Информационные процессы, Том 2, № 1, 2002, стр. 111–119.

Об одном методе аппроксимации надежности монотонных систем

В.Г.Кривулец[*], И.В.Полесский[**]

[*]*Московский физико-технический институт, Москва, Россия*
[**]*Компания "КМ онлайн", Москва, Россия*
Поступила в редколлегию 23.05.2002

Аннотация—Описывается версия факторизационного алгоритма аппроксимации (с заданной точностью) надежности монотонной системы, использующая рекордные на сегодня (наиболее точные и эффективно вычислимые) разностно-развязочные оценки этой надежности, полученные недавно В.Г.Кривульцом и В.П.Полесским.

1. ВВЕДЕНИЕ

Повышать качество функционирования телекоммуникационных систем и сетей можно различными способами. Один из них – повышать их надежность.

Например, как правило, методы проектировании сетей передачи информации, имея на входе различные характеристики компонент сети, в том числе и характеристики их надежности, дают на выходе топологию сети, учитывающую и аспект надежности.

Проблема анализа надежности является частью методов проектирования и состоит в том, что при заданных надежностях компонент системы вычислить надежность самой системы.

Монотонные (или когерентные) системы соответствуют простейшей классической модели надежности. В этой модели система и ее компоненты могут находится только в двух состояниях: работоспособном и состоянии отказа, и при этом компоненты системы отказывают независимо друг от друга. Предполагается также, что эти системы обладают свойством согласованности (когерентности, монотонности), т.е. если система работает, и отказавший элемент восстанавливается, то система продолжает работать.

Например, многие телекоммуникационные системы и сети являются монотонными системами в указанном смысле.

Надежность монотонных систем – классическая область теории надежности, инициированная пионерской работой Бирнбаума, Эзари, Саундерса 1961 г.

Со временем выяснилось, что точное вычисление надежности монотонных систем как общего так и сетевого типа – трудная алгоритмическая проблема. Поэтому большое внимание в теории надежности монотонных систем традиционно уделяется построению оценок и методов аппроксимации надежности.

Потребность в оценках и методах аппроксимации надежности монотонных систем общего вида обусловлена широкой распространенностью систем несетевого типа (не задающихся графом или сетью). Важно и то, что оценки надежности монотонной системы общего вида могут быть применены и для оценки надежности систем сетевого типа, т.к. общий случай включает все частные случаи.

Широко применяется факторизационный метод вычисления точного значения надежности монотонной системы, основанный на теореме декомпозиции. В данной статье на его основе строится некая версия аппроксимации надежности монотонной системы, т.е. метод вычисления ее приближенного значения с заданной точностью. Эта версия использует рекордные на сегодня (наиболее точные и эффективно вычислимые) разностно-развязочные оценки надежности монотонной системы, недавно полученные В.Г.Кривульцом и В.П.Полесским [1,2,3].

Содержание статьи следующее. В разделе 2 вводятся основные обозначения и определения (клаттера и его блокера, минора семейства множеств и бернуллиевского случайного множества). В разделе 3 дается определение случайной монотонной бинарной системы и ее надежности, три представления этой надежности (в виде суммы событий, в виде суммы непересекающихся произведений, минорное представление) и соотношение двойственности. В разделе 4 приводятся существующие на сегодня нетривиальные оценки надежности монотонной системы (развязочные оценки (раздел 4.1) и разностно-развязочные оценки (разделы 4.2 и 4.3)), которые предполагается использовать в факторизационном методе аппроксимации. В разделе 4.4 разностно-развязочные оценки уточняются с помощью идеи факторизации. В разделе 5 описывается известный факторизационный метод вычисления точного значения надежности монотонной системы и на его основе предлагается некий метод аппроксимации надежности монотонной системы. В этой версии используются рекордные на сегодня (наиболее точные и эффективно вычислимые) квазиупаковочные разностно-развязочные оценки надежности монотонной системы, недавно полученные В.Г.Кривульцом и В.П.Полесским [1,2,3].

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для функции $\mathbf{f} : E \to [0,1]$ и подмножества F конечного множества E, положим

$$\mathbf{f}^F = \prod\{f(e) : \ e \in F\}.$$

Для семейства $\mathfrak{F}$ подмножеств множества E, положим

$$\mathfrak{F}^{\triangle} = \{X : X \subseteq E \text{ и существует } F \in \mathfrak{F} \text{ такое, что } F \subseteq X\}.$$

Множество $\cup\{F : F \in \mathfrak{F}\}$ есть *носитель* $\cup\mathfrak{F}$ семейства $\mathfrak{F}$.

Семейство $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ подмножеств E есть *клаттер*, если $i \neq j \Longrightarrow A_i \nsubseteq A_j$. *Двойственный клаттер (блокер)* к клаттеру $\mathfrak{A}$ есть семейство $\mathfrak{B} = \{B_1, \dots, B_l\}$ минимальных (по включению) подмножеств множества E, пересекающихся с каждым A_i.

Пусть $\mathfrak{F}$ – семейство подмножеств множества E. Для непересекающихся $X, Y \subseteq E$ *минор* $\mathfrak{F}\{X, \overline{Y}\}$ есть совокупность подмножеств множества $E - (X+Y)$ таких, что $(F+X) \in \mathfrak{F}$. Любой элемент $e \in E$ порождает два минора:

$$\mathfrak{F}\{e\} = \{F \subseteq E - e : \ (F+e) \in \mathfrak{F}\},$$

$$\mathfrak{F}\{\overline{e}\} = \{F \in \mathfrak{F} : \ e \notin F\},$$

являющихся семействами на меньшем множестве $E - e$.

Пусть $\mathbf{p} : E \to [0,1]$ и $\mathbf{q} = 1 - \mathbf{p}$. Образуем случайное множество F, выбирая каждый элемент e из E независимо с вероятностью $p(e)$.

Для семейства $\mathfrak{F}$ подмножеств E, положим

$$P(\mathfrak{F}; \mathbf{p}) = \sum\{\mathbf{p}^F \mathbf{q}^{\overline{F}} : F \in \mathfrak{F}\},$$

где $\overline{F} = E - F$. Это вероятностное пространство назовем *бернуллиевским случайным множеством (б.с.м.)* и обозначим через $(E; \mathbf{p})$.

3. МОНОТОННАЯ СИСТЕМА И ЕЕ НАДЕЖНОСТЬ

Случайная монотонная бинарная система (с.м.б.с) задается б.с.м $(E; \mathbf{p})$ и клаттером $\mathfrak{A}$ на E. Ее надежность $R(\mathfrak{A}; \mathbf{p})$ есть $P(\mathfrak{A}^{\triangle}; \mathbf{p})$. Ее также называют *перколяционной вероятностью* и вероятностью того, что б.с.м $(E; \mathbf{p})$ обладает *монотонным (монотонно возрастающим) свойством* $\mathfrak{A}^{\triangle}$.

Члены клаттеров $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ называют *минимальными путями* и *минимальными разрезами* монотонной системы, соответственно.

Точное вычисление $R(\mathfrak{A}; \mathbf{p})$ является $\sharp P$-полной проблемой. Часть этой трудности состоит в том, что параметры k и l (количество минимальных путей и минимальных разрезов) в клаттерах сетевого вида могут расти экспоненциально с ростом размера сети. В случае сети клаттеры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ задаются неявно самой сетью, если же монотонная система не является сетевой, она обычно задается списком минимальных путей и/или минимальных разрезов.

Укажем три представления надежности $R(\mathfrak{A}; \mathbf{p})$.

В терминах суммы событий:

$$R(\mathfrak{A}; \mathbf{p}) = P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^{\triangle}; \mathbf{p}).$$

В терминах непересекающихся произведений (см. [1]):

$$R(\mathfrak{A}; \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{p}^{A_j} R(\mathfrak{C}_j^*; \mathbf{q}/\overline{A_j}), \tag{1}$$

где $\mathfrak{C}_j^*$ – клаттер, двойственный клаттеру $\mathfrak{C}_j$ минимальных (по включению) членов семейства

$$\mathfrak{A}_j = \{A_i - A_j : i = 1, \ldots, j-1\}$$

разностей указанных членов клаттера $\mathfrak{A}$, и $\mathbf{q}/\overline{A_j}$ – ограничение функции $\mathbf{q}$ на $\overline{A_j}$; по определению $\mathfrak{A}_0$ – пустое семейство.

В терминах миноров (минор монотонно возрастающего семейства есть монотонно возрастающее семейство):

$$P(\mathfrak{S}; \mathbf{p}) = \sum_{X \subseteq Z} \mathbf{p}^X \mathbf{q}^{Z-X} P(\mathfrak{S}\{X, \overline{Z-X}\}; \mathbf{p}), \tag{2}$$

где $Z \subseteq E$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{\triangle}$.

В частности, для любого элемента $e \in E$

$$P(\mathfrak{S}; \mathbf{p}) = p(e) P(\mathfrak{S}\{e\}; \mathbf{p}) + q(e) P(\mathfrak{S}\{\overline{e}\}; \mathbf{p}). \tag{3}$$

Это рекурентное соотношение называют факторизационным соотношением или расщепляющей декомпозицией. Элемент e в (3), не являющийся несущественным, т.е. принадлежащий хотя бы одному минимальному пути, называют расщепляющим или осевым элементом.

Факторизация (3) была введена в [4, 5], см. также [6].

Простое, но фундаментальное соотношение

$$R(\mathfrak{A}; \mathbf{p}) + R(\mathfrak{B}; \mathbf{q}) = 1, \tag{4}$$

двойственности полезно во многих случаях. Оно позволяет в частности, из односторонней оценки, например, верхней – в терминах $\mathfrak{A}$ и $\mathbf{p}$ – автоматически получать оценку с другой стороны – нижнюю – в терминах блокера $\mathfrak{B}$ и $\mathbf{q}$. Это используется в следующих разделах.

4. ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ МОНОТОННОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Развязочные оценки

Они были предложены В.П.Полесским в 1997 году. (см. [7]). Их наихудший тип – классические оценки Эзари–Прошана [8] (названные В.П.Полесским и В.Г.Кривульцом позднее в [1,2] *развязочно-упаковочными оценками*), известные еще с 1963 г., выглядят следующим образом:

$$\prod_{i=1}^{l}(1-\mathbf{q}^{B_i}) \leq R(\mathfrak{A};\mathbf{p}) \leq 1-\prod_{i=1}^{k}(1-\mathbf{p}^{A_i}). \tag{5}$$

Более точные, чем (5), развязочные оценки привлекают дополнительную информацию (кроме $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$) параметры.

Например, пусть F – подмножество множества E, *антиблокирующее* клаттер $\mathfrak{A}$, т.е.

$$|F \cap A_i| \leq 1,\ i=1,\dots,k,$$

$\mathfrak{A}'$ – подклаттер клаттера $\mathfrak{A}$, чьи члены не пересекаются с F; $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}-\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{A}''(e)$ – подклаттер клаттера $\mathfrak{A}''$, чьи члены пересекаются с F по элементу e; $F_1 = F \cap (\cup\mathfrak{A})$. Тогда

$$R(\mathfrak{A};\mathbf{p}) \leq 1-\prod_{A\in\mathfrak{A}'}(1-\mathbf{p}^{A})\prod_{e\in F_1}\left(1-p(e)\left(1-\prod_{B\in\mathfrak{A}''(e)}(1-\mathbf{p}^{B-e})\right)\right), \tag{6}$$

и, если $\mathfrak{A}$ не есть упаковка (т.е. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ для всех $i,j=1,\dots,k,\ i\neq j$), то правая часть (6) строго меньше правой части (5).

Оценка (6) названа в $[1,2]$ *развязочно-антиблокирующей верхней оценкой*.

Развязочно-антиблокирующая нижняя оценка следует автоматически из (6) и соотношения двойственности (4):

$$\prod_{B\in\mathfrak{B}'}(1-\mathbf{q}^{B})\prod_{e\in C_1}\left(1-q(e)\left(1-\prod_{D\in\mathfrak{B}''(e)}(1-\mathbf{q}^{D-e})\right)\right) \leq R(\mathfrak{A};\mathbf{p}), \tag{7}$$

где C – антиблокирующее блокер $\mathfrak{B}$ множество и обозначения в (7) аналогичны обозначениям в (6).

4.2. Разностно-развязочные оценки

Они следуют из представления (1) и развязочных оценок В.П.Полесского и были предложены (вместе с представлением (1)) В.Г.Кривульцом и В.П.Полесским в 2001 г. в [1].

Разностно-развязочно упаковочная нижняя оценка

$$\sum_{j=1}^{k}\mathbf{p}^{A_j}\prod_{i=1}^{j-1}(1-\mathbf{p}^{A_i-A_j}) \leq R(\mathfrak{A};\mathbf{p}). \tag{8}$$

получается оцениванием снизу каждого члена $R(\mathfrak{C}_j^*;\mathbf{q}/\overline{A_j})$ в сумме справа (1) посредством левой части (5).

Верхняя разностно-развязочно упаковочная оценка

$$R(\mathfrak{A};\mathbf{p}) \leq 1-\sum_{j=1}^{l}\mathbf{q}^{B_j}\prod_{i=1}^{j-1}(1-\mathbf{q}^{B_i-B_j}), \tag{9}$$

следует автоматически из (8) и (4).

Более точная, чем (8), *нижняя разностно-развязочно антиблокирующая оценка*

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{p}^{A_j} \prod_{C \in \mathfrak{A}'_j} (1-\mathbf{p}^C) \prod_{e \in F'_j} \left(1 - p(e)\left(1 - \prod_{D \in \mathfrak{A}''_j(e)} (1-\mathbf{p}^{D-e})\right)\right) \leq R(\mathfrak{A};\mathbf{p}), \tag{10}$$

получается оцениванием снизу слагаемого $R(\mathfrak{C}^*_j; \mathbf{q}/\overline{A_j})$ в (1) посредством левой части (7).

Верхняя разностно-развязочно антиблокирующая оценка

$$R(\mathfrak{A};\mathbf{p}) \leq 1 - \sum_{j=1}^{l} \mathbf{q}^{B_j} \prod_{D \in \mathfrak{B}'_j} (1-\mathbf{q}^D) \prod_{e \in G'_j} \left(1 - q(e)\left(1 - \prod_{D \in \mathfrak{B}''_j(e)} (1-\mathbf{q}^{D-e})\right)\right), \tag{11}$$

автоматически получается из (10) и (4). Обозначения в (10) и (11) имеют тот же самый смысл, что и обозначения в (6),(7).

Так как в разностно-развязочных оценках (8)–(11) участвуют суммы, то можно не суммировать по всем членам клаттеров $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, а оборвать суммы на произвольных $u \leq k$, $v \leq l$. При этом оценки станут более грубыми, однако, эффективно вычислимыми.

В настоящее время, это рекордные – наиболее точные и эффективно вычислимые оценки (см. [1,2]).

4.3. Разностно-развязочные оценки второго порядка

Они предложены в [1]. Верхняя разностно-развязочно упаковочная оценка второго порядка получается применением нижней разностно-развязочно упаковочной оценки (8) к надежности $R(\mathfrak{C}_j; \mathbf{p}/\overline{A_j})$ в формуле

$$R(\mathfrak{A};\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{p}^{A_j}(1 - R(\mathfrak{C}_j; \mathbf{p}/\overline{A}_j)).$$

Имеем

$$R(\mathfrak{A};\mathbf{p}) \leq \sum_{j=1}^{k} \mathbf{p}^{A_j} \left(1 - \sum_{i=2}^{u(j)} \mathbf{p}^{C_i^j} \prod_{s=1}^{i-1} (1-\mathbf{p}^{C_s^j - C_i^j})\right), \tag{12}$$

где $\mathfrak{C}_j = \{C_1^j, \ldots, C_{u(j)}^i\}$, $C_i^j = A_{f(i)} - A_j,\ f: \{1, \ldots, u(j)\} \longrightarrow \{1, \ldots, j-1\}$.

При этом множество $C_s^j - C_i^j$ уже есть разность разностей

$$(A_{f(s)} - A_j) - (A_{f(i)} - A_j) = A_{f(s)} - A_{f(i)} - A_j$$

указанных членов клаттера $\mathfrak{A}$, что объясняет название “оценка второго порядка”.

Из (12) и (4) автоматически следует нижняя разностно-развязочная оценка второго порядка

$$1 - \sum_{j=1}^{l} \mathbf{q}^{B_j} \left(1 - \sum_{i=1}^{v(j)} \mathbf{q}^{E_i^j} \prod_{s=1}^{i-1} (1-\mathbf{q}^{E_s^j - E_i^j})\right) \leq R(\mathfrak{A};\mathbf{p}). \tag{13}$$

где $\mathfrak{E}_j = \{E_1^j, \ldots, E_{v(j)}^j\}$ – клаттер минимальных множеств семейства

$$\mathfrak{B}_j = \{B_i - B_j :\ i = 1, \ldots, j-1\}$$

разностей указанных членов блокера $\mathfrak{B}$. Аналогично

$$E_s^j - E_i^j = B_{g(s)} - B_{g(i)} - B_j$$

(где $g: \{1, \ldots, v(j)\} \longrightarrow \{1, \ldots, j-1\}$) есть также разность второго порядка.

4.4. Уточнение разностно-развязочных оценки посредством факторизации

Существует два основных аспекта теории оценок надежности систем:

1. *аспект эффективности* – вычисление оценок должно требовать меньших усилий, чем вычисление самой надежности;
2. *аспект точности* – оценки должны обеспечивать "достаточно хорошее" приближение.

Эти конфликтующие желания быстрого вычисления и большой точности приводят к необходимости построения все более точных эффективно вычислимых оценок.

Для повышения точности рекордных разностно-развязочных оценок раздела 4.2 может быть использована идея факторизации (3). Дело в том, что семейства $\mathfrak{S}\{e\}$ и $\mathfrak{S}\{\overline{e}\}$ могут оказаться проще, чем исходное семейство $\mathfrak{S}$, особенно, если расщепляющий элемент e будет выбираться специальным образом.

Пусть $L(\mathfrak{S}\{e\}; \mathbf{p})$, $L(\mathfrak{S}\{\overline{e}\}; \mathbf{p})$ и $U(\mathfrak{S}\{e\}; \mathbf{p})$, $U(\mathfrak{S}\{\overline{e}\}; \mathbf{p})$ – нижние и верхние разностно-развязочные оценки надежностей $P(\mathfrak{S}\{e\}; \mathbf{p})$, $P(\mathfrak{S}\{\overline{e}\}; \mathbf{p})$ соответственно. Тогда

$$p(e)L(\mathfrak{S}\{e\}; \mathbf{p}) + q(e)L(\mathfrak{S}\{\overline{e}\}; \mathbf{p}),$$

$$p(e)U(\mathfrak{S}\{e\}; \mathbf{p}) + q(e)U(\mathfrak{S}\{\overline{e}\}; \mathbf{p})$$

являются нижней и верхней оценкой надежности $P(\mathfrak{S}\{e\}; \mathbf{p})$ исходной системы и они могут оказаться точнее, чем разностно-развязочные оценки исходной системы непосредственно. Эффективная вычислимость при этом сохраняется.

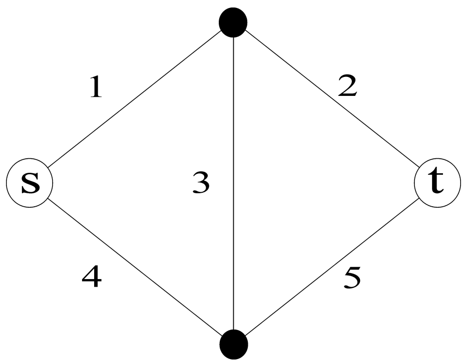

Рис. 1. Мостиковая структура

Например, применение описанного приема к ребру 1 мостиковой структуры, представленной на рис. 1 дает точное значение надежности мостика, в отличие от непосредственного вычисления разностно-развязочно упаковочных оценок, которые не равны точному значению.

Подобного рода оценки вычисляются в ходе рассмотренного в следующим разделе факторизационного метода аппроксимации надежности.

5. ФАКТОРИЗАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ НАДЕЖНОСТИ МОНОТОННЫХ СИСТЕМ

Опишем вначале известный факторизационный метод вычисления точного значения надежности монотонной системы, основанный на представлении (2) надежности в виде линейной комбинации надежности ее миноров.

Соотношение (3) может быть проитерировано. Эти итерации удобно представить изменяющимся бинарным деревом рекурсии T, чей корень есть исходное семейство $\mathfrak{S}$, а вершины есть некие миноры семейства $\mathfrak{S}$. Продолжим процесс итерации до тех пор, пока каждый лист (концевая вершина дерева) итогового дерева T будет либо пустым семейством (лист типа 0), либо семейством, содержащим пустое множество (лист типа 1).

Для каждой вершины $\mathfrak{S}'$ дерева T существует единственный путь в T из его корня в $\mathfrak{S}'$ и он характеризуется некоторой последовательностью $(e_i, \delta_i),\ i = 1, 2, \dots, n(\mathfrak{S}')$, где $e_i \in E,\ \delta_i \in \{1, 0\}$.

Положим $\pi(e_i, \delta_i) = p(e_i)$, если $\delta_i = 1$ и $\pi(e_i, \delta_i) = q(e_i)$ если $\delta_i = 0$ и пусть

$$\pi(\mathfrak{S}'|T) = \prod_{i=1}^{n(\mathfrak{S}')} \pi(e_i, \delta_i).$$

Пусть $LT,\ L_0T,\ L_1T$ обозначает множества всех листьев, листьев типа 0, листьев типа 1, соответственно. Тогда

$$P(\mathfrak{S}; \mathbf{p}) = \sum_{\mathfrak{S}' \in LT} \pi(\mathfrak{S}'|T) P(\mathfrak{S}'; \mathbf{p}) = \sum_{\mathfrak{S}' \in L_1 T} \pi(\mathfrak{S}'|T),$$

так как при $\mathfrak{S}' = \emptyset$ (лист типа 0) $P(\mathfrak{S}'; \mathbf{p}) = 0$, а если $\mathfrak{S}'$ содержит $\emptyset$, то $P(\mathfrak{S}'; \mathbf{p}) = 1$.

Таким образом, выполненная до конца факторизация есть в точности перебор состояний.

Факторизационный алгоритм широко применяется для вычисления различных характеристик надежности информационных систем (см. [9, 10, 11, 12, 13, 14]).

Опишем теперь переборный метод вычисления приближенного значения $R'(\mathfrak{A}; \mathbf{p})$ надежности $R(\mathfrak{A}; \mathbf{p})$ монотонной системы с заданной точностью $\varepsilon > 0$, т.е. метод вычисления числа $R'(\mathfrak{A}; \mathbf{p})$ такого, что

$$|R'(\mathfrak{A}; \mathbf{p}) - R(\mathfrak{A}; \mathbf{p})| \le \varepsilon.$$

Этот метод описан в [15, 16, 17] как метод расчета приближенного значения основных показателей надежности сети (терминальной надежности, вероятности связности и двухполюсной надежности).

Рассмотрим с.м.б.с. $(E; \mathbf{p})$ с монотонно возрастающим семейством $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{\triangle}$ подмножеств множества E. Определим рекурсивное дерево вычислений $T(n)$ на шаге вычисления n. Для $n = 0$ $T(0)$ состоит из единственной вершины $v_0,\ \mathfrak{S}(v_0) = \mathfrak{S},\ \alpha(v_0) = 1$.

Пусть $T(n), n \ge 0$ – корневое дерево (с корнем v_0) с множеством листьев (концевых вершин) $V(n)$. Каждому листу $v \in V(n)$ отвечает монотонно неубывающее семейство $\mathfrak{S}_v$ с ненулевой надежностью $P(\mathfrak{S}_v; \mathbf{p})$, число $0 \le \alpha(v) \le 1$, и при этом

$$P(\mathfrak{S}; \mathbf{p}) = P(n) = \sum_{v \in V(n)} \alpha(v) R(\mathfrak{S}_v; \mathbf{p}).$$

Выбираем лист $u \in V(n)$ и элемент e в носителе $\cup\mathfrak{S}_u$ семейства $\mathfrak{S}_u$. Тогда, в соответствии с (3),

$$P(\mathfrak{S}_u; \mathbf{p}) = p(e) P(\mathfrak{S}_u\{e\}; \mathbf{p}) + q(e) P(\mathfrak{S}_u\{\overline{e}\}; \mathbf{p}),$$

где $\mathfrak{S}_u\{e\},\ \mathfrak{S}_u\{\overline{e}\}$ – миноры, полученные из семейства $\mathfrak{S}_u$, сжатием и удалением элемента e, соответственно.

Если $P(\mathfrak{S}_u\{\overline{e}\}; \mathbf{p}) \ne 0$, то дерево $T(n+1)$ получается из дерева $T(n)$ присоединением к вершине u двух новых ребер с новыми листьями $u(e), u(\overline{e})$. При этом $\mathfrak{S}_{u(e)} = \mathfrak{S}_u\{e\}$ и $\mathfrak{S}_{u(\overline{e})} = \mathfrak{S}_u\{\overline{e}\},\ \alpha(u(e)) = p(e)\alpha(u),\ \alpha(u(\overline{e})) = q(e)\alpha(u)$. Если $P(\mathfrak{S}_u\{\overline{e}\}; \mathbf{p}) = 0$, то к вершине u в дереве $T(n+1)$ присоединяем лишь одно новое ребро с новой вершиной $u(e)$.

Легко видеть, что $T(n)$ – дерево; n – число "расщеплений", и число вершин в $T(n)$ не более чем $2n + 1$.

Пусть теперь для каждого листа v дерева $T(n)$ для надежности $P(\mathfrak{S}_v;\mathbf{p})$ вычислены двусторонние нижние и верхние оценки L_v, U_v, т.е.

$$L_v \leq P(\mathfrak{S}_v;\mathbf{p}) \leq U_v.$$

Положим

$$\varepsilon = U_v - L_v,\ P'_v = 1/2(L_v + U_v),\ P'(n) = \sum_{v\in V(n)} \alpha(v)P'_v,\ \varepsilon(n) = \sum_{v\in V_n} \alpha(u)\varepsilon_v.$$

Легко видеть, что

$$|P(n) - P'(n)| \leq \varepsilon(n),$$

и поэтому, если $\varepsilon(n) \leq \varepsilon$, то

$$|P(\mathfrak{S};\mathbf{p}) - P'(n)| \leq \varepsilon(n).$$

Организуем теперь (индуктивное по n) вычисление величины $P'(n)$, и остановим процесс вычисление в момент n^*, когда

$$\varepsilon(n^* - 1) > \varepsilon,\ \varepsilon(n^*) \leq \varepsilon.$$

Момент n^* существует, так как если процесс факторизационного вычисления продолжать до естественного конца, то в итоге получится (огромное) дерево, каждой концевой вершине v которого отвечает семейство $\mathfrak{S}_v = \{\emptyset\}$, для которого $P(\mathfrak{S}_v;\mathbf{p}) = 1$ и мы получим некоторое минорное представление надежности монотонной системы.

Этот метод расчета удобен для программной реализации и, в то же время, позволяет использовать наилучшие двухсторонние оценки надежности для уменьшения перебора, описанные в разделе 4.

Недостатки и достоинства такого метода вычисления могут быть выявлены лишь экспериментально, при этом уменьшение времени вычисления принципиально достигается за счет эффективного вычисления нижних и верхних оценок L_v, U_v.

Разновидности предлагаемого метода различаются процессом выбора элементов для расщепления, и используемыми оценками.

Впервые похожий метод был предложен в 1984 г. С.Б.Каулем и С.М.Майнагашевым в ВЦ СО АН СССР для построения программы приближенного вычисления двухполюсной надежности, и показал свое высокое качество (см. [18]). В [19] описаны (разработанные ВЦ СО АН СССР) два программных (на языках ПЛ-1 и Фортран-4) модуля вычисления приближенного значения (с заданной погрешностью) вероятности связности и двухполюсной надежности. Использованный в них факторизационный алгоритм для двухполюсной надежности использует некоторые упаковочные оценки. Факторизационный алгоритм для вероятности связности использует некоторую упаковочную нижнюю оценку и верхнюю оценку из [20] через вероятность связности однородного случайного полного графа.

Подобный факторизационный метод вычисления приближенного значения вероятности связности был запрограммирован в начале 90-х годов в ИПИ РАН, и также показал высокое качество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривулец В.Г., Полесский В.П. Об оценках надежности монотонной структуры. *Проблемы передачи информации*, 2001, том 37, № 4, стр. 112–129.
2. Кривулец В.Г., Полесский В.П. Квазиупаковочные оценки характеристик надежности сетей. *Информационные Процессы*, 2001, том 1, № 2, стр. 126–146.
3. Polesskii V.P., Krivoulets V.G. Efficiently computable bounds on stochastic monotone binary system reliability. *Proceedings of 3d Conference on Mathematical Methods in Reliability.* Trondheim, Norway, 2002 (to appear).
4. Moskowitz F. The analysis of redundancy networks. *IEEE Trans. Commun. Electron.* 1958, vol. 39, pp. 627–632.

5. Mine H. Reliability of physical systems. *IRE Trans. Circuit Theory*, 1959, vol. CT-6, pp. 138–151.

6. Moore E.F., Shannon C.E. Reliable circuits using less reliable relays, *J.Franklin Inst.*, 1956, pp. 262, no. 3, pp. 191–208; no. 4, pp. 281–297.

7. Полесский В.П. Развязывания клаттеров, корреляционные неравенства и границы комбинаторной надежности. *Проблемы передачи информации*, 1997, том 33, № 3, стр. 50–70.

8. Esary J., Proshan F., Coherent Structures of Non - Identical Components. *Technometrics*, 1963, vol.5, no. 2, pp. 191–309.

9. Huseby A.B. On reguality, amenability and optimal factoring strategies for reliability computations. Preprint, Univ. of Oslo.

10. Resende L.I.P. A program for reliability evaluation of undirected graph. *IEEE Transaction on Reliability*, 1986, vol. R 35, pp. 24–29.

11. Resende L.I.P. Implementation of a factoring algorithm for reliability evaluation of inderected networks. *Annals of Discrete Mathmatics*, 1988, vol. 33, pp. 261–273.

12. Satyanarayana A., Chang M.K. Network Reliability and the Factoring Theorem. *Networks*, 1983, no. 13, pp. 107–20.

13. Wood R.K. A factoring algorithm using polygon-to-chain reductions for computing k-terminal network reliability. *Networks*, 1985, vol. 15, pp. 173–190.

14. Wood R.K. Triconnected decomposition for computing k-terminal network reliability. *Networks*, 1989, vol. 19, pp. 203–220.

15. Полесский В.П. Схема вычисления приближенного значения характеристик связности в вероятностной модели устойчивости системы связи *Техника средств связи*, серия “Системы связи”. 1986. Вып. 6, стр. 34–41.

16. Полесский В.П. Нижние оценки вероятности полного ранга в случайном матроиде. *Проблемы передачи информации*, 1993, том 29, № 4, стр. 58–66.

17. Vishnevsky V., Belotserkovsky D, Polesskii V. Employment of graph characteristics for large-scale data network topological optimization. In: Proceedings of International Workshop ’Distributed Computer Communication Networks. Theory and Application. June 16-19, 1998, Moscow, 1–19.

18. Кауль С.Б. О вычислении надежности систем со структруным резервированием. Сб. “Системное моделирование–10”, Новосибирск, 1984, стр. 3–16.

19. Нечепуренко М.И., Попков В.К., Майнагашев С.М., и др. *Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях*. Новосибирск, Наука (сибирское отделение), 1990.

20. Ломоносов М.В., Полесский В.П. О максимуме вероятности связности. *Проблемы Передачи Информации*, 1972, том 8, № 4, стр. 68–73.

Статью представил к публикации член редколлегии Н.А. Кузнецов