Эти доказательства отличны от доказательств Харриса [6], Эзари–Прошана [?], доказательства из гл. 6 [9], использующего FKG-неравенство, и, наконец, доказательства Мак-Диармида [10, 11].

Мак-Диармид отметил в [11], что его результаты могли бы быть использованы в теории надежности монотонных структур, однако, (насколько известно авторам) никаких следствий из работ Мак-Диармида для построения оценок надежности монотонных структур до работы Полесского [4] извлечено не было, и тот факт, что из теоремы Мак-Дирмида о клаттерной перколяции следует целый класс новых, “развязочных” оценок надежности монотонных структур, оставался (до работы Полесского) незамеченным как самим Мак-Диармидом, так и остальными. Мак-Диармид использовал свою теорему для

- установления взаимосвязи между некоторыми характеристиками случайных неориентированных графов и случайных ориентированных графов (см. [10]) (в том числе и между некоторыми характеристиками надежности сети);
- доказательства неравенства Харриса (корреляционных неравенств);
- доказательства неравенства ван Ден Берга и Кестена (BK-неравенства)(см. [12, 23]).

Результаты теории перколяции о вероятности клаттерной перколяции, по-видимому, до сих пор остаются малоизвестными специалистам по теории надежности сетей, исследующих эту вероятность под названием надежность монотонной структуры. Специалисты по надежности переоткрыли некоторые следствия неравенства Харриса (например, Калберн доказывает некоторые результаты в [13], являющиеся непосредственными следствиями неравенства Харриса), теоремы Мак-Диармида о клаттерной перколяции (например, отношения между некоторыми характеристиками надежности случайных графов и случайных орграфов (см. [13, 14]). Оценки Оксли–Уэлша надежности однородной монотонной структуры и BK-неравенство, по-видимому, также малоизвестны в теории надежности сетей.

В связи с вышесказанным феноменом структура данной статьи такова. В разделах 2 и 3 изложен общий взгляд на теорию оценок характеристик надежности сетей, расширяющий существующие о ней представления и отражающий значимость для этой теории малоизвестных в ней результатов из теории перколяции и теорий других дискретных случайных структур. Описаны теорема Мак-Диармида о клаттерной перколяции и ряд ее следствий, а также основные оценки надежности монотонной структуры, из которых в разделах 4-7 извлекаются следствия для ряда характеристик надежности сетей – новые “квазиупаковочные” оценки надежности случайного матроида, терминальной надежности, достижимости, вероятности связности и двухполюсной надежности сетей, улучшающие (известные в литературе) упаковочные оценки.

Если последние используют упаковки путей и блокеров, то квазиупаковочные оценки используют “квазиупаковки” – семейства путей и блокеров, получающиеся добавлением к упаковкам дополнительных членов, вообще говоря, пересекающихся друг с другом и членами упаковки.

2. О ТЕОРИИ ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ СЕТЕЙ

2.1. Модель надежности сети

Простейшая модель структуры (топологии) сети есть неориентированный (ориентированный) граф G с множеством вершин VG и множеством ребер (дуг) EG, которые соответствуют узлам и линиям связи. Простейшая модель структурной надежности (надежности структуры) сети – *случайный граф* $(G;p)$ где $p=\{p(e):\ e\in EG\}$, характеризующийся независимым удалением из графа G ребер (дуг) $e\in EG$ с вероятностью $q(e)=1-p(e)$; некоторые характеристики этого случайного графа (см. ниже) рассматриваются как характеристики надежности сети.

Случайный граф $(G;p)$ называют *биномиальной (бернуллиевской) моделью* случайного графа, т.к. его можно описать в терминах $|EG|$ независимых бернуллиевских экспериментов: удалим ребро $e\in E$ с вероятностью $q(e)$ независимо от других ребер или, эквивалентно, начнем с пустого графа на множестве вершин VG и выберем ребро $e\in EG$ независимо с вероятностью $p(e)$. В такой модели мы имеем дело с семейством $\mathfrak{G}$ всех подграфов графа G (на множестве вершин VG) и каждому $H\in\mathfrak{G}$ приписана *мультипликативная вероятностная мер*а

$$\mu(H;p)=\prod_{e\in EH}p(e)\prod_{f\in EG-EH}q(f).$$

Наиболее общая характеристика надежности – это вероятность $R(G,s,K;p)$ того, что из выделенного источника s в указанном множестве выделенных вершин $K\subseteq VG$ существует путь к всем остальным вершинам из $K-\{s\}$. Ее называют *k-терминальной надежностью*, где $k=|K|$. Очевидно, что

$$R(G,s,K;p)=\sum\{\mu(H;p):H\in\mathfrak{G}\},$$

где суммирование идет по тем подграфам H, для которых K лежит в одной компоненте связности подграфа H.

Ее важные частные случаи – *двухтерминальная надежность* $R(G,s,\{s,t\};p)$ (случай $k=2$), т.е. вероятность существования $\{s,t\}$-пути (пути из s в t) и вероятность $R(G,s,VG;p)$ того, что существует путь из s ко всем остальным вершинам сети. В случае орграфа G двухполюсную надежность $R(G,s,\{s,t\};p)$ называют *вероятностью $\{s,t\}$-связности*, а вероятность $R(G,s,VG;p)$ – *достижимостью* и обозначают через $R_{s,t}(G;p)$ и $C(G;p)$, соответственно. В случае неориентированного графа G вероятность $R(G,s,VG;p)$ называют *вероятностью связности* и обозначают через $R(G;p)$.

2.2. Потребность в оценках характеристик надежности сети

Интерес к оценкам характеристик надежности обусловлены следующими причинами:

Проблемой синтеза надежной структуры (топологии) сетей [15], алгоритмы решения которой связаны с вычислением характеристик надежности для огромного количества потенциально возможных структур сети.

Установлено, что точное вычисление каждой характеристики надежности сети – $\sharp P$-полная проблема (понятие $\sharp P$-полноты и ее связь с NP-полнотой см. например, в [16]. $\sharp P$-полные проблемы это проблемы подсчета, связанные с NP-полными задачами, например это проблема подсчета числа

гамильтоновых циклов. Такие задачи по меньшей мере также трудны, как NP-полные задачи, т.к. знание числа решений проблемы распознавания легко решает вопрос существования).

Вычислительная трудность в еще большей степени усиливает потребность в эффективном оценивании характеристик надежности сети. Калберн пишет [13]: "главная мотивация – это развитие инструментариев для процесса синтеза сети. В этом контексте существующие оценки уже позволяют различать между плохими и хорошими топологиями, хотя, они недостаточно хороши в настоящее время, чтобы различать топологии, близкие по надежности."

Проблемами статистической аппроксимации. Эти проблемы тесно связаны с практической проблемой оценивания характеристик надежности сети. Статистические методы аппроксимации характеристик надежности (что мотивируется потребностями практики – см. выше), вообще говоря используют оценки этих характеристик для ограничения выборочного пространства. Например, доказательство эффективной аппроксимации (с заданной точностью) вероятности связности [7] использует некоторые ее полиномиально вычислимые оценки.

Проблемами теории алгоритмической сложности. Как отмечено выше, вычисление каждой характеристики надежности – алгоритмически трудная проблема. Поэтому исследование того, насколько близко можно приблизиться эффективно вычислимыми оценками к точным значениям трудновычислимых характеристик надежности, имеет теоретический интерес.

Проблемами теории случайных графов. В этой теории (см. [18, 19]) характеризуются случаи, когда вероятность того, что случайный граф обладает неким свойством (связностью, гамильтоновостью, наличием совершенного паросочетания, и т.д.) стремится к 1, если число вершин стремится к бесконечности. Кроме того, интересуются асимптотическими распределениями различных случайных величин (числа компонент связности, диаметра, хроматического числа, размера наименьшего цикла, и т.д.)

Некоторые результаты теории случайных графов о связности получаются непосредственно как следствия оценок, без использования вероятностного метода Эрдеша (см. [9]).

2.3. Характеристики надежности и случайные дискретные структуры

Теория оценок характеристик надежности сетей возникла (см. [20]) внутри математической теории надежности. Были получены некоторые основополагающие оценки, постоянно получаются новые оценки, и постепенно оценки характеристик надежности стали занимать центральное место в теории надежности сетей. Калберн посвящает, например, $2/3$ своей книги [13] эффективно вычислимым оценкам характеристик надежности сетей. Самостоятельная глава, посвященная оценкам двухтерминальной надежности имеется в монографии Шира [21]. В монографии [14] также имеется большой раздел, посвященный оценкам характеристик надежности сети.

Что же такое "теория оценок" характеристик надежности сети? Каждая теория имеет самостоятельный объект исследования и методы. Рассмотрим ситуацию в нашем случае. Калберн пишет [13]: "Ключевой момент в понимании надежности сети – извлечение комбинаторики надежности сети... Поверхностное исследование обнаруживает классические теоремы о связности и разрезах, простые факты из перечислительной комбинаторики. Более тщательное исследование открывает, однако, тесные связи с эстремальной теорией множеств, теорией матроидов и т.д." Ему вторит Шир [21]: "...в основе проблем надежности лежат различные комбинаторные структуры... они то и играют основную роль в понимании надежности сети."

Среди таких структур – монотонная (когерентная) структура, слоистый симплициальный комплекс, решетка, матроид, граф, и некоторые другие. "Надежность" соответствующей случайной дискретной структуры обобщает все или некоторые из характеристик надежности сетей.

Приведем примеры таких случайных дискретных структур.

Случайная монотонная структура и ее надежность. Предельно общая и простая случайная дискретная структура, "надежность" которой обобщает все перечисленные характеристики надежности сетей – это монотонная структура, введенная в [22] (см. также [?]). Она задается произвольным *независимым (бернуллиевским) множеством* $(E;p)$ и произвольным клаттером $\mathfrak{A}=\{A_1,\ldots,A_k\}$ на E. $(E;p)$ есть конечное множество E, элементы которого присутствуют с заданными вероятностями $p(e)$; $p:E\longrightarrow[0,1]$. *Клаттер* есть семейство попарно невложимых множеств, т.е.

$$i\neq j,\ i,j=1,\ldots,k\Longrightarrow A_i\not\subseteq A_k.$$

Надежность монотонной структуры $R(\mathfrak{A};p)$ есть вероятность того, что $(E;p)$ содержит некий член клаттера $\mathfrak{A}$. В теории перколяции [23] $R(\mathfrak{A};p)$ называют *вероятностью клаттерной перколяции*; ее можно интерпретировать и как вероятность того, что случайное множество $(E;p)$ обладает монотонным свойством $\mathfrak{A}^{\triangle}=\{X:X\subseteq E,$ и существует $Y\in\mathfrak{A}$ такое, что $Y\subseteq X\}$.

$R(\mathfrak{A};p)$ обобщает все характеристики надежности сети. В случае сети множество компонент E монотонной структуры есть множество ребер (дуг) графа G. В случае k-терминальной надежности мы имеем дело с клаттером деревьев Штейнера графа G (корневых (в корнем s) деревьев графа G, содержащих полюса K и такое, что каждая его концевая вершина (вершина степени 1) принадлежит K). В случае двухтерминальной надежности и вероятности связности мы имеем дело с клаттером $\{s,t\}$-путей и клаттером стягивающих деревьев (остовов) графа G.

Случайный матроид и его надежность. Пусть M – матроид на множестве E (см. [24]), r – ранг матроида M, $\mathfrak{B}$ – клаттер его баз, $(E;p)$ – независимое случайное множество.

Вероятность $R(\mathfrak{B};p)\triangleq R(M;p)$ называют *надежностью случайного матроида* $(M;p)$; это вероятность того, что $(E;p)$ содержит базу матроида M или, что эквивалентно, имеет ранг r.

$R(M;p)$ обобщает вероятность связности $R(G;p)$ случайного графа $(G;p)$ – одну из основных характеристик надежности сети, т.к. для связного графа G $R(G;p)\equiv R(M(G);p)$, где $M(G)$ – матроид циклов (неориентированного) графа G (его базы – множества ребер остовов графа G).

Ясно, что оценки надежности подобных дискретных случайных структур являются одновременно и оценками тех характеристик надежности сети, обобщением которых они являются. Поэтому теория оценок характеристик надежности сети составлена из оценок "надежности" указанных случайных дискретных структур и методы теории оценок характеристик надежности сети составлены из методов теории этих дискретных структур. Именно это имелось ввиду в цитатах Калберна и Шира, приведенных выше.

2.4. Особая роль достижимых оценок

Состояние теории оценок характеристик надежности сетей свидетельствует об особой роли оценок надежности дискретных случайных структур, представляющих собой аналитические функции от их параметров, и точных на некоторых классах таких структур. Иными словами, это достижимые, наилучшие возможные (в терминах используемых параметров) оценки. Любая из этих оценок имеет свои специфические слабости, спекулируя на которых, можно построить "практические" примеры, для которых эта оценка плохая. Однако, ввиду достижимости, такие оценки не могут быть улучшены в терминах используемых в них параметров и их принципиально нельзя "математически" улучшить, не привлекая дополнительной информации. Поэтому более точные к действительному значению рассматриваемых характеристик надежности оценки должны использовать или другой набор параметров этой дискретной структуры, или привлечь другую дискретную структуру (с более богатыми свойствами). Требование эффективной вычислимости резко уменьшает как многообразие привлекаемых

параметров, так и многообразие экстремальных конструкций, на которых достигаются оценки, т.к. надежность таких экстремальных конструкций должна вычисляться эффективно.

Ключевая роль достижимых оценок в классе всевозможных оценок характеристик надежности сети состоит в том, что на основе их огрубления возможно построение новых, вообще говоря, уже не достижимых оценок (т.е. достижимые оценки являются порождающими, материнскими оценками). Выявление все более и более точных достижимых оценок представляет ключевой центральный интерес. Калберн пишет в конце своей монографии [13]: “возможно, наиболее важно развивать лучший комбинаторный инструментарий, который позволит вычислить эффективно все более точные оценки”.

В контексте достижимых оценок становится понятным и подчиненная роль

1. Преобразований, не меняющих значение надежности;
2. Преобразований, увеличивающих (уменьшающих) надежность;
3. Эффективной вычислимости надежности для некоторых классов рассматриваемых дискретных структур (упаковок, последовательно-параллельных структур, прямых сумм матроидов, полных графов, полных двудольных графов, ациклических орграфов и т.д.).

Дело в том, что конструкция структур с экстремальным значением надежности, вообще говоря, связана с преобразованиями 1-2, ибо последовательность таких преобразований может приводить к экстремальной конструкции. Кроме того, возможна “своевременная” остановка процесса преобразований, когда рассматриваемая структура преобразовалась в структуру, надежность которой может быть вычислена эффективно.

3. ДОСТИЖИМЫЕ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ МОНОТОННОЙ СТРУКТУРЫ

3.1. Предварительные замечания

В разделе 3 речь пойдет о достижимых оценках надежности монотонной структуры, т.е. об оценках, представляющих собой аналитические функции от параметров монотонной структуры и точных на некоторых классах монотонных структур (см. раздел 2.4).

В настоящее время известны три типа достижимых оценок надежности монотонной структуры: упаковочные, развязочные и разностно-развязочные. Мы описываем их в разделах 3.2, 3.3 и 3.4, соответственно. В разделах 3.6 и 3.7 представлены теорема Мак-Диармида о клаттерной перколяции [10, 11] и ее следствия о взаимосвязи характеристик надежности случайных неориентированных графов и случайных ориентированных графов.

Введем некоторые обозначения и определения. Мы отсылаем читателя к работам [4,25] за детальными сведениями из теории надежности монотонных структур. Мы будем иметь дело со случайной монотонной структурой общего вида, задаваемой произвольным независимым случайным множеством $(E;p)$ и произвольным клаттером $\mathfrak{A}=\{A_1,\ldots,A_k\}$ на E.

Клаттер $\mathfrak{B}=\{B_1,\ldots,B_l\}$, двойственный к клаттеру $\mathfrak{A}$, есть семейство минимальных (по включению) множеств, пересекающихся с каждым членом клаттера $\mathfrak{A}$. Клаттер $\mathfrak{B}$ также называют *блокером* клаттера $\mathfrak{A}$.

Как было отмечено выше, надежность монотонной структуры (вероятность клаттерной перколяции) $R(\mathfrak{A};p)$ есть вероятность того, что $(E;p)$ содержит некий член клаттера $\mathfrak{A}$. Соотношение двойственности:

$$R(\mathfrak{A};p)+R(\mathfrak{B};q)=1, \tag{1}$$

где $q=1-p$, позволяет из односторонней оценки надежности монотонной структуры, сформулированной в терминах одного клаттера, получить автоматически оценку этой надежности с другой стороны, в терминах двойственного клаттера.

Выпишем некоторые обозначения и соотношения. Положим для функции $h : E \to \mathbb{R}$, подмножества $F \subseteq E$ и семейства $\mathfrak{S} \subseteq 2^E$:

$$h^F = \prod_{e \in F} h(e), \quad h^{\emptyset} = 1, \quad P(\mathfrak{S}; p) = \sum_{F \in \mathfrak{S}} p^F q^{\overline{F}},$$

где $\overline{F} = E - F$, и пусть $\mathfrak{S}^{\triangle} = \{X : X \subseteq E \text{ и существует } Y \in \mathfrak{S} \text{ такое, что } Y \subseteq X\}$. Очевидно, что

$$R(\mathfrak{A}; p) = P(\mathfrak{A}^{\triangle}; p) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^{\triangle}; p\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{l} \overline{B_j^{\triangle}}; q\right), \tag{2}$$

$$P(A_i^{\triangle}; p) = p^{A_i}, \;\; P(\overline{B_j^{\triangle}}; q) = 1 - q^{Bj}.$$

Носителем $\cup\mathfrak{S}$ семейства $\mathfrak{S}$ назовем множество $\cup\{X : \; X \in \mathfrak{S}\}$.

3.2. Упаковочные оценки

Из (1), (2) и монотонности меры следуют тривиальные двусторонние оценки надежности монотонной структуры:

$$R(\mathfrak{A}'; p) \le R(\mathfrak{A}; p) \le 1 - R(\mathfrak{B}'; q),$$

где $\mathfrak{A}' = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_t}\}$, $\mathfrak{B}' = \{B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}\}$ – произвольные подсемейства клаттера $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. Если $\mathfrak{A}'$ – упаковка, т.е. $A_{i_u} \cap A_{i_v} = \emptyset$ при $i_u \ne i_v$, то

$$R(\mathfrak{A}'; p) = 1 - \prod_{j=1}^{t} (1 - p^{A_{i_j}}),$$

и мы имеем *нижнюю упаковочную оценку* надежности монотонной структуры в терминах упаковки членов прямого клаттера $\mathfrak{A}$:

$$1 - \prod_{j=1}^{t} (1 - p^{A_{i_j}}) \le R(\mathfrak{A}; p). \tag{3}$$

Если $\mathfrak{B}'$ – упаковка, то

$$1 - R(\mathfrak{B}'; q) = \prod_{j=1}^{s} (1 - q^{B_{i_j}}),$$

и мы имеем *верхнюю упаковочную оценку* надежности монотонной структуры в терминах упаковки членов двойственного клаттера $\mathfrak{B}$:

$$R(\mathfrak{A}; p) \le \prod_{j=1}^{s} (1 - q^{B_{i_j}}). \tag{4}$$

Упаковочные оценки (3), (4) основаны на монотонности меры, тривиальной стороне статистической независимости монотонных событий (причем в вырожденном случае, когда клаттеры состоят ровно из одного члена), и соотношении двойственности (1). Обе оценки (3), (4) достижимы. Достижимость нижней оценки (3) соответствует случаю, когда клаттер $\mathfrak{A}$ – упаковка. Достижимость верхней оценки (4) соответствует случаю, когда двойственный клаттер $\mathfrak{B}$ – упаковка.

Упаковочные оценки настолько тривиальны, что никто не претендует быть их автором. Однако, такие претенденты существуют для частных случаев монотонных структур. Например, для случая двухполюсной надежности это Ушаков и Литвак, претендующие в [26, 27] даже на “метод Ушакова–Литвака”.

3.3. Развязочные оценки

В [4] доказано, что преобразование развязывания клаттера не уменьшает надежность монотонной структуры (это также следует из [10, 11]). Это порождает, так называемые, развязочные оценки надежности монотонной структуры.

Зафиксируем какой-либо элемент e, принадлежащий хотя бы двум членам клаттера $\mathfrak{A}$; семейство $\mathfrak{A}(e)$ членов клаттера $\mathfrak{A}$, содержащее e, разбиваем (произвольным образом) на два подсемейства $\mathfrak{A}_1(e)$ и $\mathfrak{A}_2(e)$. Удаляем из членов этих подсемейств элемент e и добавляем новые элементы s_i, $i = 1, 2$. Вероятности работоспособного состояния новых элементов положим равными $p(e)$, вероятности работоспособного состояния остальных элементов не меняем. Надежности членов клаттеров при этом сохранятся. Доказано [4] (см. также [10, 11]), что надежность новой монотонной структуры не меньше, чем надежность старой (и указано, когда имеет место равенство и строгое неравенство). Когда почти все развязано, надежность оценочной монотонной структуры можно вычислить аналитически. Предельному случаю (упаковке) соответствуют классические оценки Эзари и Прошана [?]:

$$R(\mathfrak{A}; p) \le 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - p^{A_i}), \tag{5}$$

$$\prod_{i=1}^{l} (1 - q^{B_i}) \le R(\mathfrak{A}; p). \tag{6}$$

В отличие от упаковочных оценок (3), (4) картина достижимости обратная: верхняя оценка (5) достижима, если клаттер $\mathfrak{A}$ – упаковка, нижняя оценка (6) достижима, если блокер $\mathfrak{B}$ – упаковка (иллюстрацию достижимости см. рис.1, 2 в [28].

Отметим, что (6) получается из (5) и (1). Назовем оценки (5), (6) *развязочно-упаковочными оценками*, или *оценками Эзари–Прошана*.

Поскольку оценки Эзари–Прошана достижимые, то для построения более точных развязочных оценок необходимо привлечь дополнительные понятия. Одно из таких понятий – антиблокирующее множество. Пусть $\mathfrak{S}$ – семейство подмножеств множества E. Подмножество F множества E есть *антиблокирующее множество* семейства $\mathfrak{S}$, если F пересекается с каждым членом семейства $\mathfrak{S}$ не более, чем по одному элементу. Пусть F – множество, антиблокирующее клаттер $\mathfrak{A}$, и $F \notin \mathfrak{A}$. Члены клаттера $\mathfrak{A}$ распадаются на два класса: непересекающиеся и пересекающиеся с F. Первые развяжем в упаковку; вторые развяжем по всем элементам, кроме элементов из F. В качестве оценочной монотонной структуры получим, так называемый, “клаттер-цветы”, и соответствующая ему верхняя оценка надежности монотонной структуры будет лучше верхней оценки (5) Эзари–Прошана:

$$R(\mathfrak{A}; p) \le 1 - \prod_{A \in \mathfrak{A}'} (1 - p^A) \prod_{e \in F_1} \left(1 - p(e)(1 - \prod_{B \in \mathfrak{A}''(e)} (1 - p^{B-e})) \right), \tag{7}$$

где $\mathfrak{A}'$ – члены клаттера $\mathfrak{A}$, непересекающиеся с F; $\mathfrak{A}''(e)$ – члены клаттера $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$, пересекающиеся с F по элементу e; $F_1 = F \cap (\cup \mathfrak{A})$. Из (1) и (7) получаем нижнюю оценку:

$$\prod_{B \in \mathfrak{B}'} (1 - q^B) \prod_{e \in C_1} \left(1 - q(e)(1 - \prod_{D \in \mathfrak{B}''(e)} (1 - q^{D-e})) \right) \le R(\mathfrak{A}; p), \tag{8}$$

где C – антиблокирующее блокер $\mathfrak{B}$ множество, и $C \notin \mathfrak{B}$ (обозначения в (8) аналогичны обозначениям в (7)).

Оценка (7) лучше оценки (5). Обе оценки (7), (8) также достижимы (см. рис.1, 2 в [1]). Оценки (7), (8) названы в [1] *развязочно-антиблокирующими оценками*.

Все развязочные оценки основаны на преобразовании развязывания и том факте, что оно не уменьшает надежность монотонной структуры.

Развязочные оценки предложены Полесским в [4]. Их частный случай (классические оценки Эзари–Прошана) предложен Эзари и Прошаном [?] еще в 1963 г.

3.4. Разностно-развязочные оценки

Пусть $|A_1| \le \cdots \le |A_k|$. Если клаттер $\mathfrak{A}$ имеет r несущественных элементов (элементов из $\overline{\cup\mathfrak{A}}$), то *профилем* клаттера $\mathfrak{A}$ называют вектор $(|A_1|, \ldots, |A_k|;\ r)$.

В [2, 3] Оксли и Уэлш получили следующую нижнюю оценку $R(\mathfrak{A}; p)$ для однородного случая ($p(e) = p$ для каждого элемента $e \in E$).

Теорема. *[2, 3]. Если $|A_i| = a_i,\ \ i = 1, \ldots, k$, то*

$$\sum_{i=1}^{k} p^{a_i} q^{i-1} \le R(\mathfrak{A}; p). \tag{9}$$

Левая часть в (9) максимизируется, когда $a_1 \le \cdots \le a_k$. Более того, если $a_1, \ldots, a_k$ упорядочены именно так, то единственный клаттер, который имеет профиль $(a_1, \ldots, a_n; 0)$ и на котором достигается эта нижняя оценка, есть клаттер реберных множеств $\{s, t\}$-путей в графе на рис. 1. Среди всех клаттеров с профилем $(a_1, \ldots, a_n; 0)$ последний клаттер имеет минимальное число блокеров.

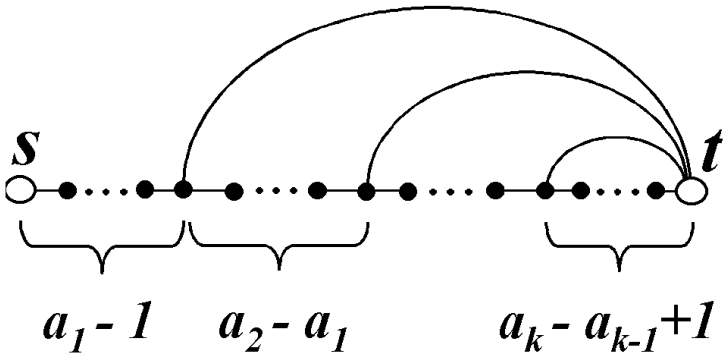

Рис. 1.

Соотношения (1) и (9) автоматически дают верхнюю оценку надежности однородной монотонной структуры:

$$R(\mathfrak{A}; p) \le 1 - \sum_{j=1}^{l} q^{b_j} p^{j-1}, \tag{10}$$

где $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_l\},\ b_i = |B_i|,\ i = 1, \ldots, l$.

Отметим, что оценка (10) не была указана Оксли и Уэлшем в [2, 3]. Согласно теореме Оксли и Уэлша, $\sum_{j=1}^{l} q^{b_j} p^{j-1}$ есть двухполюсная надежность клаттера $\{s, t\}$-путей графа на рис.1 (при $k = l$, $a_i = b_i, i = 1, \ldots, k$), ребра которого присутствуют с вероятностью q. Можно показать, что вся правая часть в (10) есть вероятность $\{s, t\}$-связности графа (см. рис.4 [28]), ребра которого присутствуют уже с вероятностью p.

Внимательное рассмотрение результата Оксли и Уэлша привело авторов данной статьи к выводу, что (9) есть всего лишь частный случай более общего результата – разностно-развязочных оценок надежности монотонной структуры. Они являются обобщением и улучшением оценок Оксли–Уэлша.

Согласно (2),

$$R(\mathfrak{A};p)=P(\bigcup_{i=1}^{k}A_i^{\triangle};p).$$

Существует стандартный метод разложения множества $\bigcup_{i=1}^{k}A_i^{\triangle}$ в сумму непересекающихся множеств. Положим,

$$D_1=A_1^{\triangle},\ D_j=\overline{A_1^{\triangle}}\cdots\overline{A_{j-1}^{\triangle}}A_j^{\triangle},\ \ j=2,\ldots,k.$$

Множества D_j не пересекаются, и

$$R(\mathfrak{A};p)=\sum_{j=1}^{k}P(D_j;p).$$

Из этого соотношения и некоторых простых рассуждений (см. [1]) следует, что

$$p^{A_1}+\sum_{j=2}^{k}p^{A_j}\prod_{i=1}^{j-1}(1-p^{A_i-A_j})\le R(\mathfrak{A};p), \tag{11}$$

$$p^{A_1}+\sum_{j=2}^{k}p^{A_j}\prod_{C\in\mathfrak{A}_j'}(1-p^C)\prod_{e\in F_j'}\left(1-p(e)(1-\prod_{C\in\mathfrak{A}_j''(e)}(1-p^{C-e}))\right)\le R(\mathfrak{A};p), \tag{12}$$

$$R(\mathfrak{A};p)\le 1-q^{B_1}-\sum_{j=2}^{l}q^{B_j}\prod_{i=1}^{j-1}(1-q^{B_i-B_j}), \tag{13}$$

$$R(\mathfrak{A};p)\le 1-q^{B_1}-\sum_{j=2}^{l}q^{B_i}\prod_{D\in\mathfrak{B}_j'}(1-q^D)\prod_{e\in G_j'}\left(1-q(e)(1-\prod_{D\in\mathfrak{B}_j''(e)}(1-q^{D-e}))\right), \tag{14}$$

где F_j – множество, антиблокирующее клаттер $\mathfrak{C}_j$ минимальных множеств семейства $\mathfrak{A}_j=\{A_i-A_j:i=1,\ldots,j-1\}$ на множестве $E-A_j$ ($F_j\notin\mathfrak{C}_j$); $\mathfrak{A}_j'$ – члены семейства $\mathfrak{A}_j$, непересекающиеся с F_j; $A_j''(e)$ – члены семейства $\mathfrak{A}_j''=\mathfrak{A}_j-\mathfrak{A}_j'$, пересекающиеся с F_j по элементу e; $F_j'=F_j\cap(\cup\mathfrak{A}_j)$.

Аналогично, G_j – множество, антиблокирующее семейство $\mathfrak{B}_j=\{B_i-B_j:i=1,\ldots,j-1\}$ на множестве $E-B_j$ ($G_j\notin\mathfrak{B}_j$); $\mathfrak{B}_j'$ – члены семейства $\mathfrak{B}_j$, непересекающиеся с G_j; $\mathfrak{B}_j''(e)$ – члены семейства $\mathfrak{B}_j''=\mathfrak{B}_j-\mathfrak{B}_j'$, пересекающиеся с G_j по элементу e; $G_j'=G_j\cap(\cup\mathfrak{B}_j)$.

Оценка (12) лучше (11), и (14) лучше (13). Оценки (11) и (13) названы в [1] *разностно-развязочно-упаковочными оценками*, а оценки (12), (14) – *разностно-развязочно-антиблоки- рующими оценками*. Оценки (11), (13) являются непосредственным обобщением оценок (9), (10) Оксли–Уэлша на случай общей монотонной структуры.

Для однородной монотонной структуры оценка (11) выглядит следующим образом:

$$p^{a_1}+\sum_{j=2}^{k}p^{a_j}\prod_{i=1}^{j-1}(1-p^{|A_i-A_j|})\le R(\mathfrak{A};p).$$

Очевидно, что $|A_i-A_j|\ge 1,\ i=1,\ldots,j-1$, и поэтому $\prod_{i=1}^{j-1}(1-p^{|A_i-A_j|})\ge q^{j-1}$, причем равенство достигается лишь при $|A_i-A_j|=1,\ i=1,\ldots,j-1$. Поэтому даже для однородного случая (11)

лучше (9). Это естественно, т.к. новая оценка, помимо параметров $|A_i|,\ i=1,\dots,k$, использует дополнительные параметры $|A_i - A_j|,\ i=1,\dots,j-1;\ j=1,\dots,k$. Оценка Оксли–Уэлша (9) не улучшаема в терминах параметров $|A_i|,\ i=1,\dots,k$.

Разностно-развязочно-упаковочные оценки (11) и (13) – функции от параметров $(\mathfrak{A},p)$ и $(\mathfrak{B},q)$ соответственно. Используя эти оценки и соотношение двойственности (1), легко получить верхнюю оценку надежности монотонной структуры, как функцию от параметров $(\mathfrak{A},p)$, и нижнюю, как функцию от параметров $(\mathfrak{B},q)$.

Положим $C_i^j = A_i - A_j,\ i=1,\dots,j-1$, и пусть $\mathfrak{C}_j = \{C_1^j,\dots,C_{u(j)}^j\}$. Тогда

$$R(\mathfrak{A};p) \le p^{A_1} + \sum_{j=2}^{k} p^{A_j}\left(1 - p^{C_1^j} - \sum_{i=2}^{u(j)} p^{C_i^j} \prod_{s=1}^{i-1}(1 - p^{C_s^j - C_i^j})\right). \tag{15}$$

При этом множество $C_s^j - C_i^j$ есть разность второго порядка $(A_s^j - A_j) - (A_i^j - A_j) = A_s^j - A_i^j - A_j$. Аналогично, если $D_i^j = B_i - B_j,\ i=1,\dots,j-1$, и $\mathfrak{D}_j = \{D_1^j,\dots,D_{v(j)}^j\}$ – клаттер минимальных (по включению) множеств семейства $\mathfrak{B}_j = \{D_i^j,\ i=1,\dots,j-1\}$, то

$$1 - q^{B_1} - \sum_{j=2}^{l} q^{B_j}\left(1 - q^{D_1^j} - \sum_{i=1}^{v(j)} q^{B_i^j} \prod_{s=1}^{i-1}(1 - q^{D_s^j - D_i^j})\right) \le R(\mathfrak{A};p), \tag{16}$$

где множество $D_s^j - D_i^j$ – также разность второго порядка. Оценки (15), (16) названы в [1] *разностно-развязочными оценками второго порядка*. В [1] показано, что для клаттера $\mathfrak{A}$ с

$$A_1 - A_2 = A_1 - A_3 = A_1 - A_4 = \dots = A_1 - A_k,$$

$$A_2 - A_3 = A_2 - A_4 = \dots = A_2 - A_k,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_{k-2} - A_{k-1} = A_{k-2} - A_k,$$

левая часть в (11) есть двухполюсная $\{s,t\}$-надежность в некотором графе (см. рис.2 в [1]).

Рассмотрим теперь верхнюю оценку (13). Согласно рассмотренной выше достижимости нижней оценки (11) (в предположении справедливости выписанных выше условий для клаттера $\mathfrak{B}$), $q^{B_1} + \sum_{j=2}^{l} p^{B_j} \prod_{i=1}^{j-1}(1 - q^{B_i - B_j})$ есть двухполюсная надежность клаттера $\{s,t\}$-путей некоторого графа (см. рис.2 [1]), примененного к блокеру $\mathfrak{B}$, ребра которого присутствуют с вероятностью q.

В [1] показано, что вся правая часть в (13) есть вероятность $\{s,t\}$-связности некоторого мультиграфа (см. рис.3 [1]), ребра которого присутствуют с вероятностью p.

Предполагается, что (как и для клаттера $\mathfrak{A}$) для блокера $\mathfrak{B}$ справедливы соотношения:

$$B_1 - B_2 = B_1 - B_3 = B_1 - B_4 = \dots = B_1 - B_l,$$

$$B_2 - B_3 = B_2 - B_4 = \dots = B_2 - B_l,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$B_{l-2} - B_{l-1} = B_{l-2} - B_l.$$

Конструкция рис. 2 в [1] обобщает конструкцию рис. 1 Оксли–Уэлша [2,3]; конструкция рис. 3 в [1] – конструкцию рис. 4 из [28].

3.5. Монотонность упаковочных и разностно-развязочных оценок

Каждая из рассмотренных выше оценок – функция от некоторого клаттера и вероятностей элементов основного множества E (оценки (7), (8) зависят также от антиблокирующего множества; оценки (9), (10) и (11), (13) – от нумерации членов клаттера, оценки (12), (14) – от нумерации и от ряда антиблокирующих множеств).

Развязочно-упаковочные оценки (классические оценки Эзари–Прошана) (5), (6) и развязочно-антиблокирующие оценки (7), (8) требуют для своего вычисления знания клаттеров $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Нижняя оценка такого вида – некоторая функция $f(\mathfrak{B}, q)$, верхняя – некоторая функция $g(\mathfrak{A}, p)$. Пусть $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$. Формально функции $f(\mathfrak{B}', q)$ и $g(\mathfrak{A}', p)$ определены, однако $f(\mathfrak{B}, q) \leq f(\mathfrak{B}', q)$ и $f(\mathfrak{A}', p) \leq f(\mathfrak{A}, p)$, и поэтому $f(\mathfrak{B}', q)$ и $g(\mathfrak{A}', p)$ не являются, вообще говоря, нижней и верхней оценкой для $R(\mathfrak{A}; p)$ (это очевидно для упаковки).

В отличие от развязочных оценок, упаковочные оценки (3), (4), оценки (9), (10) Оксли–Уэлша, разностно-развязочно-упаковочные оценки (11), (13), разностно-развязочно- антиблокирующие оценки (12), (14) имеют следующее “монотонное” свойство.

Обозначим через $L(\mathfrak{A}, p)$ и $U(\mathfrak{B}, q)$ нижнюю и верхнюю оценку из любой пары указанных оценок. В отличие от развязочных оценок, в этом случае функцией от $(\mathfrak{A}; p)$ является уже нижняя оценка $L(\mathfrak{A}, p)$, а функцией от $(\mathfrak{B}; q)$ – верхняя оценка $U(\mathfrak{B}, q)$. Пусть $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$. По-прежнему функции $L(\mathfrak{A}, p)$ и $U(\mathfrak{B}, q)$ определены, но $L(\mathfrak{A}', p) \leq L(\mathfrak{A}, p)$ и $U(\mathfrak{B}, q) \leq U(\mathfrak{B}', q)$. Это означает, что $L(\mathfrak{A}', p)$ и $U(\mathfrak{B}', q)$ также являются нижней и верхней оценкой соответственно для $R(\mathfrak{A}; p)$.

Это свойство монотонности может быть использовано для оценки надежности монотонной структуры в случае, когда клаттеры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют большую мощность, что имеет место, например, для клаттеров характеристик надежности сети (в этих случаях клаттеры задаются графом). Например, количество $\{s, t\}$-путей имеет, вообще говоря, экспоненциальную зависимость от числа вершин сети. В этом случае для оценки двухполюсной надежности можно использовать упаковочные и разностно-развязочные оценки для клаттеров $\{s, t\}$-путей и $\{s, t\}$-разрезов ограниченной длины и ограниченной величины разрезов, соответственно.

3.6. Теорема Мак-Диармида о клаттерной перколяции

Определим факторное преобразование клаттера.

Пусть $\mathfrak{S} \subseteq 2^E$, $\sim$ – эквивалентность на E, и $\beta = \{E_j : j \in J\}$ – соответствующее разбиение множества E. Пусть $\beta(e)$ – класс эквивалентности, содержащий элемент e. Положим для $F \subseteq E$

$$\beta(F) = \bigcup_{e \in F} \beta(e) = \bigcup_{j \in J} \{E_j : E_j \cap F \neq \emptyset\}.$$

Семейство $\{\beta(F) : F \in \mathfrak{S}\}$ называют *фактор семейством* $\mathfrak{S}\backslash\beta$, порожденным семейством $\mathfrak{S}$ и разбиением β.

Если семейство $\mathfrak{S}$ есть клаттер $\mathfrak{A}$, то фактор-клаттер $\widetilde{\mathfrak{A}}$ есть клаттер семейства $\mathfrak{A}\backslash\beta$, т.е. совокупность минимальных (по включению) множеств этого семейства.

Мак-Диармид доказал [10, 11] следующую теорему о связи надежности клаттера и его фактор-клаттера (в предположении определенных условий (C) и (C^*)).

Теорема. *(О клаттерной перколяции [10, 11]). Пусть $\mathfrak{A}$ – клаттер на множестве E, и $\sim$ – эквивалентность на E, удовлетворяющая одному или обоим из следующих условий:*

(C) $e \sim f,\ e \neq f,\ A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow \{e, f\} \not\subseteq \mathfrak{A}$*; иными словами, для любого класса эквивалентности $\beta(e)$ и любого члена A клаттера $\mathfrak{A}$ выполнено $|\beta(e) \cap A| \leq 1$;*

(C^*) *Если $e \sim f,\ A, B \in \mathfrak{A},\ e \in A - B,\ f \in B - A$, то существует член D клаттера $\mathfrak{A}$ такой, что $D \subseteq A \cup B - \{e, f\}$.*

Пусть $(E;p)$ *– независимое случайное множество такое, что* $e \sim f \Longrightarrow p(e) = p(f)$*, и пусть* $\widetilde{p}(\beta(e)) = p(e)$*. Положим*

$$\triangle = R(\mathfrak{A};p) - R(\widetilde{\mathfrak{A}};\widetilde{p}).$$

Тогда, если выполнено условие (C)*, то* $\triangle \geq 0$*. Если выполнено условие* (C^*)*, то* $\triangle \leq 0$*. Таким образом, если выполнены оба условия* $(C),\ (C^*)$*, то* $\triangle = 0$*. Если выполнено ровно одно из условий* $(C),\ (C^*)$ *и* $0 < p(e) < 1$ *для каждого элемента* $e \in E$*, то* $\triangle \neq 0$*.*

3.7. О связи характеристик надежности случайных графов и случайных орграфов

В [10] Мак-Диармид вывел из теоремы о клаттерной перколяции ряд результатов о связи некоторых характеристик случайных графов и случайных орграфов.

Пусть орграф $D(G)$ получается из неориентированного графа G заменой каждого ребра $\{i,j\}$ парой противоположных дуг (i,j) и (j,i).

Мак-Диармид применяет теорему о клаттерной перколяции к множеству E дуг орграфа $D(G)$, эквивалентности $\sim$, считающей дуги (i,j) и (j,i) эквивалентными (при этом класс эквивалентности $\{(i,j),\ (j,i)\}$ идентифицируется с неориентированным ребром $\{i,j\}$), и ряду клаттеров на E; при этом $\widetilde{p}(\{i,j\}) = p(i,j) = p(j,i)$.

Например, клаттер множеств дуг простых $\{s,t\}$-путей удовлетворяет условиям (C) и (C^*) и поэтому

$$R_{s,t}(G;\widetilde{p}) = R_{s,t}(D(G);p). \tag{17}$$

Мак-Диармид ссылается на (17) как на известный результат [29, 30].

Клаттер минимальных множеств ребер сильно связанных подграфов графа $D(G)$ (с множеством вершин VG) удовлетворяет условию (C^*) и не удовлетворяет условию (C) (если G – связен), и поэтому

$$R(G;\widetilde{p}) \geq H(D(G);p),$$

где $H(D(G);p)$ – вероятность того, что случайный орграф $(D(G);p)$ – сильно связен.

Граф называется k-связным (k – целое положительное число), если для любой пары его вершин $\{s,t\}$ существует упаковка k путей из s в t. Тогда (см. [10])

$$U(G;\widetilde{p}) \geq U(D(G);p), \tag{18}$$

где $U(G;\widetilde{p}),\ U(D(G);p)$, – вероятности k-связности случайного графа $(G;\widetilde{p})$ и случайного орграфа $(D(G);p)$ соответственно. Неравенство в (18) строгое, если G – k-связный граф.

Отношения между характеристиками надежности случайных графов и случайных ориентированных графов изучались и в теории надежности сетей (см. [13, 14]).

В частности, в [13] приведено доказательство того, что достижимость $R(D(G),s,K;p)$ в случайном орграфе $D((G);p)$ равна k-терминальной надежности $R(G,K;\widetilde{p})$ (где $k = |K|$) в случайном графе $(G;\widetilde{p})$. Там же отмечено, что в контексте других мер надежности сетей (например, для вероятности k-связности, как указано выше) этот результат может и не выполняться.

Как отмечалось выше, основополагающие результаты из теории перколяции, имеющие непосредственное отношение к теории надежности сетей, остаются в ней малоизвестными. Это относится и к теореме о клаттерной перколяции.

Покажем, что упомянутый выше результат о k-терминальной надежности сетей легко следует из теоремы о клаттерной перколяции Мак-Диармида. Для это достаточно показать, что клаттер деревьев Штейнера в орграфе $D(G)$ удовлетворяет условию (C^*) (выполнение условия (C) очевидно).

Пусть A, B – деревья Штейнера такие, что $(i,j) \in A - B,\ (j,i) \in B - A$. Построим индуктивно дерево Штейнера C такое, что

$$C \subseteq A \cup B - \{(i,j),\ (j,i)\}.$$

Пусть D_v – максимальное корневое (с корнем v) поддерево дерева D с корнем s в $D(G)$. Положим C_1 равным максимальному корневому (с корнем s) поддереву леса $A - (i,j)$. Существует вершина $t \in K - VC_1$ (любая вершина из $VA_j \cap K$). В пути из s в t в дереве B существует подпуть B_{kl} из вершины $k \in VC_1$ в вершину $l \in VA_j$, лежащий вне C_1. Положим $C_2 = C_1 \cup B_{kl} \cup A_l$. Очевидно, что $|VC_2 \cap K| > |VC_1 \cap K|$, так как концевые вершины в A_l принадлежат K. Если $VC_2 \supseteq K$, то $C = C_2$. Если $K - VC_2$ непусто, то поступаем далее аналогично; в конце такого процесса построим искомое дерево Штейнера C.

4. КВАЗИУПАКОВОЧНЫЕ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СЛУЧАЙНОГО МАТРОИДА

Если в упаковочных оценках (3) и (4) используются упаковки путей и блокеров, то квазиупаковочные оценки, предлагаемые в разделах 4–7, есть разностно-развязочные оценки раздела 3.4, примененные к семействам путей и блокеров, которое есть “почти упаковки”, т.е. члены этих семейств пересекаются мало, и к тому же, содержат упаковку.

Выпишем вначале упаковочную нижнюю оценку надежности случайного матроида:

$$1 - \prod_{j=1}^{t}(1 - p^{A_{i_j}}) \le R(M;p), \tag{19}$$

где $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_t}\}$ – некоторая упаковка баз матроида M. В случае однородного случайного матроида максимум нижней оценке (19) доставляет максимальная (по мощности) упаковка баз матроида M (которая находится эффективными алгоритмами) и мы имеем следующую нижнюю оценку:

$$1 - (1 - p^r)^{\mu} \le R(M;p), \tag{20}$$

где r – ранг матроида M, μ – максимальное число баз матроида M, пакуемых в E.

Приведем пример эффективной квазиупаковочной оценки, более точной чем (20).

Пусть ν – наименьшее число независимых множеств матроида M, покрывающих E; очевидно, что $\mu \le \nu$.

В [31,32] предложен эффективный способ построения минимального покрытия $\alpha = \{A_1, \ldots, A_\nu\}$ множества E независимыми множествами матроида M. Этот способ строит специальное минимальное разбиение α, называемого *базовым рядом матроида* M. Оно характеризуется тем, что для каждого $k = 1, \ldots, \nu$ множество $\cup_{i=1}^{k} A_i$ есть база матроида-суммы M^k. При этом первые μ множеств $A_1, \ldots, A_\mu$ в базовом ряду есть максимальная упаковка баз матроида M.

Легко видеть, что для любой базы B и любого независимого множества X матроида M существует подмножество $B(X)$ базы B такое, что $B(X) + X$ – также база матроида M (если X – база, $B(X)$ пусто).

Пусть $\alpha = \{A_1, \ldots, A_\nu\}$ – базовый ряд матроида M. Рассмотрим следующее семейство α' баз матроида M:

$$\alpha' = \{A'_1, \ldots, A'_\nu\},$$

где $A'_1 = A_1,\ A'_j = A_j + A_1(A_j),\ j = 2, \ldots, \nu$. Очевидно, что $A'_j = A_j,\ j = 2, \ldots, \mu$.

Если $\nu > \mu$, то квазиупаковочная разностно-развязочная упаковочная оценка, отвечающая оценке (11), будет лучше оценки (20).

Пусть, например, $\nu > \mu$ и базовый ряд α состоит из двух блоков, т.е. $|A_1| = \cdots = |A_\mu| = r$, $|A_{\mu+1}| = \cdots = |A_\nu| = s$, $s < r$. Мы имеем тогда для соответствующего однородного случайного матроида следующую квазиупаковочную разностно-развязочную нижнюю оценку:

$$\begin{aligned} &p^r(1 + (1-p^r) + \cdots + (1-p^r)^{\mu-1}) \\ &+ p^r(1-p^r)^{\mu-1}(1-p^s)(1 + (1-p^s) + \cdots + (1-p^s)^{\nu-\mu-1}) \\ &= 1 - (1-p^r)^\mu + p^{r-s}(1-p^s)(1-p^r)^{\mu-1}(1-(1-p^s)^{\nu-\mu}) \le R(M;p). \end{aligned} \tag{21}$$

5. КВАЗИУПАКОВОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ТЕРМИНАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТИ

Калберн [33] показал, что построение максимальной упаковки деревьев Штейнера есть NP-трудная задача и нет эвристики для нахождения "хороших" упаковок деревьев Штейнера, обеспечивающих высокое значение упаковочной оценки.

Очевидно, что каждое стягивающее дерево A графа G порождает дерево Штейнера $A(K)$.

Тогда семейство $\alpha' = \{A'_1, \ldots, A'_\nu\}$ стягивающих деревьев (являющихся базами матроида циклов M графа G) порождает семейство $\alpha'(K) = \{A'_1(K), \ldots, A'_\nu\ (K)\}$ деревьев Штейнера; при этом первые μ деревьев Штейнера образуют упаковку.

Семейству $\alpha'(K)$ соответствует квазиупаковочная разностно-развязочная нижняя оценка k-терминальной надежности; она вычисляется эффективно.

6. КВАЗИУПАКОВОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДОСТИЖИМОСТИ И ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ

Из раздела 3.7 следует, что вероятность связности $R(G;p)$ случайного графа $(G;p)$ (мы пишем p вместо $\widetilde{p}$) равна достижимости $C(D(G);p)$ случайного орграфа $(D(G);p)$.

Рассмотрим сначала упаковочную оценку для достижимости. Напомним некоторые понятия. Дерево Штейнера с множеством вершин VH орграфа H, т.е. дерево с корнем s и с множеством вершин VH называют *ветвлением* (s-*ветвлением*) орграфа H. В [34] доказано, что в орграфе H существует упаковка m ветвлений тогда и только тогда, когда любой (ориентированный) s-разрез имеет не менее чем m дуг (s-орразрез есть множество дуг вида (i,j), $i \in X$, $j \in VH - X$ для некоторого $X \subset VH$, $s \in X$). Максимальная упаковка ветвлений строится алгоритмом Эдмондса (см. также [35], так как к этой задаче применима теория пересечения матроидов, и [36, 37, 38]).

Упаковке ветвлений соответствует упаковочная нижняя оценка достижимости (а значит, и вероятности связности). Упомянутая выше теорема Эдмондса об упаковке ветвлений и тот факт (см. раздел 3.7) что достижимость равна вероятности связности, позволили Раманатану и Калберну [39] получить следующую упаковочную нижнюю оценку вероятности связности однородного случайного графа $(G;p)$:

$$1 - (1-p^r)^c \le R(G;p), \tag{22}$$

где c – реберная связность графа (наименьшее число ребер, удаление которых делает граф G несвязным), r – ранг матроида M циклов графа G, т.е. число вершин графа G минус число компонент связности (для связного графа G $r = |VG| - 1$).

Оценка (22) следует из того, что вероятность связности $R(G;p)$ случайного графа $(G;p)$ равна достижимости $C(D(G;p))$ случайного орграфа $(D(G;p))$, из упаковочной нижней оценки для ветвлений, теоремы Эдмондса об упаковке ветвлений (утверждающей, что величина максимальной упаковки ветвлений равна величине минимального s-орразреза), и того факта, что величина минимального s-орразреза орграфа $D(G)$ равна величине минимального разреза графа G.

Раманатан и Калберн назвали оценку (22) модифицированной упаковочной оценкой для следующей упаковочной оценки вероятности связности однородного случайного графа [40]:

$$1-(1-p^r)^{\lfloor c/2\rfloor} \le R(G;p), \tag{23}$$

полученную из упаковочной оценки (20) (в которой $r = |VG| - 1$, μ – величина максимальной упаковки стягивающих деревьев графа G) и неравенства [41] $\lfloor c/2\rfloor < \mu$.

К вероятности связности применимы квазиупаковочные разностно-развязочные оценки надежности случайного матроида, т.к. для связного графа G $R(G;p) \equiv R(M;p)$, где M – матроид циклов графа G.

Покажем, что оценка Раманатана и Калберна (22), вообще говоря, недостижима и ее легко улучшить посредством квазиупаковочных оценок.

Положим $|EG| = m$ (пусть граф G, вообще говоря, имеет кратные ребра). Если $m = r$, то $c = 1$ и оценка (22) – точная. Пусть $m > r$ и $A_1, \ldots, A_c$ – упаковка s-ветвлений в орграфе $D(G)$.

Рассмотрим дугу $e = (i,j)$ такую, что $(j,i) \notin A_1$ и не принадлежащую s-ветвлению A_1. Ввиду $m > r$ дуга e существует. Возможны два случая:

1. Дуга e кратна некоторой дуге $f \in A_1$ (т.е. дуга f также имеет вид (i,j));
2. Дуга e не кратна никакой дуге в A_1.

В первом случае $A_{c+1} = A_1 - f + e$ – s-ветвление орграфа $D(G)$. В случае 2 пусть g – дуга в A_1 с концевой вершиной j. Очевидно, что $A_1 - g + e$ – также s-ветвление орграфа $D(G)$; обозначим его также через A_{c+1}.

Выпишем квазиупаковочную нижнюю оценку достижимости (а значит, и вероятности связности) для семейства ветвлений $\{A_1, \ldots, A_c, A_{c+1}\}$. Имеем оценки

$$1-(1-p^r)^c + p^r(1-p)(1-p^{r-1})(1-p^r)^{c-2} \le R(G;p), \tag{24}$$

$$1-(1-p^r)^c + p^r(1-p)(1-p^r)^{c-1} \le R(G;p), \tag{25}$$

которые соответствуют случаям $e \in \bigcup_{i=1}^{2} A_i$ и $e \notin \bigcup_{i=1}^{2} A_i$, соответственно.

Нетрудно видеть, что если применить указанный прием для всех дуг орграфа $D(G)$, то можно существенным образом улучшить оценку (22).

7. КВАЗИУПАКОВОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДВУХПОЛЮСНОЙ НАДЕЖНОСТИ

Брехт и Калберн [42] исследовали упаковочные нижние оценки двухполюсной надежности и заметили, что лучшая упаковочная нижняя оценка (для однородного случая) не обязательно соответствует максимальной упаковке. Их пример (рис. 2) демонстрирует, что вообще не существует (независимо от p) наилучшей упаковочной нижней оценки.

Действительно, двум лучшим упаковкам $\{s,t\}$-путей отвечают оценки p^3 и $2p^8 - p^{16}$ соответственно. Квазиупаковочная нижняя оценка (отвечающая некой нумерации четырех возможных $\{s,t\}$-путей) (11) лучше обеих этих упаковочных оценок:

$$\begin{aligned} &p^3 + p^8(1-p^2) + p^8(1-p)(1-p^8) + p^{13}(1-p)(1-p^2)(1-p^3) \\ &= p^3 + 2p^8 - p^9 - p^{10} + p^{13} - p^{14} - p^{15} - p^{16} + 2p^{17} + p^{18} - p^{19}. \end{aligned}$$

При этом точное значение $\{s,t\}$-надежности в этом примере равно $p^3 + 2p^8 - p^9 - p^{10} + p^{13} - p^{14} - p^{15} + p^{16}$.

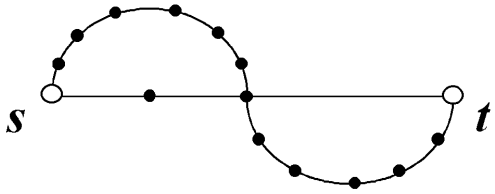

Рис. 2

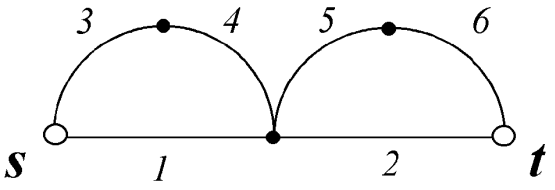

Рис. 3

Брехт и Калберн предлагают строить различные упаковки n путей, $n = 1, \ldots, c$ (c – величина минимального $\{s,t\}$-разреза) и брать максимум упаковочных нижних оценок по n. При этом при одинаковом n существуют разные упаковочные оценки, соответствующие разным упаковкам и поэтому эта упаковочная нижняя оценка зависит от алгоритма построения упаковки. Они рассмотрели следующий пример представленный на рис. 3.

При $n = 2$ имеем две нижние упаковочные оценки $2p^3 - p^6$ и $p^2 + p^4 - p^6$ для упаковок $\{\{2,3,4\},\{1,5,6\}\}$ и $\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$, соответственно. Выпишем теперь квазиупаковочную нижнюю оценку (11) для клаттера $\{A_1 = \{1,2\},\ A_2 = \{1,5,6\},\ A_3 = \{2,3,4\},\ A_4 = \{3,4,5,6\}\}$ $\{s,t\}$-путей:

$$p^2 + p^3(1-p) + p^3(1-p)(1-p^3) + p^4(1-p^2)(1-p)^2$$
$$= p^2 + 2p^3 - p^4 - p^4 - 2p^5 - p^6 + 3p^7 - p^8.$$

Эта квазиупаковочная нижняя оценка лучше обеих указанных выше упаковочных оценок. Точное значение $\{s,t\}$-надежности в этом примере равно $p^2 + 2p^3 - p^4 - 2p^5 + p^6$.

Таким образом, даже в случае однородного случайного графа неясно как найти “наилучшую” упаковочную нижнюю оценку двухполюсной надежности. Отметим, что поиск упаковки $\{s,t\}$-путей, доставляющих максимум нижней упаковочной оценке $\{s,t\}$-надежности есть NP-трудная задача [43].

Брехт и Калберн предложили следующую эвристику нахождения ”хорошей” нижней упаковочной оценки $\{s,t\}$-надежности: строим $\{s,t\}$-поток заданной величины n и минимальной стоимости (в однородном случае стоимость всех ребер 1, в неоднородном – стоимость дуги e равна $-\ln p(e)$). В результате в однородном случае будет построена упаковка n $\{s,t\}$-путей, носитель которой имеет наименьшее число ребер; в неоднородном случае будет построена упаковка n $\{s,t\}$-путей, для которой максимизировано произведение вероятностей ребер носителя упаковки. Этот прием применяется для $n = 1, \ldots, c$ и берется максимум по соответствующим упаковочным нижним оценкам. Вычислительные результаты (см. [42]) указывают, что эта эвристика дает нижние оценки, конкурентноспособные с наилучшими из существующих нижних оценок (в терминах $\{s,t\}$-путей).

Эвристические подходы к нахождению “хороших” упаковок $\{s,t\}$-разрезов для построения соответствующей упаковочной верхней оценки $\{s,t\}$-надежности исследовались Калберном [33].

Известно [44], что использование полиномиального алгоритма [45] нахождения максимальной упаковки $\{s,t\}$-разрезов минимальной стоимости улучшает упаковочные оценки (найденные методом пометок, который строит максимальную упаковку $\{s,t\}$-разрезов непосредственно), но при этом он часто не конкурентен даже с простым гриди-алгоритмом, который выбирает наименее надежный $\{s,t\}$-разрез, не пересекающийся с ранее выбранными $\{s,t\}$-разрезами. Поэтому в [46] предложена верхняя оценка $\{s,t\}$-надежности, когда строится некоторое семейство $B_1, \ldots, B_r$ $\{s,t\}$-разрезов, которые, хотя и не непересекаются, оказываются “хорошо структурированными” (образуют цепь), чтобы эффективно вычислить (в терминах мощности семейства) верхнюю оценку s,t-надежности.

Этот результат примыкает к тому направлению в теории надежности сетей, которое было инициировано работой Болла и Прована [47], предложившими псевдополиномиальный (полиномиально ограниченный числом $\{s,t\}$-разрезов) рекурсивный алгоритм вычисления $\{s,t\}$-надежности. Этот

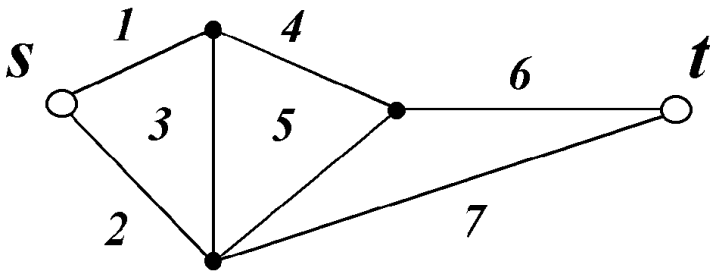

Рис. 4.

алгоритм существенно использует тот факт, что семейство $\{s,t\}$-разрезов образует решетку. Позже Прован и Болл обобщили свой результат на псевдополиномиальный алгоритм вычисления терминальной надежности [48]. Наконец, оба эти результата были обобщены [49] на произвольные монотонные структуры, образующих полурешетку с некоторыми дополнительными свойствами (которыми обладает, например, решетка $\{s,t\}$-разрезов и совокупность $\{s,t\}$-путей планарного графа, в котором s и t лежат на границе внешней области). Шир предложил псевдополиномиальный рекурсивный алгоритм вычисления надежности такой монотонной структуры, т.е. сложность этого алгоритма полиномиальным образом зависит от мощности клаттера монотонной структуры.

Рассмотрим один пример из монографии Шира (см. рис. 6, 4 в [21]) и вычислим для него нижнюю разностно-развязочную упаковочную оценку (11). Этот пример представлен на рис. 4, на рис. 5 представлена его решетка $\{s,t\}$-путей (с необходимой нумерацией). Решеточный порядок $\geq$ следующий:

$$A_i \geq A_j \Longleftrightarrow A_i \text{ лежит выше } A_j.$$

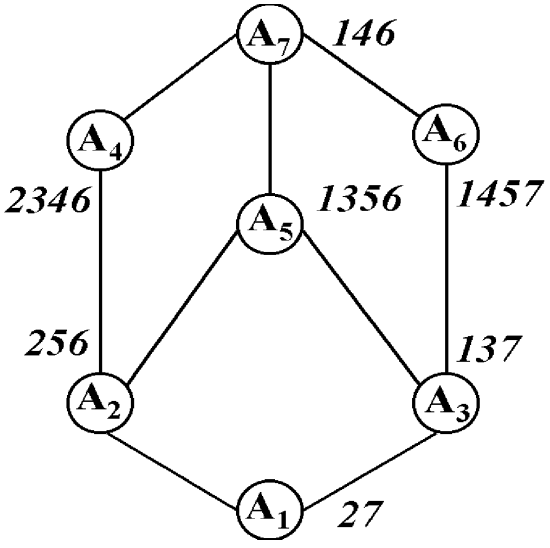

Рис. 5.

Эта разностно-развязочная упаковочная оценка равна

$$\begin{aligned}&p^2+p^3(1-p)+p^3(1-p)(1-p^3)+p^4(1-p^2)(1-p)^2\\&+p^4(1-p^2)^2(1-p)^2+p^4(1-p)^2(1-p^2)^3+p^3(1-p^2)^6\\&=p^2+3p^3+p^4-12p^5-4p^6+28p^7-2p^8-28p^9+3p^{10}+17p^{11}-p^{12}-p^{13}+p^{15}.\end{aligned}$$

Точное значение $\{s,t\}$-надежности для этого примера равно $p^2+3p^3+p^4-12p^5+11p^6-3p^7$.

Разностно-развязочные оценки (см. раздел 3.4) вносят новые идеи в эвристику оценок $\{s,t\}$-надежности.

Предложим эвристику для однородного случая. Как и в эвристике Брехта и Калберна построим максимальную упаковку $\{s,t\}$-путей с минимальным (по мощности) носителем. Каждая пара $\{A_i,A_j\},\ i\neq j$ $\{s,t\}$-путей порождает некое дополнительное множество путей. Если существуют общие вершины $v_1,\ldots,v_m$ путей A_i и A_j, кроме s и t (см. рис. 6), то мы имеем 2^m $\{s,t\}$-путей, образующих подрешетку в клаттере $\{s,t\}$-путей, в которой A_i и A_j есть максимальный и минимальный $\{s,t\}$-путь, соответственно.

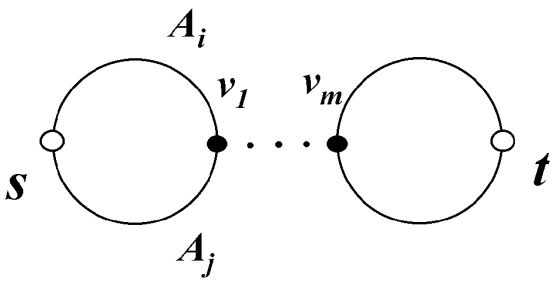

Рис. 6

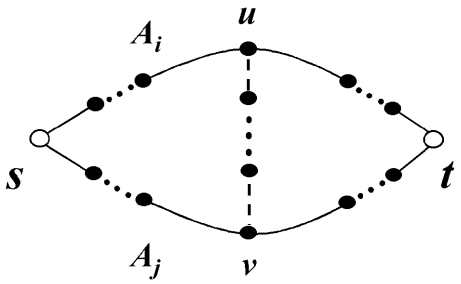

Рис. 7

Если A_i и A_j не имеют общих вершин (кроме s и t), то построим максимальный поток между непересекающимися множествами вершин $VA_i-\{s,t\}$ и $VA_j-\{s,t\}$ с минимальным носителем, и тогда каждая цепь $A(u,v)$ носителя такого потока порождает два дополнительных (кроме A_i и A_j) $\{s,t\}$- пути: $A_i(s,u)+A(u,v)+A_j(v,t)$ и $A_j(s,v)+A(v,u)+A_i(u,t)$ (см. рис. 7).

В этих обозначениях символ $A_k(s,u)$ обозначает цепь в $\{s,t\}$-пути A_k между вершинами s и $t,\ k=i,j$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в разделах 4–7 квазиупаковочные оценки характеристик надежности сетей есть лишь первые, очевидные следствия разностно-развязочных оценок надежности монотонной структуры.

Проблема построения наилучших квазиупаковочных оценок характеристик надежности сети инициирована данной статьей и остается открытой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривулец В.Г., Полесский В.П. Об оценках надежности монотонной структуры. *Проблемы передачи информации*, 2001, том 37, № 4.

2. Oxley J.G., Welsh D.J.A. On Some Percolation Results of J.M. Hammersley. *J. Appl. Prob.*, 1979, no. 16, pp. 527–540.

3. Oxley J.G., Welsh D.J.A. The Tutte Polynomial and Percolation. *Graph Theory and Related Topics*, 1979, pp. 329–339.

4. Полесский В.П. Развязывания клаттеров, корреляционные неравенства и границы комбинаторной надежности. *Проблемы передачи информации*, 1997, том 34, № 4, стр. 81–99.

5. Esary J., Proshan F. Coherent Structures of Non-Identical Components. *Technometrics*, 1963, vol. 5, no. 2, pp. 191–209.

6. Harris T.E. A Lower Bound for the Critical Probability in a Certain Percolation Process. *Proc. Cambrigde Philosophical Society*, 1960, no. 56, pp. 13–20.

7. *Вероятность и математическая статистика. Большая Русская Энциклопедия*. Москва, 1999, стр. 345–346.

8. Fortuin C.M., Kasteleyn P.W., Ginibre J. Correlation Inequalities on Some Partially Ordered Sets. *Comm. Math. Phys.*, 1971, vol. 22, pp. 89–103.

9. Alon N., Spencer J.H., Erdos P. *The Probabilistic Method*. New York: Wiley, 1992.

10. McDiarmid C. Clutter Percolation and Random Graphs. *Mathematical Programming Study*, 1980, vol. 13, pp. 17–25.

11. McDiarmid C. General Percolation and Random Graphs. *Adv. Appl. Prob*, 1981, vol. 13, pp. 40–60.

12. Полесский В.П. Развязывание носителей семейства клаттеров и его роль в теории надежности. *Проблемы передачи информации*, 2001, том 38, № 3.

13. Colbourn C.J. *The Combinatorics of Network Reliability*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987.

14. Ball M.O., Coulborn C.J., Provan J.S. Network Reliability. In: *Handbooks in OR and MS*. New York: Elsevier, 1995, Chapter 11.

15. Colbourn C.J., Nel L.D. Using and Abusing for Network Reliability. *Proc. IEEE Telecommunications Conference Globecom90*, IEEE Press, 1990, pp. 663–667.

16. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San-Francisco: W.H.Freeman, 1979.

17. Karger D.R. A Randomized Fully Polynomial Time Approximation Scheme for the All Terminal Network Reliability Problem. *Proceedings of the 37th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, 1996, pp. 1–13.

18. Koronski M. A Review on Random Graphs. *Journal of Graph Theory*, 1982, vol. 6, pp. 349–389.

19. Bollobas B. *Random Graphs*. London: Academic Press, 1985.

20. Barlow R.E. Mathematical Theory of Reliability: A Historical Perspective. *IEEE Transaction on Reliability*, 1984, vol. 33, no. 1, pp. 16–20.

21. Shier D.R. *Network Reliabilty and Algebraic Structures*. Oxford: Claredon Press, 1991.

22. Birnbaum Z.W., Esary J.D., Saunders S.C. Multicomponent Systems and Structures and Their Reliability. *Technometrics*, 1961, no. 1, pp. 55–77.

23. Grimmet G.R. *Percolation Theory*. Second edition. A Series of Comprehensive Studies in Math. Berlin: Springer, 1999.

24. Welsh D.J. *Matroid Theory*. London: Academic Press, 1976.

25. Barlow R.E., Proschan F. *Mathematical Theory of Reliability*. New York: Wiley, 1965.

26. Барлоу Р., Прошан Ф. *Статистическая теория надежности и испытания на безотказность*. М.: Наука, 1984. (Barlow R.E., Proschan F. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1974.)

27. Райншке К., Ушаков И.А. *Оценка надёжности систем с использованием графов*. М.: Радио и связь, 1988.

28. Полесский В.П. Достижимые границы вероятности полного ранга случайного подматроида. *Проблемы передачи информации*, 1995, том 31, № 4, стр. 81–99.

29. Frish H.I., Hammersly J.M. Percolation Processes and Related Topics. *J. SIAM*, 1963, no. 11, pp. 894–918.

30. Satyanarayama A., Prabhaker A. New Topological Formula and Rapid Algorithm for Reliability Analysis of Comlex Networks. *IEEE Trans. on Reliability*, 1978, vol. 27, pp. 82–100.

31. Кельманс А.К., Ломоносов М.В., Полесский В.П. О минимальных покрытиях в матроиде. *Проблемы передачи информации*, 1976, том 29, № 4, стр. 58–66.

32. Кельманс А.К., Полесский В.П. Экстремальные множества и задачи покрытия и упаковки в матроидах. В кн.: *Исследования по прикладной теории графов*, Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1986, стр. 140–188.

33. Colbourn C.J. Edge-Packings of Graphs and Network Reliability. *Discrete Mathematics*, 1988, vol. 72, pp. 49–61.

34. Edmonds J. Edge-Disjoint Branching. In: *Combinatorial Algorithms*. Algorithmics Press, 1972, pp. 91–96.

35. Edmonds J. Submodular Functions, Matroids and Certain Polyhedral. In: *Combinatorial Stuctures and Their Applications*. New York: Gordon and Breach, 1970, pp. 69–81.

36. Tarjan R.E. A Good Algorithm for Edge-Disjoint Branching. *Information Processing Letters*, 1974, vol. 3, pp. 51-53.

37. Moran S. *An Improvement of an Algorithm for Construction of Edge-Disjoint Branching*. Technical Report, Haita, 1984.

38. Shiloach Y. Edge-Disjoint Branching in Directed Multigraphs. *Information Processing Letters*, 1979, no. 8.

39. Ramanathan A., Colbourn C.J. Bounds of All-Terminal Reliability via Arc-Packing. *Ars Combinatorica*, 1987, vol. 23A, pp. 91–94.

40. Полесский В.П. Оценки вероятности связности случайного графа. *Проблемы передачи информации*, 1990, том 26, № 1, стр. 90–98.

41. Полесский В.П. Об одном способе построения структурно-надежной сети. В кн.: *Дискретные автоматы и сети связи*. М.: Наука, 1970, стр. 13–19.

42. Brecht T.K., Colbourn C.J. Lower Bounds for Two-Terminal Network Reliability. *Discr. Appl. Math*, 1988, vol. 21, pp. 185–198.

43. Raman V. Finding the Best Edge-Packing for Two-Terminal Reliability is NP-hard. *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 1991, vol. 9, pp. 91–96.

44. Nel L.D., Strayer N.J. Two-Terminal Reliability Bounds Based on Edge-Packing by Cutsets. *J. Comb. Math. Comb. Comut.*, 1993, vol. 13, pp. 3–22.

45. Wagner D.K. Disjoint (s,t)-cuts in a Network. *Networks*, 1990, no. 20, pp. 361–372.

46. Shanthikumar J.G.Bounding Network Reliability using Consecutive Minimal Cutsets. *IEEE Transaction on Reliability*, 1988, vol. 37, pp. 45–49.

47. Provan J.S., Ball M.O. Computing Networks Reliability in Polynomial Time in the Number of Cuts. *Operation Research*, 1984, no. 32, pp. 516–526.

48. Ball M.O., Provan J.S. Computing k-Terminal Reliability in Time Polynomial in the Number of (s,t)-Quasicuts. *Fourth Army Conference on Applied Mathemathics and Computing*. Washington: Army Research Office, pp. 901–907.

49. Shier D.R. Algebraic Aspects of Computing Network Reliability. In: *Applications of Discrete Mathematics*, Ringeisen R.D. and Roberts F.S., Eds., Philadelphia: SIAM, 1988, pp. 135–147.

Статью представил к публикации член редколлегии Н.А.Кузнецов