

Калибровка инвариантных преобразователей информации

П.В.Голубцов, О.В.Старикова

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 6.12.2000

Аннотация—Многие современные измерительные системы, работающие с большими объемами информации (например, системы формирования изображения), являются в определенном смысле инвариантными. Учет этой инвариантности при решении задачи построения оптимального преобразователя информации (измерительно-вычислительной системы) позволяет существенно упростить ее. Задача синтеза оптимального преобразователя информации состоит в получении оптимального редукционного преобразователя информации (определяющего алгоритм последующей обработки) с определенным носителем функции влияния. Проблема выходит на качественно новый уровень, если информация об исходном преобразователе информации не достаточно точна. В таких случаях ставится задача калибровки. Она состоит в построении оптимального калибровочного отображения, переводящего калибровочные данные (т.е. результаты измерения известных сигналов) в редукционный преобразователь информации. В работе показывается, что, если преобразователь информации обладает высокой степенью инвариантности, то решение обеих задач может быть значительно упрощено. Заметим, что редукционный преобразователь информации и степень сложности его построения не зависят от количества обрабатываемых данных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие системы преобразования информации работают с огромными объемами данных. Это относится, скажем, к системам регистрации и анализа изображений (функций на плоскости или в пространстве) или временных сигналов. При обработке данных, получаемых от преобразователей информации таких типов, возникают сложности, связанные с тем, что “поля зрения” исходных сигналов и результатов измерений являются довольно большими или потенциально бесконечными. В таких случаях разумно воспользоваться тем, что подобные преобразователи информации зачастую обладают пространственной или временной инвариантностью, описываемой действием некоторой группы. Использование этого свойства позволяет значительно упростить решения задачи синтеза измерительно-вычислительной системы [1]–[4] и задачи калибровки [5, 6].

Ситуация, однако, осложняется тем, что очень часто на практике точное действие преобразователя информации не известно, что может привести к чрезмерно высокой погрешности синтезированного преобразователя информации. В такой ситуации имеет смысл рассмотреть задачу построения оптимального редукционного отображения для неточно заданного преобразователя информации. При этом “неточность” задания преобразователя информации может быть описана вероятностным распределением Q на классе преобразователей информации. Если же погрешность построенной таким образом синтезированного преобразователя информации является слишком большой, то необходимо провести калибровочные измерения, которые позволят извлечь дополнительную сведения о действии преобразователя информации. Возникает естественный вопрос, как воспользоваться результатами этих измерений оптимальным образом.

Распространенный подход состоит в том, что по результатам этих измерений строится приближение модели преобразователя информации, а затем это приближение используется для решения задачи интерпретации. Такой подход, однако, нацелен в первую очередь на построение оптимальной оценки для преобразователя информации и может не обеспечивать выбор оптимального редукционного преобразования. Другой подход [5] заключается в том, чтобы строить редукционное отображение [7, 8]

(определяющее алгоритм обработки) непосредственно на основании результатов калибровочных измерений оптимальным образом. Для калибровочного измерения известного сигнала ϕ вводится понятие калибровочной стратегии β как отображения, переводящего результат калибровочного измерения ψ в редукционное отображение $R = \beta(\psi)$. В данной работе предпринята попытка распространить подход к калибровке измерительных систем, разработанный в работах [5, 6] для конечномерных линейных преобразователей информации, на случай инвариантных преобразователей информации, возможно, в бесконечномерных пространствах [1, 2, 3, 4].

Задача калибровки ставится как задача построения калибровочной стратегии β_Q , оптимальной относительно априорной информации Q о преобразователе информации. В силу байесовского принципа оптимальным редукционным отображением относительно априорной информации Q и результатов калибровочных измерений ψ будет отображение, оптимальное относительно условного распределения Q_ψ , соответствующего апостериорной информации об исходном преобразователе информации.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ИНФОРМАЦИИ

Пусть заданы множества D и H – “поля зрения” исходных сигналов и результатов измерения, соответственно. Эти множества могут быть и бесконечными. Так при описании систем формирования изображений удобно считать, что эти множества образуют регулярные сетки на плоскости, например, квадратную или гексагональную [3, 4]. Пространства функций, заданных на этих множествах, будем обозначать соответственно $\hat{D}$ и $\hat{H}$ (вместо более традиционных $\mathbf{R}^D$ и $\mathbf{R}^H$). Если множества D и H бесконечны, то они являются бесконечномерными линейными пространствами, однако имеет место однородность, которая описывается заданием действия некоторой группы G на этих пространствах. А именно, пусть на множествах D и H задано действие некоторой группы G [9, 10, 11]. Определим действие группы G на $\hat{D}$ следующим образом:

$$(gf)(d) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}d) \quad \forall f \in \hat{D}, \forall d \in D, \forall g \in G.$$

Аналогичным образом определяется действие группы G на $\hat{H}$. Линейный преобразователь информации описывается линейным отображением A между пространствами $\hat{D}$ и $\hat{H}$ и корреляционной функцией шума σ . В данной работе рассматриваются линейные отображения, обладающие инвариантностью по отношению к группе G , т.е. $Agf = gAf$ для всех $f \in \hat{D}$, $g \in G$, и финитностью. Финитность в данном случае означает, что каждая точка пространства D действует посредством отображения A на конечное число точек из пространства H , и наоборот, каждая точка из пространства H испытывает влияние посредством A конечного числа точек из пространства D исходных сигналов.

Оператор A однозначно определяется своей функцией влияния $a(d, h)$:

$$(Af)(h) = \sum_d a(d, h)f(d).$$

Здесь $f \in \hat{D}$ – исходный сигнал. Суммирование в этой формуле корректно в силу того, что на каждую точку $h \in H$ влияет конечное число точек $d \in D$.

Удобно ввести следующее отношение $\Delta = \text{supra}$ между множествами D и H : запись $d\Delta h$ означает, что $d \in D$ “влияет” на $h \in H$ посредством оператора $A : \hat{D} \rightarrow \hat{H}$, т.е. $a(d, h) \neq 0$. Множество точек, которое “испытывает влияние” d , будем обозначать $d\Delta \subseteq H$, а множество точек, которое “влияет” на h через $\Delta h \subseteq D$, таким образом, $d\Delta = \{h \in H \mid a(d, h) \neq 0\}$ и $\Delta h = \{d \in D \mid a(d, h) \neq 0\}$. Будем говорить, что Δ – финитно, если для всех $d \in D$, $h \in H$ множества $d\Delta$ и Δh конечны.

Несложно проверить, что отображение A G -инвариантно тогда и только тогда, когда функция a G -симметрична, т.е. $ga = a$ (где $ga(d, d') \stackrel{\text{def}}{=} (g^{-1}d, g^{-1}d')$).

Совокупность орбит множества X относительно подгруппы G' будем обозначать $\text{Orb}_{G'}(X)$, а стабилизатор элемента $h \in H$, т.е. подгруппа группы G , оставляющая h на месте, будем обозначать

$\text{St}(h)$ [9, 10, 11]. Для заданного финитного носителя $\Delta \subset D \times H$ и для фиксированной точки $h \in H$ будем обозначать

$$O_{\Delta, h} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Orb}_{\text{St}(h)}(\Delta h).$$

Лемма 1. [3] Пусть $\Delta \subset D \times H$ – финитный носитель, действие группы G на H транзитивно и $h_0 \in H$ – некоторая точка. Тогда любая симметричная функция влияния a с носителем Δ взаимно однозначно определяется элементом $\tilde{a} \in \hat{O}_{\Delta, h_0}$, т.е. набором значений $\tilde{a}(x)$, $x \in O_{\Delta, h_0} = \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0)$,

$$a(d, h) = \tilde{a}(\text{St}(h_0)(gd)),$$

где $g \in G$ переводит элемент h в h_0 . Здесь $\text{St}(h_0)(gd)$ – орбита элемента gd относительно стабилизатора элемента h_0 .

Линейная схема измерения сигнала $f \in \hat{D}$ имеет вид:

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где $\xi \in \hat{H}$ – результат измерения, $A : \hat{D} \rightarrow \hat{H}$ – линейный оператор, описывающий преобразователь информации, $\nu \in \hat{H}$ – шум (случайная функция) с известной корреляционной функцией σ , т.е. $\sigma(h, h') = E\nu(h)\nu(h')$. Таким образом преобразователь информации полностью определяется парой $[a, \sigma]$. Будем говорить, что преобразователь информации $[a, \sigma]$ G -инвариантен, если функции a и σ G -симметричны.

3. ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО ИНВАРИАНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ИНФОРМАЦИИ В СЛУЧАЕ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ

Пусть оператор A известен неточно, а именно, информация об аппаратной функции преобразователя информации состоит в следующем: значения на орбитах функция влияния a G -инвариантного оператора A представлена в виде суммы

$$\tilde{a} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}',$$

где $\tilde{a}_0 = E(\tilde{a})$, $E(\tilde{a}') = 0$, и известен корреляционный оператор $\tilde{T}$ (случайного элемента $\tilde{a}'$),

$$\tilde{T}z \stackrel{\text{def}}{=} E(\tilde{a}', z)\tilde{a}' \quad \forall z \in \hat{O}_{\Delta, h_0},$$

матричные элементы которого равны $\tilde{T}(x, y) = E(\tilde{a}'(x)\tilde{a}'(y))$, где $x, y \in \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0)$, $h_0 \in H$ – некоторая фиксированная точка. Таким образом, априорная информация об операторе A описывается парой $Q = [\tilde{a}_0, \tilde{T}]$.

Рассмотрим схему измерений (1). Пусть V – некоторое G -пространство интерпретаций. И пусть задано некоторое финитное линейное инвариантное отображение $U : \hat{D} \rightarrow \hat{V}$, которое описывает идеальную систему измерения. Задача синтеза оптимального преобразователя информации (измерительно-вычислительной системы) состоит в построении отображения $R : \hat{H} \rightarrow \hat{V}$ с заданным носителем Δ_r таким образом, чтобы синтезированный преобразователь информации, описываемый схемой измерения

$$\zeta = R\xi = RAf + R\nu,$$

был максимально близок в среднем к идеальному. Будем рассматривать задачу с априорной информацией о сигнале. А именно, f предполагается случайной функцией с заданной G -симметричной корреляционной функцией φ .

Будем говорить, что a^* является функцией влияния, сопряженной к функции влияния a , если $a^*(h, d) = a(d, h)$. Заметим, что если a и b G -симметричные функции влияния, то их композиция, т.е. $c = a * b$, и сумма также G -симметричны. Отметим, что композиция операторов является оператором с функцией влияния, равной композиции исходных функций влияния

$$(c * a)(d, v) = \sum_{h \in \Delta_c v \cap \Delta_a} c(h, v) a(d, h).$$

Сопряженная функция влияния к G -симметричной функции влияния является G -симметричной функцией.

Для фиксированного G -инвариантного редукционного оператора R с функцией влияния r рассмотрим погрешность синтезированного преобразователя информации $r * [a, \sigma]$ в некоторой точке “поля зрения” интерпретационного пространства $v \in V$:

$$q_Q(r, v) \stackrel{\text{def}}{=} E_Q q(r, a, v) = E_Q [R\xi(v) - Uf(v)]^2.$$

Математическое ожидание здесь берется по всем случайным переменным и, в частности, по априорной информации Q . Средняя погрешность может быть представлена в следующем виде:

$$q_Q(r, v) = ((r * a_0 - u) * \varphi * (r * a_0 - u)^* + r * (\sigma + b) * r^*)(v, v).$$

Здесь $b = E_Q(a' * \varphi * a'^*)$ и может быть явно выражено следующим образом:

$$\begin{aligned} b(h, h') &= E_Q(a' * \varphi * a'^*) = E_Q \sum_{d \in \Delta h \cap D} a'(h, d) \sum_{d' \in \Delta h' \cap D} \varphi(d, d') a'^*(d', h') \\ &= E_Q \sum_{y \in O_{\Delta, h}} \sum_{d \in y \cap D} a'(h, d) \sum_{y' \in O_{\Delta, h'}} \sum_{d' \in y' \cap D} a'(h', d') \varphi(d, d') \\ &= E_Q \sum_{y_0 \in g_h O_{\Delta, h}} \sum_{g_h d \in y_0 \cap g_h D} a'(h_0, d) \sum_{y'_0 \in g_{h'} O_{\Delta, h'}} \sum_{g_{h'} d' \in y'_0 \cap g_{h'} D} a'(h_0, d') \varphi(d, d') \\ &= E_Q \sum_{y_0 \in O_{\Delta, h_0}} \sum_{y'_0 \in O_{\Delta, h_0}} \tilde{a}'(y_0) \tilde{a}'(y'_0) \sum_{d_0 \in y_0 \cap g_h D} \sum_{d'_0 \in y'_0 \cap g_{h'} D} \varphi(g_h^{-1} d, g_{h'}^{-1} d') \\ &= \sum_{y_0 \in O_{\Delta, h_0}} \sum_{y'_0 \in O_{\Delta, h_0}} \tilde{T}(y_0, y'_0) \sum_{d_0 \in y_0 \cap g_h D} \sum_{d'_0 \in y'_0 \cap g_{h'} D} \varphi(g_h^{-1} d, g_{h'}^{-1} d'), \end{aligned}$$

где $O_{\Delta, h_0} = \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0)$, $h_0 \in H$ – некоторая фиксированная точка и элементы g_h и $g_{h'}$ такие, что $g_h h = h_0$, $g_{h'} h' = h_0$. Если группа действует на пространстве V транзитивно, то $q_Q(r, v)$ не зависит от выбора точки $v \in V$.

Задача синтеза оптимального преобразователя информации состоит в нахождении функции влияния r_Q преобразования $R : \hat{H} \rightarrow \hat{V}$ из множества G -инвариантных операторов с заданным носителем Δ_r , которая минимизировала бы $q_Q(r, v)$, то есть:

$$q_Q(r_Q, v) = \min\{q_Q(r, v) \mid \text{supp } r \subseteq \Delta_r, v \in V\}. \quad (2)$$

Следующая теорема позволяет свести задачу (2) к системе линейных уравнений.

Теорема. Пусть $[a, \sigma]$ – инвариантный преобразователь информации из $\hat{D}$ и $\hat{H}$; φ – симметричная корреляционная функция; действие группы G на пространстве V транзитивно; u – симметричная функция влияния, описывающая идеальное измерение из $\hat{H}$ в $\hat{V}$. Тогда для задачи (2) существует

оптимальная симметричная функция влияния r_Q с носителем Δ_r . Ее значения на орбитах $\tilde{r}$ определяются следующим образом.

Пусть

$$\begin{aligned} s &= a_0 * \varphi * a_0^* + \sigma + b, \\ t &= u * \varphi * a_0^*, \end{aligned}$$

и пусть $v \in V$ – некоторая фиксированная точка; $O_R = \text{Orb}_{\text{St}(v)}(\Delta v)$ – семейство орбит множества $\Delta v \in H$ относительно стабилизатора элемента v , $\hat{O}_R$ – линейное пространство функций, заданных на O_R ,

$$t \in \hat{O}_R : \mathbf{t}(x) = |x|t(h, v), \quad x \in O_R$$

для некоторого $h \in x$ (и не зависит от выбора h в силу симметрии t), где $|x|$ – число элементов орбиты x . $\mathbf{P}$ – линейный оператор в пространстве $\hat{O}_R$ с матричными элементами

$$\mathbf{P}(x, z) = \sum_{h' \in z, h'' \in x} s(h', h''),$$

где $x \in O_R$, $z \in O_R$. Тогда каждое решение $\tilde{r} \in \hat{O}_R$ линейного уравнения

$$\mathbf{P}\tilde{r} = \mathbf{t}$$

определяет значения на орбитах функции влияния оптимального инвариантного преобразования R .

Доказательство. Рассмотрим множество решений задачи (2). Запишем $q_Q(r, v)$ в виде

$$\begin{aligned} q_Q(r, v) &= ((r * a_0 - u) * \varphi * (r * a_0 - u)^* + r * (\sigma + b) * r^*)(v, v) \\ &= [r * (a_0 * \varphi * a_0^* + \sigma + b) * r^* - r * a_0 * \varphi * u^* - u * \varphi * a_0^* * r^* + u * \varphi * u^*](v, v) \\ &= (r * s * r^* - r * t^* - t * r^* + w)(v, v), \end{aligned}$$

где $w = u * \varphi * u^*$. Пусть r_v – сечение функции влияния r , функция на Δv : $r_v(h) = r(h, v)$. Тогда

$$\begin{aligned} (r * t^*)(v, v) &= (t * r^*)(v, v) = \sum_{h \in \Delta v} r_v(h)t(h, v), \\ (r * s * r^*)(v, v) &= \sum_{h, h' \in \Delta v} r_v(h)r_v(h')s(h, h') \end{aligned}$$

определяются именно v -сечениями функции $r(h, v)$.

Здесь r_v удобно рассматривать как конечномерный вектор, заиндексированный элементами Δv . Аналогично, пусть t_v – вектор с элементами $t_v(h) = t(h, v)$, $h \in \Delta v$, и S_v – линейный оператор в множестве функций на Δv , действующий следующим образом:

$$(S_v y)(h) = \sum_{h' \in \Delta v} s(h', h)y(h') \quad \forall h' \in \Delta v.$$

Тогда $q_Q(r, v)$ представляется в виде полинома второго порядка по r_v :

$$q_Q(r, v) = c_v(r_v) = (S_v r_v, r_v) - 2(t_v, r_v) + w_v,$$

где $w_v = w(v, v)$.

Очевидно, что $c_v(r_v) \geq 0$ и $S_v = S_v^*$. Тогда, в силу приведенной ниже леммы, множество векторов r_v , на которых достигается минимум функционала $c_v(r_v)$, не пусто и совпадает со множеством решений линейного уравнения

$$S_v r_v = t_v. \quad (3)$$

Итак, r является решением задачи (2) тогда и только тогда, когда для каждой точки $v \in U$ сечение r_v удовлетворяет уравнению (3).

Заметим, что если r_v – решение уравнения (3), то “сдвинутое на g ” сечение gr_v является решением уравнения

$$S_{gv} y = t_{gv}.$$

Здесь gr_v, y, t_{gv} – функции на $\Delta(gv)$.

$$gr_v(h) = r_v(g^{-1}h) \quad \forall h \in \Delta(gv) = g(\Delta v).$$

Действительно, если

$$t_v(h) = \sum_{h' \in \Delta v} s(h', h) r_v(h'),$$

то, в силу симметрии s и t , $s(h', h) = s(gh', gh)$ и $t(h, v) = t(gh, gv)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} t_{gv}(gh) &= t_v(h) = \sum_{h' \in \Delta v} s(gh', gh) r_v(h') \\ &= \sum_{h'' \in g(\Delta v)} s(h'', gh) r_v(g^{-1}h'') = \sum_{h'' \in \Delta(gv)} s(h'', gh) gr_v(h'') = S_{gv} gr_v(gh) \end{aligned}$$

Далее симметрия функции r означает, что $\forall g \in G$ $r_{gv}(gh) = r_v(h)$ или $gr_v = r_{gv}$. Это равносильно следующим двум условиям:

1. Если $g \in \text{St}(v)$, то $gr_v = r_{gv}$, то есть r_v – $\text{St}(v)$ -симметричная функция;
2. Сечение $r_{v'}$, в любой другой точке $v' \in V$ полностью определяется сечением $r_v : r_{v'} = gr_v$, где $v' = gv$ для некоторого $g \in G$ (g существует в силу транзитивности действия группы G на V).

Таким образом, симметричная функция r взаимно однозначно определяется $\text{St}(v)$ -симметричной функцией на Δv для некоторой наперед выбранной точки $v \in U$, или вектором $\tilde{r} \in \tilde{O}_R$.

Выделим теперь из всех решений задачи (2) симметричные. Пусть r_v – некоторое решение уравнения (3). Покажем, что его симметризация

$$\bar{r}_v = \frac{1}{|\text{St}(v)|} \sum_{g \in \text{St}(v)} gr_v,$$

также удовлетворяет этому уравнению. Здесь $\text{St}(v)$ – стабилизатор элемента v – конечная подгруппа, $|\text{St}(v)|$ – ее порядок.

Действительно,

$$\begin{aligned}
S_v r_v(h) &= \sum_{h' \in \Delta v} \frac{1}{|\text{St}(v)|} s(h', h) \sum_{g \in \text{St}(v)} g r_v(h') \\
&= \frac{1}{|\text{St}(v)|} \sum_{g \in \text{St}(v)} \sum_{h' \in \Delta v} s(g^{-1} h', g^{-1} h) r_v(g^{-1} h') \\
&= \frac{1}{|\text{St}(v)|} \sum_{g \in \text{St}(v)} \sum_{h'' \in \Delta v} s(h'', g^{-1} h) r_v(h'') \\
&= \frac{1}{|\text{St}(v)|} \sum_{g \in \text{St}(v)} t_v(g^{-1} h) = t_v(h).
\end{aligned}$$

Таким образом, все симметричные решения задачи (2) могут быть получены симметризацией решений уравнения (3) для произвольного $v \in V$ и симметричного продолжения на остальные $v' \in V$.

Наконец, если r симметрична, то

$$r_v(h) = \tilde{r}(x), \quad (4)$$

для $h \in x \in O_R = \text{Orb}_{\text{St}(v)}(\Delta v)$ (семейство орбит множества точек, которые влияют на точку v).

Запишем уравнение (3) в виде

$$t_v(h) = \sum_{h' \in \Delta v} s(h', h) r_v(h') = \sum_{z \in O_R} r(z) \sum_{h' \in z} s(h', h).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(x) &= |x| t_v(h) \Big|_{h \in x} = \sum_{h \in x} t_v(h) \\
&= \sum_{z \in O_R} \left[\sum_{h \in x, h' \in z} s(h, h') \right] \tilde{r}(z) = \sum_{z \in O_R} \mathbf{P}(x, z) \tilde{r}(z).
\end{aligned}$$

То есть симметричная функция r удовлетворяет уравнению (3) тогда и только тогда, когда она является симметричным продолжением функции r_v , определяемой согласно (4), где $\tilde{r}$ – решение уравнения $\mathbf{P}\tilde{r} = \mathbf{t}$. ▲

Лемма 2. [1] Пусть $p(z)$ – ограниченный снизу функционал вида

$$p(r_v) = (S_v r_v, r_v) - 2(t_v, r_v),$$

где $S_v = S_v^*$. Тогда множество элементов, доставляющих минимум функционалу p , не пусто и совпадает с множеством решений уравнения $S_v r_v = t_v$, т.е.

$$\{r_v : p(r_v) = \min\{p(r'_v) \mid r'_v \in \hat{O}_R\}\} = \{r_v : S_v r_v = t_v\}.$$

В приведенной выше теореме мы ограничились рассмотрением случая, когда группа G действует на V транзитивно. В общем случае пространство V разбивается на орбиты относительно группы G и для каждой орбиты решение строится совершенно аналогично. Таким образом, решение задачи сводится к решению нескольких систем линейных уравнений (для каждой орбиты в V – своя система) [2].

4. ЗАДАЧА КАЛИБРОВКИ ДЛЯ ИНВАРИАНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрим теперь проблему построения инвариантного редукционного оператора на основе результатов измерения известных тестовых сигналов. Пусть схема калибровочного измерения имеет вид:

$$\psi = A\phi + \mu, \quad (5)$$

где $\phi \in \hat{D}$ – тестовый сигнал, имеющий конечный носитель, то есть

$$\text{Supp}\phi = D \subseteq D,$$

следовательно, можно считать, что $\phi \in \hat{D}$. Будем считать, что $\psi \in \hat{H}$ – сигнал, полученный на выходе преобразователя информации наблюдается на некотором конечном подмножестве $H \subseteq H$. Естественным образом выбрать это подмножество следующим образом:

$$H = \text{Supp}(A\phi) = \bigcup \{\Delta_a d \mid d \in D\}.$$

Таким образом, можно считать, что $\psi \in \hat{H}$.

Удобно переписать схему калибровочного измерения с учетом того, что оператор A полностью определяется значениями на орбитах его функций влияния, то есть через $\tilde{a}$. Для простоты будем рассматривать случай, когда группа G действует на H транзитивно. В этом случае все множество H состоит из одной орбиты. Пусть $h_0 \in H$ – некоторая фиксированная точка, тогда для любой точки $h \in H$ существует $g_h \in G : g_h h = h_0$, тогда

$$a(h, d) = a(g_h h, g_h d) = a(h_0, g_h d) = \tilde{a}(\text{St}(h_0)(g_h d)).$$

С учетом этого запишем схему калибровочных измерений в виде:

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \sum_{d \in \Delta h \cap D} a(h, d) \phi(d) + \mu(h) \\ &= \sum_{y \in \text{Orb}_{\text{St}(h)}(\Delta h)} \sum_{d \in y \cap D} a(h_0, g_h d) \phi(d) + \mu(h) \\ &= \sum_{y' \in g_h(\text{Orb}_{\text{St}(h)}(\Delta h))} \sum_{g_h d \in y' \cap g_h D} a(h_0, g_h d) \phi(d) + \mu(h) \\ &= \sum_{y' \in \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0)} \sum_{d' \in y' \cap g_h D} a(h_0, d') \phi(g_h^{-1} d') + \mu(h) \\ &= \sum_{y' \in \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0)} \tilde{a}(y') \sum_{d' \in y' \cap g_h D} \phi(g_h^{-1} d') + \mu(h) \\ &= \sum_{y' \in \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0)} \Phi(h, y') \tilde{a}(y') + \mu(h) = (\Phi \tilde{a})(h) + \mu(h), \end{aligned}$$

где $y' = g_h y, d' = g_h d$.

Матричные элементы оператора Φ формируются из значений тестового сигнала ϕ следующим образом:

$$\Phi(h, y) = \sum_{d \in y \cap g_h D} \phi(g_h^{-1} d), \quad (6)$$

где $h \in H, y \in \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0), g_h h = h_0$.

Таким образом, схема калибровочных измерений (5) может быть записана в виде:

$$\psi = \Phi \tilde{a} + \mu.$$

Обозначим через O_A следующее множество:

$$O_A = \text{Orb}_{\text{St}(h_0)}(\Delta h_0),$$

где $h_0 \in H$. Если группа действует на H транзитивно, то O_A фактически не зависит от выбора h_0 , точнее такие множества изоморфны. Далее это множество будем называть множеством орбит оператора A . Тогда $\tilde{a} \in \hat{O}_A$, а оператор Φ действует из пространства $\hat{O}_A$ в пространство $\hat{H}$. Аналогичным образом $\hat{O}_R$ определяет класс инвариантных линейных операторов $R : \hat{H} \rightarrow \hat{V}$ с заданным носителем Δ_r (здесь R – редукционный оператор, а r – его функция влияния).

Учет калибровочных измерений означает, что редукционный оператор R (или однозначно определяющий его элемент $\tilde{r} \in O_R$ выбирается на основании результатов калибровки из класса инвариантных операторов с заданным носителем Δ_r , то есть $\tilde{r} = \tilde{\beta}(\psi)$, где $\tilde{\beta}$ – борелевское отображение из $\hat{H}$ в $\hat{O}_R$, т.е. $\tilde{\beta} \in B(\hat{H}, \hat{O}_R)$. Функцию $\tilde{\beta}(\psi)$, переводящую результаты калибровочных измерений в алгоритм обработки, будем называть калибровочной стратегией. Основной нашей задачей будет построение оптимальной в определенном смысле калибровочной стратегии.

Рассмотрим погрешность редукции, соответствующую данному отображению $\tilde{\beta}$ и результату калибровочных измерений ψ , то есть рассмотрим $q(\tilde{\beta}(\psi), \tilde{a})$. Так как ψ – случайный элемент, рассмотрим среднюю погрешность редукции при фиксированном $\tilde{a}$:

$$q(\tilde{\beta}, \tilde{a}) \stackrel{\text{def}}{=} E_{\tilde{a}} q(\tilde{\beta}(\psi), \tilde{a}) = \int_{\hat{H}} h(\tilde{\beta}(\psi), \tilde{a}) dP_{\tilde{a}}(\psi),$$

где $P_{\tilde{a}}(J)$ – переходная вероятность [12, 13] на $\hat{O}_A \times \sigma_{\hat{H}}$ (распределение вектора $\psi = \Phi \tilde{a} + \mu$ при фиксированном $\tilde{a}$, $\sigma_{\hat{H}}$ – σ -алгебра борелевских подмножеств на $\hat{H}$).

Наконец, если имеется априорная информация Q об исходном преобразователе информации, калибровочная стратегия является Q -оптимальной, если она минимизирует Q -среднее значение погрешности $q(\tilde{\beta}, \tilde{a})$:

$$\tilde{\beta}_Q : \quad q_Q(\tilde{\beta}_Q) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{q_Q(\tilde{\beta}) \mid \tilde{\beta} \in B : \hat{H} \rightarrow \hat{O}_R\}, \quad (7)$$

где $q_Q(\tilde{\beta}) = E_Q q(\tilde{\beta}, \tilde{a})$.

Следующее утверждение сводит решение задачи (7) к решению задачи синтеза (2) измерительно-вычислительной системы при наличии априорной информации о модели измерения, см. [14, 15].

Утверждение. (Байесовский принцип). Пусть существует условная переходная вероятность $Q_{\psi}(\tau)$ на $\hat{H} \times \sigma_{\hat{O}_A}$, т.е. для всех $J \in \sigma_{\hat{H}}$ и $L \in \sigma_{\hat{O}_A}$

$$\int_J Q_{\psi}(L) dP(\psi) = \int_L P_{\tilde{a}}(J) dQ(\tilde{a})$$

и пусть $\tilde{r}_{Q_{\psi}}$ – решение задачи синтеза (2) относительно распределения Q_{ψ} . Тогда решением задачи (7) является отображение $\tilde{\beta}_Q$, определяемое следующим образом:

$$\tilde{\beta}_Q(\psi) = \tilde{r}_{Q_{\psi}}; \quad \psi \in \hat{H}.$$

Здесь P есть полное распределение ψ (усредненное по $\tilde{a}$), т.е. $P(J) = \int_{\hat{O}_A} P_{\tilde{a}}(J) dQ(\tilde{a})$.

Смысл этого утверждения состоит в том, что оптимальным редукционным оператором относительно априорной информации Q и результатов калибровочных измерений ψ является редукционный оператор, оптимальный относительно условного распределения Q_{ψ} , называемого апостериорным.

Будем считать, что $\tilde{a}$ и погрешность μ имеют нормальные распределения: $N(\tilde{a}_0, \tilde{T})$ и $N(0, \Sigma)$ соответственно и независимы. Тогда совместное распределение $\tilde{a}$ и ψ также является нормальным, отсюда согласно [16] получаем, что условное распределение $\tilde{a}$ при фиксированном ψ также будет нормальным $N(\tilde{a}_\psi, \tilde{T}_\psi)$, где $\tilde{T}_\psi$ – апостериорный корреляционный оператор, $\tilde{a}_\psi$ – апостериорные значения функции влияния оператора A на орбитах. Пересчет априорной информации в апостериорную производится по следующим формулам [16]:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_\psi &= (\Phi^* \Sigma^{-1} \Phi + \tilde{T}^{-1})^{-1}, \\ \tilde{a}_\psi &= \tilde{a}_0 + \tilde{T}_\psi \Phi^* \Sigma^{-1} (\psi - \Phi \tilde{a}_0),\end{aligned}$$

где оператор $\Phi : \hat{O}_A \rightarrow \hat{H}$ – определяется формулой (6), а $\Sigma : \hat{H} \rightarrow \hat{H}$ – корреляционный оператор шума μ :

$$\Sigma x = E(\mu, x) \mu \quad \forall x \in \hat{H}$$

с матричными элементами $\Sigma_{i,j} = E\mu_i \mu_j$, где $i, j \in H$.

Таким образом, решение задачи построения инвариантного редукционного оператора на основе результатов измерения известных тестовых сигналов происходит в два этапа: построение условного распределения $\tilde{a}_\psi, \tilde{T}_\psi$ по тестовым измерениям и построение редукционного оператора оптимального относительно условного распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубцов П.В., Филатова С.А. Оптимальная локальная редукция для пространственно-инвариантных измерительных систем. *Математическое моделирование*, 1990, том 2, № 11, стр. 61–66.
2. Filatova S.A., Golubtsov P. V. Invariant Measurement Computer Systems. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 1991, vol. 1, no. 2, pp. 224–235.
3. Filatova S.A., Golubtsov P. V. Invariance and Synthesis of Optimum Image Formation Measurement Computer Systems. In: *Artificial Intelligence, Expert Systems and Symbolic Computing*, Houstis, E.N. and Rice, J.R., Eds. New York: Elsevier, 1992, pp. 243–252.
4. Filatova S.A., Golubtsov P. V. Invariance Considerations in Design of Image Formation Measurement Computer Systems. In: *Automatic Object Recognition III*. Sadjadi, F.A., Ed., Bellingham: SPIE Optical Engineering Press, 1993, pp. 483–494.
5. Голубцов П.В., Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Построение оператора редукции по тестовым измерениям. В кн. *Дискретные системы обработки информации*. Устинов: Удмуртский государственный университет, 1986, стр. 68–71.
6. Голубцов П.В., Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Задача оптимальной редукции в физическом эксперименте. *Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика, Астрономия*, 1986, том 27, № 2, стр. 8–12.
7. Пытьев Ю. П. *Математические методы интерпретации эксперимента*. М.: Высшая школа, 1989.
8. Пытьев Ю. П. Псевдообратный оператор. Свойства и применение. *Математический сборник*, 1982, том 118(160), стр. 19–49.
9. Ленг С. *Алгебра*. М.: Мир, 1968.
10. Кострикин А. И. *Введение в алгебру. Основы алгебры*. М.: Физматлит, 1994.
11. Armstrong M. A. *Groups and Symmetry*. New York: Springer-Verlag, 1988.
12. Барра Ж.-Р. *Основные понятия математической статистики*. М.: Мир, 1974.
13. Неве Ж. *Математические основы теории вероятности*. М.: Мир, 1969.
14. Боровков А. А. *Математическая статистика. Дополнительные главы*. М.: Наука, 1984.

15. Голубцов П.В. Аксиоматическое описание категорий преобразователей информации. *Проблемы передачи информации*, том 35, № 3, стр. 109–127.
16. Ширяев А. Н. *Вероятность*. М.: Наука, 1980.

Статью представил к публикации член редколлегии В.А. Любецкий