

Операторы всеобщего и распределённого знания: дополнительные выразительные средства в логиках знания

М.Н.Рыбаков

Тверской государственный университет, Тверь, ул. Желябова, 33, Россия,
кафедра общей и прикладной алгебры и геометрии
e-mail: m_rybakov@mail.ru

Поступила в редколлегию 20.02.2001

Аннотация—В этой работе рассматривается подход к формализации понятия знания, который приводит к полимодальным логикам. В зависимости от того, как мы понимаем, что означают фразы вроде «некто знает φ », или какие свойства мы склонны приписывать оператору «знать», мы можем получать различные логики, которые описывают это понятие. Важным моментом при изучении свойств знания является взаимодействие знаний, которыми обладают т. н. агенты знания. В результате возникают новые виды знания. Здесь рассматриваются два из них — всеобщее и распределённое знание. Доказывается, что операторы всеобщего и распределённого знания не выражаются через операторы знания агентов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы довольно часто произносим фразы вроде «Я это знаю» или «Я знаю, что им это известно» и т. п., другими словами, мы делаем утверждения о разного рода *знании*. «Разного рода» в том смысле, что знаем мы по-разному, например, знаем на основании собственных наблюдений, знаем из книг, знаем, потому что кто-то нам это сказал, знаем, потому что верим и т. д. Тем не менее, у нас, видимо, есть некоторое общее представление о смысле слова «знать» независимо от того, о каком знании идёт речь — о научном, экспериментальном, о знании, основанном на убеждении или о каком-то другом. Выделить ту сущность, которая лежит в основе понятия «знать», представляется довольно непростой задачей, но можно попытаться формализовать понятие знания, описывая его свойства логическими средствами.

Один из возможных способов сделать это состоит в том, чтобы включить в формальный язык модальные операторы, соответствующие понятию «знать». Такого рода формализации возникали не единожды, в частности, их изучению посвящены работы [1], [2], [3], [4], [5] и др. Эти формализации позволяют описывать знание в т. н. *распределённых системах*, например, распределение знания в группе людей или, скажем, в компьютерных сетях (хотя в последнем случае, термин «знание» не совсем уместен, т. к. компьютеры не могут знать в привычном понимании смысла этого слова, они лишь содержат некоторую информацию). Вопросы, касающиеся распределённых систем и знания в них, тесно связаны с протоколами общения и вопросами о взаимодействии разного рода знаний.

Мы будем считать, что имеется несколько (конечное число) носителей знания. Нас не будет интересовать, кто или что является носителем знания — человек, группа людей, механическое устройство, — поэтому для обозначения носителя знания будем использовать термин *агент знания*, или просто *агент*. Агенты знания образуют распределённую систему. Для простоты будем обозначать агентов знания натуральными числами; так, если система состоит из n агентов, то будем обозначать их через $1, \dots, n$.

В качестве примера рассмотрим задачу о неверных мужьях [1].

ЗАДАЧА О НЕВЕРНЫХ МУЖЬЯХ. Правительницы матриархального города-государства Мамайорки долгое время пытались бороться с проблемой мужской неверности. Со времён правления королевы Генретты I для женщин, желающих выйти замуж, существовало условие: они должны были иметь отличное здоровье, а также должны были сдать сложный экзамен, для которого требовалось уметь хорошо логически мыслить и решать сложные логические задачи. Это требование, правда, не распространялось на правительниц государства.

В Мамайорке было общеизвестным, что королева никогда не обманывает своих подданных и что все женщины преданы своей правительнице. Также было общеизвестным и то, что все женщины этого города-государства слышат каждый выстрел, произведённый в Мамайорке. Однажды утром Генретта I проснулась с твёрдым решением покончить с мужской неверностью в своём государстве. Она собрала всех женщин на главной площади города и зачитала им следующее утверждение:

В нашем обществе есть неверные мужья (один или более). Хотя до сих пор некоторая из вас не узнала, изменяет ли ей её собственный муж, тем не менее, каждая из вас знает всех остальных мужчин, которые изменяют своим жёнам. Я запрещаю вам обсуждать друг с другом тему неверности ваших мужчин. Несмотря на это, каждая из вас должна выяснить, изменяет ли ей её муж, и, как только которой-нибудь из вас станет известно о неверности своего супруга, она должна застрелить его в первую же полночь после того дня, когда об этом узнает.

Тридцать девять ночей стояла тишина, а на сороковую раздались выстрелы.

В данной задаче агентами знания являются женщины Мамайорки. Давайте посмотрим, каким образом они могли, используя знания, полученные от королевы, обнаружить неверность собственных мужей и при этом не нарушить установленных запретов.

Предположим, что есть всего один мужчина, который изменяет своей жене. Тогда его жена не знает ни об одном неверном муже, а поскольку королева сказала, что хотя бы один неверный муж есть, то она вынуждена сделать вывод, что её супруг ей изменяет. В результате она должна убить его в первую же ночь. Остальные женщины знают при этом одного неверного мужа, но каждая из них не исключает ситуации, что всего неверных мужчин двое (в случае, если собственный супруг тоже неверен). В результате они будут ждать выстрелов в первую ночь, и если их не будет, то каждая из них сделает вывод о том, что её муж ей изменяет, и вынуждена будет убить его на вторую ночь. Правда, в нашем случае этого не произойдёт, т. к. неверный муж всего один, и он, как мы видели, будет убит в первую ночь.

Для ситуации в общем случае справедливо следующее утверждение [1].

Предложение 1. *Если в Мамайорке было m неверных мужей, то они должны быть убиты в полночь по истечении m -го дня, считая с того, как Генретта I объявила свои правила.*

Доказательство. Справедливость данного утверждения докажем индукцией по количеству неверных мужей.

Если $m = 1$, то, как мы видели, единственный неверный муж должен будет убит в полночь по истечении первого дня.

Предположим теперь, что утверждение верно для k , т. е. если в Мамайорке существует k неверных мужей, то все они должны быть убиты в полночь по истечении k -го дня. Покажем, что в этом случае оно верно и для $k + 1$, т. е. если в Мамайорке число неверных мужей — $k + 1$, то все они должны быть убиты в полночь по истечении $(k + 1)$ -го дня.

Итак, пусть число неверных мужей равно $k + 1$. В этом случае каждая обманутая жена знает ровно о k неверных мужьях. Ввиду логических способностей женщин Мамайорки каждая из обманутых жён знает, что если бы было ровно k неверных мужей, то они были бы убиты в k -ю ночь. До наступления k -ой ночи обманутая жена не может установить, что её муж неверен ей, поэтому в первые k ночей не будет произведено ни одного выстрела. А поскольку k -я ночь будет без выстрелов,

то каждая обманутая жена сделает вывод, что неверных мужей должно быть больше, чем k , т. е. что её собственный супруг ей изменяет. В результате все неверные мужья будут убиты на $(k + 1)$ -ю ночь. $\square$

Следствие. *Те мужья женщин Мамайорки, которые были верны своим жёнам, убиты не будут.*

2. СИНТАКСИС

Чтобы можно было строить предложения о знаниях агентов $1, \dots, n$, рассмотрим язык $\mathcal{L}_n$, содержащий

- счётное множество $P = \{p, q, r, p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1, \dots\}$ символов пропозициональных переменных;
- логическую константу $\perp$ (ложь);
- символы логических связок: $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация);
- для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ символ K_i ;
- символы правой и левой скобок.

Формулы в языке $\mathcal{L}_n$ строятся из переменных и константы $\perp$ с помощью логических связок и операторов K_i , $1 \leq i \leq n$. При записи формул помимо перечисленных связок будем также использовать связки $\neg$ (отрицание) и $\leftrightarrow$ (эквивалентность), понимая содержащие их формулы как следующие сокращения:

$$\neg\varphi = \varphi \rightarrow \perp;$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi).$$

При записи формул будем опускать некоторые скобки, считая самой сильной связкой $\neg$ и далее по убывающей K_i , $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$.

Используя язык $\mathcal{L}_n$, мы можем говорить о знаниях агентов $1, \dots, n$, обозначая через $K_i\varphi$ высказывание «агент i знает φ ».

Вернёмся к задаче о неверных мужьях. Пусть в Мамайорке были всего три замужние женщины (на самом деле их было, как минимум, сорок) и пусть мужья изменяли первым двум, а муж третьей был ей верен. Обозначим

$$p_i \quad \rightleftharpoons \quad \text{«муж } i\text{-ой женщины изменяет ей»}.$$

Тогда в тот момент, когда королева только что произнесла свою речь, будут справедливы, например, следующие утверждения:

$$\begin{aligned} & p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3; \\ & K_1(p_2 \wedge \neg p_3) \wedge \neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1; \\ & K_2(p_1 \wedge \neg p_3) \wedge \neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2; \\ & K_3(p_1 \wedge p_2) \wedge \neg K_3 p_3 \wedge \neg K_3 \neg p_3; \\ & K_1 \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \wedge K_2 \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \wedge K_3 \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3). \end{aligned}$$

Итак, кажется, что язык $\mathcal{L}_n$ является подходящим средством для описания знаний агентов в распределённых системах. Но наша задача состоит не только в том, чтобы найти средство формальной записи предложений, содержащих утверждения о знаниях, но ещё и в том, чтобы выбрать среди этих предложений, в некотором роде, правильные. Так, наверное, стоит признать правильными предложения типа

$$K_i(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K_i\varphi \wedge K_i\psi),$$

но не стоит признавать правильными все рассуждения типа

$$K_i\varphi \rightarrow K_j\varphi,$$

если $i \neq j$. Другими словами, речь идёт о выборе подходящей семантики. Надо заметить, что найти семантику, которая позволяла бы выбирать в точности те формулы, которые по нашему внутреннему представлению соответствуют правильным рассуждениям о знании, не так уж и просто, но при некотором огрублении наших представлений о знании, для этих целей подходит реляционная семантика Крипке.

3. СЕМАНТИКА

Набор $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$, где W — некоторое непустое множество, а $R_1, \dots, R_n$ — бинарные отношения на W , будем называть шкалой Крипке. Элементы множества W будем называть мирами, или точками, а отношения $R_1, \dots, R_n$ — отношениями достижимости.

Оценкой пропозициональных переменных на множестве миров W будем называть функцию $V : P \times W \rightarrow \{true, false\}$.

Пару $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, где $\mathfrak{F}$ — шкала Крипке, а V — оценка пропозициональных переменных на этой шкале, будем называть моделью Крипке.

На шкалах и моделях Крипке введём отношение истинности $\mathcal{L}_n$ -формул, которое будем обозначать символом $\models$.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ — модель Крипке, $w \in W$, $p \in P$, φ, ψ — $\mathcal{L}_n$ -формулы. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}, w) &\not\models \perp; \\ (\mathfrak{M}, w) &\models p \Leftrightarrow V(p, w) = true; \\ (\mathfrak{M}, w) &\models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, w) \models \varphi \text{ и } (\mathfrak{M}, w) \models \psi; \\ (\mathfrak{M}, w) &\models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, w) \models \varphi \text{ или } (\mathfrak{M}, w) \models \psi; \\ (\mathfrak{M}, w) &\models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, w) \not\models \varphi \text{ или } (\mathfrak{M}, w) \models \psi; \\ (\mathfrak{M}, w) &\models K_i \varphi \Leftrightarrow \text{для всякого } w' \in W \text{ такого, что } w R_i w', \\ &\text{справедливо отношение } (\mathfrak{M}, w') \models \varphi; \\ \mathfrak{M} &\models \varphi \Leftrightarrow \text{для всякого } w \in W \text{ имеет место} \\ &\text{отношение } (\mathfrak{M}, w) \models \varphi; \\ \mathfrak{F} &\models \varphi \Leftrightarrow \text{для любой оценки } V \text{ имеет место} \\ &\text{отношение } \langle \mathfrak{F}, V \rangle \models \varphi. \end{aligned}$$

В дальнейшем, во избежание излишней громоздкости в записях, вместо обозначения $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ будем писать просто $w \models \varphi$, если из контекста понятно, о какой именно модели идёт речь. Если справедливо отношение $w \models \varphi$, то будем говорить, что в точке w истинна формула φ . Если же $\mathfrak{M} \models \varphi$ или $\mathfrak{F} \models \varphi$, то будем говорить, что в модели $\mathfrak{M}$ или, соответственно, в шкале $\mathfrak{F}$ истинна формула φ . В случае, если φ не является истинной в шкале, модели или точке, будем говорить, что она там опровергается.

Миры в шкалах и моделях Крипке можно понимать как ситуации или состояния распределённой системы, при этом разумно считать, что отношение достижимости на мирах определяется в соответствии с тем, в каких ситуациях каждый из агентов рассматривает те или иные миры в качестве возможных.

В зависимости от того, какими свойствами будут обладать отношения достижимости, в шкалах Крипке будут истинны те или иные формулы, содержащие операторы знания. Различные классы шкал Крипке будут порождать различные множества истинных в них формул, т.е. различные логики. В качестве логик знания разумно рассматривать, например, следующие [5]:

– $\mathbf{K}_n$ — множество $\mathcal{L}_n$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке;

- T_n — множество $\mathcal{L}_n$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с рефлексивными отношениями достижимости;
- $K4_n$ — множество $\mathcal{L}_n$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с транзитивными отношениями достижимости;
- $S4_n$ — множество $\mathcal{L}_n$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с рефлексивно-транзитивными отношениями достижимости;
- $S5_n$ — множество $\mathcal{L}_n$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с рефлексивно-симметрично-транзитивными отношениями достижимости;
- $KD45_n$ — множество $\mathcal{L}_n$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с отношениями достижимости, удовлетворяющими условиям рефлексивности, евклидовости¹ и серийности.²

Перечисленные логики довольно хорошо изучены и обладают рядом приятных свойств — например, все они разрешимы и могут быть заданы как исчисления с конечными списками аксиом.

Насколько перечисленные логики согласуются с нашими представлениями о свойствах знания, судить довольно сложно, и вообще сложно однозначно ответить на этот вопрос. Сомнение в том, что эти логики описывают свойства операторов знания, возникает уже потому, что представление о знании у каждого человека, видимо, одно, а логик несколько. Но с другой стороны, надо заметить, что мы всё же можем выделять разные виды знания (научное, полученное на основе нашего опыта, убежденность, знание в целом и т. д.). Ясно, что в этом случае можно говорить о разных свойствах различных видов знания. Так, например, хотелось бы, чтобы знание соответствовало реальному положению вещей; в языке $\mathcal{L}_n$ это требование может быть описано формулой

$$K_i\varphi \rightarrow \varphi.$$

Тем не менее, мы согласимся, наверное, что подобное утверждение можно признать правомерным в отношении, например, научного знания, но нельзя признать таковым, скажем в отношении убеждений (из перечисленных логик формулу $K_ip \rightarrow p$ содержат только три — T_n , $S4_n$ и $S5_n$). При таком подходе становится понятно, почему могут возникнуть различные логики знания (в [4] показано, как возникает, например, логика $S5_n$.)

Но вернёмся теперь к языку. Довольно важным моментом при изучении знания представляется взаимодействие знаний разных агентов. С помощью средств языка $\mathcal{L}_n$ мы можем легко записывать предложения вроде «Некто знает, что некто другой не знает факта такого-то» и т. п. Более того, мы можем описывать некоторые операторы знания, которые явно не присутствуют в языке $\mathcal{L}_n$. Такими являются, например, операторы E («все знают») и S («кто-то знает»), которые можно понимать как следующие сокращения для $\mathcal{L}_n$ -формул:

$$E\varphi = \bigwedge_{i=1}^n K_i\varphi, \quad S\varphi = \bigvee_{i=1}^n K_i\varphi.$$

Но есть такие виды знания, которые, будучи получены в результате взаимодействий знаний агентов $1, \dots, n$, тем не менее, не соответствуют ни одному предложению языка $\mathcal{L}_n$. Чтобы увидеть, как возникают такого рода знания, обратимся опять к задаче о неверных мужьях.

4. ДРУГИЕ ОПЕРАТОРЫ ЗНАНИЯ

Давайте заметим, что при решении поставленной перед женщинами Мамайорки задачи эти женщины руководствовались знанием особого вида, т. е. несколько отличным от того знания, которое мы описываем операторами вида K_i . Чтобы лучше понять это, изменим чуть-чуть условия задачи.

¹ Т. е. для всех $w, w', w'' \in W$ из того, что wR_iw' и wR_iw'' следует, что $w'R_iw''$.

² Т. е. для всякого $w \in W$ существует $w' \in W$ такой, что wR_iw' .

Чуть выше мы рассмотрели в качестве примера ситуацию, когда мужья изменяют двум женщинам из трёх. Обратим внимание на то, что в этом случае, согласно утверждению королевы, каждая женщина знает хотя бы одного мужчину, изменяющего своей жене. Именно, первая знает это о муже второй, вторая — о муже первой, а третья — о мужьях первой и второй. В этой ситуации слова королевы о том, что есть хотя бы один мужчина, изменяющий своей жене, кажутся излишними — действительно, что изменится, если не говорить о том, о чём и так всем известно? Тем не менее, как мы сейчас убедимся, изменится многое.

Итак, пусть ситуация та же, т. е. описывается формулой

$$\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3,$$

где, как и раньше,

$$p_i \quad \Rightarrow \quad \text{«муж } i\text{-ой женщины изменяет ей»}.$$

Пусть королева произнесла те же самые слова, опустив лишь первое предложение — о том, что есть хотя бы один неверный мужчина. И хотя все женщины и так об этом знают, покажем, что ни одна из них не сможет выяснить, изменяет ли ей её муж.

В тот момент, когда королева только что произнесла свою речь, первая женщина может рассматривать два возможные ситуации: когда её муж изменяет ей и когда это не так. Этот факт может быть описан формулой

$$\neg K_1 \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \wedge \neg K_1 \neg (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Аналогично по отношению ко второй и третьей женщинам будут справедливы следующие утверждения:

$$\neg K_2 \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \wedge \neg K_2 \neg (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3);$$

$$\neg K_3 \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \wedge \neg K_3 \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3);$$

Первая женщина, рассматривая в качестве возможной, например, ситуацию $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$, может предположить, что вторая будет рассматривать в качестве возможной ситуацию $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$, т. е. сразу после слов королевы справедливо утверждение

$$\neg K_1 \neg \neg K_2 (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3),$$

или

$$\neg K_1 K_2 (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3).$$

Аналогичные доводы приводят к заключению, что будут также справедливы, например, утверждения

$$\neg K_2 K_1 (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

и

$$\neg K_3 K_1 K_2 (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3).$$

Другими словами, некоторая из женщин не исключает, что некоторая не исключает, что некоторая не исключает ситуации, когда неверных мужей нет, и, поскольку мы предположили, что королева не стала говорить о том, что есть неверные мужья, женщины никогда не смогут выяснить при соблюдении прочих условий, кому из них изменяют собственные мужья.

Таким образом, гипотеза о том, что в случае, когда имеются по крайней мере два неверных мужа, королеве необязательно говорить, что есть неверные мужья, оказалась несостоятельной. Таким образом, королева, произнося слова о том, что есть неверные мужья, давала тем самым необходимое знание о невозможности ситуации, когда неверных мужей нет, более того, это знание становилось *всеобщим*, поскольку в результате всем становилось известно не только то, что есть неверные мужья, но и то, что все знают, что есть неверные мужья, и что все знают, что все знают, что есть неверные мужья, и т. д.

Итак, женщины Мамайорки, решая поставленную перед ними задачу, руководствовались особым видом знания — всеобщим знанием. В жизни мы говорим о таком знании, когда, например, произносим слова вроде «это общеизвестно», подчёркивая, что это не просто все знают, но и всем известно,

что все это знают, и всем известно, что все знают, что все это знают, и т. д. Например, общеизвестно, что Земля имеет форму шара, что все люди смертны, что на северном полюсе круглый год лежит снег и т. п. Но не является общеизвестным, например, химический состав Солнца, имя десятого президента Америки, расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга.

Обозначим оператор всеобщего знания через C и добавим символ этого оператора к языку $\mathcal{L}_n$. Получившийся язык обозначим через $\mathcal{L}_n^C$. Семантически оператор C определяется следующим образом. Пусть w — точка модели Крипке. Тогда

$$w \models C\varphi \Leftrightarrow w \models E^k\varphi \text{ для всякого } k \geq 1,$$

где $E^0\varphi = \varphi$ и $E^{k+1}\varphi = EE^k\varphi$.

Иногда всеобщего знания бывает достаточно для решения некоторых задач [1], но порой трудность состоит в том, что всеобщего знания не всегда можно достичь [6].

Как видно из определения оператора всеобщего знания, такое знание является довольно слабым — знания некоторых агентов могут не входить во всеобщее знание (хотя при этом часто составляют большую ценность).

Другим оператором знания, невыразимым в языке $\mathcal{L}_n$ никакой формулой, является оператор распределённого знания D . Добавим символ этого оператора к $\mathcal{L}_n^C$ и получившийся язык обозначим через $\mathcal{L}_n^{CD}$. Семантически оператор D можно определить так. Пусть w — точка некоторой модели Крипке $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, где $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$. Тогда

$$w \models D\varphi \Leftrightarrow \text{для любой точки } w' \text{ такой, что } wR_iw' \text{ для всякого } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ верно отношение } w' \models \varphi.$$

Из определения оператора распределённого знания видно, что если агент i из группы G знает φ , то φ входит и в распределённое знание, т. е. справедливы утверждения, описываемые $\mathcal{L}_n^{CD}$ -формулами вида

$$K_i\varphi \rightarrow D\varphi.$$

Более того, в распределённом знании может содержаться некий факт, который не знает ни один из агентов. В качестве примера рассмотрим опять задачу о неверных мужьях. Пусть опять есть всего три женщины и пусть мужья изменяют только первым двум; пусть снова

$$p_i \Leftrightarrow \text{«муж } i\text{-ой женщины изменяет ей»}.$$

Тогда в тот момент, когда королева только что произнесла свою речь, справедливы утверждения

$$\begin{aligned} p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3; \\ K_1(p_2 \wedge \neg p_3) \wedge \neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1; \\ K_2(p_1 \wedge \neg p_3) \wedge \neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2; \\ K_3(p_1 \wedge p_2) \wedge \neg K_3 p_3 \wedge \neg K_3 \neg p_3, \end{aligned}$$

в частности,

$$\neg S(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3),$$

но, тем не менее, легко понять, что знание о ситуации о неверности мужей распределено между женщинами, т. е. верно утверждение

$$D(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

5. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ C И D

В случае с операторами C и D , как и раньше, особый интерес представляют формулы, которые описывают правильные (с некоторой точки зрения) рассуждения. Рассмотрим следующие логики:

- $\mathbf{K}_n^{CD}$ — множество $\mathcal{L}_n^{CD}$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке;
- $\mathbf{T}_n^{CD}$ — множество $\mathcal{L}_n^{CD}$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с рефлексивными отношениями достижимости;
- $\mathbf{K4}_n^{CD}$ — множество $\mathcal{L}_n^{CD}$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с транзитивными отношениями достижимости;
- $\mathbf{S4}_n^{CD}$ — множество $\mathcal{L}_n^{CD}$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с рефлексивно-транзитивными отношениями достижимости;
- $\mathbf{S5}_n^{CD}$ — множество $\mathcal{L}_n^{CD}$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с рефлексивно-симметрично-транзитивными отношениями достижимости;
- $\mathbf{KD45}_n^{CD}$ — множество $\mathcal{L}_n^{CD}$ -формул, истинных во всех шкалах Крипке с отношениями достижимости, удовлетворяющими условиям рефлексивности, евклидовости и серийности.

Надо заметить, что хотя операторы C и D в этих логиках и имеют ряд общих свойств, тем не менее, различны. Так, например, все перечисленные логики содержат следующие формулы:

$$\begin{aligned} Cp \rightarrow CCp; & \quad Cp \rightarrow E(p \wedge Cp); & \quad E(p \wedge Cp) \rightarrow Cp; \\ C(p \rightarrow q) \rightarrow (Cp \rightarrow Cq); & \quad D(p \rightarrow q) \rightarrow (Dp \rightarrow Dq); & \quad Cp \rightarrow Ep; \\ Ep \rightarrow Kip; & \quad Kip \rightarrow Sp; & \quad Sp \rightarrow Dp, \end{aligned}$$

но не все содержат, например, формулы $Dp \rightarrow DDp$, $Dp \rightarrow p$, $Cp \rightarrow p$ и др.

Почти во всех перечисленных логиках операторы C и D наследуют свойства операторов K_i . Исключением является логика $\mathbf{KD45}_n^{CD}$, которая, например, содержит формулы $\neg K_i \perp$ и $\neg K_i p \rightarrow K_i \neg K_i p$, но не содержит формул $\neg D \perp$ и $\neg Cp \rightarrow C \neg Cp$.

Но наиболее важным является тот факт, что ни в одной из перечисленных логик ни оператор C , ни оператор D не могут быть представлены как сокращения формул, содержащих другие операторы. Другими словами, верно следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть L — одна из логик $\mathbf{K}_n^{CD}$, $\mathbf{T}_n^{CD}$, $\mathbf{K4}_n^{CD}$, $\mathbf{S4}_n^{CD}$, $\mathbf{S5}_n^{CD}$, $\mathbf{KD45}_n^{CD}$. Тогда операторы C и D независимы в L .

Доказательство. Обоснуем независимость оператора C . Пусть L — одна из перечисленных выше логик. Предположим, что существует формула φ , не содержащая подформул с оператором C такая, что $Cp \leftrightarrow \varphi \in L$. Без ограничений общности можем считать, что φ зависит от единственной переменной p . Рассмотрим шкалу $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$, где $W = \mathbb{N}$, а отношения достижимости определяются следующим образом (см. рис. 1):

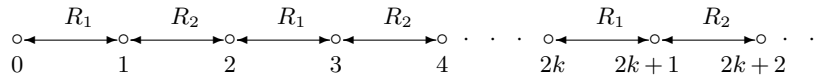


Рис. 1. Граф шкалы Крипке, отделяющей C

$mR_i m$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и всех $m \in W$;

$(2k)R_1(2k+1)$ и $(2k+1)R_1(2k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

$(2k+1)R_2(2k+2)$ и $(2k+2)R_2(2k+1)$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

Заметим, что отношения достижимости в $\mathfrak{F}$ рефлексивны, транзитивны, симметричны, евклидовы и серийны, т. е. в $\mathfrak{F}$ истинны все формулы логики L .

На $\mathfrak{F}$ построим модель $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, где $V(p, m) = \text{true}$ для всех $m \in W$. Тогда $(\mathfrak{M}, 0) \models Cp$, следовательно, $(\mathfrak{M}, 0) \models \varphi$.

Пусть $md(\varphi)$ — модальная глубина φ ³. Рассмотрим модель $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{F}, V' \rangle$, где $V'(p, m) = true$ ровно в том случае, когда $m \leq md(\varphi) + 1$. Ясно, что в этом случае $(\mathfrak{M}', 0) \not\models Cp$, но $(\mathfrak{M}', 0) \models \varphi$. Получили противоречие, из чего заключаем, что оператор C не выражается через другие операторы и логические связки логики L .

Теперь обоснуем независимость оператора D . Предположим, что существует формула φ , не содержащая подформулы с оператором D такая, что $Dp \leftrightarrow \varphi \in L$. Опять без ограничений общности можем считать, что φ зависит от единственной переменной p . Рассмотрим шкалу $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$, где $W = \{0, \dots, n+2\}$, а отношения достижимости определяются следующим образом (см. рис. 2):

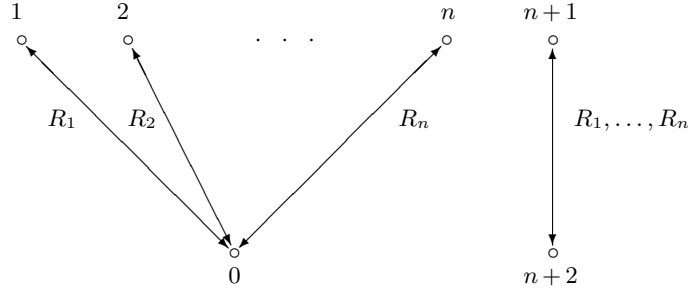


Рис. 2. Граф шкалы Крипке, отделяющей D

$mR_i m$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и всех $m \in W$;

$0R_i i$ и $iR_i 0$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;

$(n+2)R_i(n+1)$ и $(n+1)R_i(n+2)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Заметим, что отношения достижимости в $\mathfrak{F}$ рефлексивны, транзитивны, симметричны, евклидовы и серийны, т. е. в $\mathfrak{F}$ истинны все формулы логики L .

На $\mathfrak{F}$ построим модель $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, где $V(p, m) = true$ ровно в том случае, когда $m \in \{0, n+2\}$. Тогда ясно, что множество точек модели $\mathfrak{M}$, в которых истинна формула Dp , состоит из единственной точки 0. Но с другой стороны, с помощью индукции по построению формулы φ (которая не содержит подформулы с оператором D) несложно доказать, что множество точек модели $\mathfrak{M}$, в которых истинна формула φ , отличается от $\{0\}$. В результате получаем противоречие, которое означает независимость оператора D в логике L . $\square$

Заканчивая разговор о логиках и операторах знания, хочется заметить, что C и D — не единственные операторы, которые не выражаются в языке $\mathcal{L}_n$. Так, например, если G — некоторая группа агентов, то можно рассматривать операторы C_G и D_G , содержательный смысл которых — всеобщее и распределённое знание среди агентов группы G .

В [3] предлагается ввести в рассмотрение операторы вида K_i^α , где α — некоторое кардинальное число, которые определяются семантически следующим образом: формула $K_i^\alpha \varphi$ считается истинной в точке w , если множество точек, достижимых из w по отношению, соответствующему оператору K_i , в которых истинна формула φ , имеет мощность не меньше, чем α . Подобные операторы могут возникать при рассмотрении распределённых систем, имеющих, отношение, например, к экономике.

Можно рассматривать модальный язык, в котором присутствует бесконечное число операторов K_i , что соответствует неограниченности числа агентов знания. Введение в рассмотрение такого языка может быть мотивировано тем, что в реальных ситуациях число агентов знания, входящих в ту или иную систему, меняется с течением времени и, вообще говоря, неограничено. Примерами

³ Модальная глубина формулы в языке $\mathcal{L}_n^{CD}$ определяется следующим образом: $md(p) = 0$, $md(\neg\psi) = md(\psi)$, $md(\psi \wedge \chi) = md(\psi \vee \chi) = md(\psi \rightarrow \chi) = \max(md(\psi), md(\chi))$, $md(K_i\psi) = md(D\psi) = md(C\psi) = md(\psi) + 1$.

таких систем могут служить группы людей или компьютерные сети. Заметим, что в этом случае операторы E и S с тем же интуитивным смыслом, как было рассмотрено в данной работе, уже не будут сокращениями формул, содержащих операторы K_i .

Обогащение языка можно производить не только за счёт введения новых модальностей. Так, добавив символы предикатов и кванторов, мы получим язык с дополнительными выразительными возможностями. В результате мы сможем описывать некоторые свойства операторов знания, которые не выражаются средствами пропозиционального языка.

Поскольку знания изменяются с течением времени, то разумно также при описании знаний учитывать параметр времени. Применительно к логикам это может означать введение в рассмотрение т. н. временных логик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moses Yoram, Dolev Danny, and Halpern Joseph Y. Cheating Husbands and Other Stories: A Case Study of Knowledge, Action, and Communication. *Distributed Computing*, 1986, vol. 1, pp. 167–176.
2. Halpern Joseph Y. and Moses Yoram. Taken by Surprise: The Paradox of the Surprise Test Revisited. *J. Philosophical Logic*, 1986, vol. 15, pp. 281–304.
3. Halpern Joseph Y. and Fagin Ronald. *Modelling Knowledge and Action in Distributed Systems*.
4. Fagin Ronald, Halpern Joseph Y., and Vardi Moshe Y. What Can Machines Know? On the Properties of Knowledge in Distributed Systems. *J. Assoc. Computing Machinery*, 1992, vol. 39, no. 2, pp. 328–376.
5. Halpern Joseph Y., Moses Yoram. A Guide to Completeness and Complexity for Modal Logics of Knowledge and Belief. *Artificial Intelligence*, 1992, vol. 54, pp. 319–379.
6. Morris Stephen, Shin Hyun Song. Approximate Common Knowledge and Co-ordination: Recent Lessons from Game Theory. *J. Logic, Language, Information*, 1997, vol. 6, no. 2, pp. 171–190.

Статью представил к публикации член редколлегии В.А. Любецкий