Информационные процессы, Том 3, № 2, 2003, стр. 97–108.
© *2003 Чаплыгин.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $G/BMSP/1/r$[1]

В.В. Чаплыгин

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,
107005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5,
e-mail: VasilyChaplygin@mail.ru
Поступила в редколлегию 10.04.2003

Аннотация—Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, марковским процессом обслуживания с групповым обслуживанием заявок и накопителем конечной или бесконечной емкости. Для этой системы с помощью метода вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных характеристик обслуживания.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) $G/BMSP/1/r$ $(r \leq \infty)$ с накопителем емкости r.

Входящий в систему поток является рекуррентным, причем время между соседними поступлениями заявок имеет произвольную функцию распределения $A(x)$. Будем предполагать, что среднее время $a = \int\limits_0^\infty x\,dA(x)$ между поступлениями заявок конечно и, кроме того, там, где речь пойдет о стационарном распределении по времени, будем считать, что время между поступлениями заявок не может принимать только значения jt, где t — положительное число, а $j = 0, 1, \ldots$.

Марковский процесс обслуживания с групповым обслуживанием заявок определяется матрицами Λ_m из элементов $(\Lambda_m)_{ij}$, $i, j = \overline{1, l}$. Далее положим $\Lambda_m^* = \sum\limits_{k=m}^\infty \Lambda_k$, $m = 0, 1, \ldots$. Будем предполагать, что матрица $\Lambda^* = \Lambda_0^*$ неразложима. Обслуживание заявок происходит следующим образом. Имеется марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом l состояний (фаз обслуживания). Пусть в некоторый момент в системе на обслуживании находятся $m \geq 1$ заявок и фаза обслуживания равна i, $i = \overline{1, l}$. Тогда за "малое" время Δ с вероятностью $(\Lambda_0)_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j, $j = \overline{1, l}$, и все заявки продолжат обслуживание. Кроме того, за это же время с вероятностью $(\Lambda_k)_{ij}\Delta + o(\Delta)$, $1 \leq k < m$, фаза изменится на j и обслужится ровно k заявок и с вероятностью $(\Lambda_m^*)_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на j и обслужатся все находящиеся в системе заявки.

Будем считать также, что на свободном периоде фаза обслуживания не изменяется. Вектор стационарных вероятностей марковского процесса обслуживания заявок (т.е. марковского процесса с инфинитиземальной матрицей Λ^*) будем обозначать через $\overrightarrow{\pi}$.

Заявки обслуживаются в порядке поступления (дисциплина FCFS). Заявка, поступающая в систему, в которой уже находится $r + 1$ заявок (одна на приборе и r в накопителе), теряется.

Поскольку далее рассматривается только стационарный режим функционирования системы, в случае бесконечного накопителя $(r = \infty)$ будем предполагать, что выполнено условие $\rho < 1$, где $\rho = (\mu a)^{-1}$ — загрузка системы, а $\mu = \sum\limits_{k=1}^\infty k\vec{\pi}\Lambda_k\vec{1}$ — стационарная интенсивность обслуживания

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант No 02-07-90147).

заявок. Это условие является необходимым и достаточным для существования стационарного режима в случае бесконечного накопителя.

Для $G/BMSP/1/r$ ниже получены стационарные распределения числа заявок в системе по вложенной цепи Маркова и по времени, стационарное распределение времени пребывания заявки в системе.

Система $G/BMSP/1/r$ является обобщением системы $G/MSP/1/r$ $(r \leq \infty)$. В [4] исследование системы $G/MSP/1/r$ велось методом введения дополнительной переменной, и для конечного числа мест ожидания, т.е. для $r < \infty$, было получено стационарное распределение длины очереди. В [2] для $G/MSP/1/r$ с помощью построения вложенной цепи Маркова удалось найти стационарные распределения числа заявок в системе по моментам изменения состояний вложенной цепи Маркова и по времени и времен ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

Процедура вычисления экспоненциальных моментов подробно описана в [1] для системы $MAP/G/1/r$ ([1], [3]), которая является двойственной к системе $G/MSP/1/r$.

2. КОНЕЧНЫЙ НАКОПИТЕЛЬ

Рассмотрим последовательные моменты $\tau_n,\ n \geq 0$, поступления заявок в систему.

Пусть $\xi(t)$ — фаза обслуживания заявок в момент времени t, а $\nu(t)$ — число заявок в системе в этот момент. Определим случайные величины $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$ и $\nu_n = \nu(\tau_n)$, которые задают соответственно фазу обслуживания и число заявок в системе непосредственно после момента поступления n-й заявки. Кроме того, положим $\zeta_n = (\xi_n, \nu_n)$. Тогда последовательность $\{\zeta_n,\ \ n \geq 0\}$ образует однородную цепь Маркова, которую будем называть вложенной цепью Маркова.

Очевидно, что множество состояний $\mathcal{X}$ вложенной цепи Маркова

$$\mathcal{X} = \{(i,k),\ \ i = \overline{1,l},\ \ k = \overline{1,R}\},$$

где индексы i и k указывают соответственно фазу обслуживания и число заявок в системе непосредственно после момента поступления заявок.

Выпишем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $\{\zeta_n,\ \ n \geq 0\}$. Для этого сначала определим следующие матрицы:

$F_k(x)$ — матрица, элемент $(F_k(x))_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время x обслужится ровно k заявок и процесс обслуживания перейдет на фазу j, при условии, что в начальный момент в системе (вместе с заявками на приборе) было больше k заявок, процесс обслуживания находился на фазе i и за время x не закончится обслуживание заявки на приборе.

A_k — матрица, элемент $(A_k)_{ij}$ которой представляет собой вероятность того, что за время между поступлениями заявок обслужится ровно k заявок и процесс обслуживания перейдет на фазу j, при условии, что в начальный момент в системе было больше k заявок и процесс обслуживания находился на фазе i;

$F_k^*(x)$ и A_k^* — матрицы, аналогичные матрицам $F_k(x)$ и A_k, но при условии, что в начальный момент в системе было ровно k заявок.

Функции $F_k(x)$ и $F_k^*(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$F_0(x) = e^{\Lambda_0 x}, \tag{1}$$

$$F_k(x) = \int\limits_0^\infty \sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(y)\Lambda_m F_0(x-y)\,dy,\ \ k \geq 1, \tag{2}$$

$$F_k^*(x) = \int\limits_0^x \sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(y)\Lambda_m^* dy, \quad k \geq 1, \tag{3}$$

а матрицы A_k и A_k^* определяются формулами

$$A_k = \int\limits_0^\infty F_k(x)\, dA(x), \quad k \geq 0,$$

$$A_k^* = \int\limits_0^\infty F_k^*(x)\, dA(x), \quad k \geq 0.$$

Вернемся к вложенной цепи Маркова. Из состояния с $i, \ i = \overline{1,R}$, заявками вложенная цепь Маркова может перейти только в одно из состояний с $j, \ j = \overline{1, \min(i+1, R)}$, заявками. При этом переход из состояний с $i, \ i = \overline{1,r}$, заявками в состояние с $j, \ j = \overline{2, i+1}$, заявками осуществляется тогда, когда за время между поступлениями заявок обслужится ровно $(j-i-1)$ заявок, а в состояние с одной заявкой — когда обслужится все i находящихся в системе заявок. Аналогично определяются переходы из состояния с R заявками, за исключением перехода в состояние также с R заявками, который происходит не только тогда, когда будет обслужена одна заявка, но и когда не будет обслужено ни одной заявки и новая поступающая в систему заявка будет потеряна.

Таким образом, матрица P переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, представленная в блочной форме $P = (P_{km})_{k,m=\overline{1,R}}$, имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} A_1^* & A_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2^* & A_1 & A_0 & \dots & 0 & 0 \\ A_3^* & A_2 & A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_r^* & A_{r-1} & A_{r-2} & \dots & A_1 & A_0 \\ A_R^* & A_r & A_{r-1} & \dots & A_2 & A_1 + A_0 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вложенная цепь Маркова является неприводимой и непериодической. Обозначим через $p_{ik}^*, \ i = \overline{1,l}, \ k = \overline{1,R}$, стационарную по вложенной цепи Маркова вероятность того, что в системе имеется k заявок и фаза обслуживания равна i, и положим $\vec{p}_k^{\,*} = (p_{1k}^*, \cdots, p_{lk}^*)^T$, $\vec{p}^{\,*} = (\vec{p}_1^{\,*T}, \cdots, \vec{p}_R^{\,*T})^T$. Тогда для $\vec{p}^{\,*}$ справедлива система уравнений равновесия (СУР)

$$\vec{p}^{\,*T} = \vec{p}^{\,*T} P, \tag{4}$$

или в координатной форме

$$\vec{p}_1^{\,*T} = \sum_{m=1}^{R} \vec{p}_m^{\,*T} A_m^*,$$

$$\vec{p}_k^{\,*T} = \sum_{m=k-1}^{R} \vec{p}_m^{\,*T} A_{m-k+1}, \quad k = \overline{2,r}, \tag{5}$$

$$\vec{p}_R^{\,*T} = \vec{p}_r^{\,*T} A_0 + \vec{p}_R^{\,*T}(A_0 + A_1)$$

с условием нормировки

$$p^*_{\cdot,\cdot} = 1.$$

Здесь символ “ $\cdot$ ” означает суммирование по всем значениям соответствующего дискретного аргумента.

СУР (5) имеет единственное, с условием нормировки, решение, которое можно получить методом, приведенным в [2].

Зная стационарное распределение вложенной цепи Маркова, нетрудно определить другие стационарные характеристики обслуживания в рассматриваемой системе.

Вычислим сначала векторы $\vec{p}_k^{\,-} = (p_{1k}^-, \dots, p_{lk}^-)^T,\ \ k = \overline{1, R}$, где p_{ik}^- — стационарная вероятность того, что поступающая в систему заявка застанет в ней k других заявок и марковский процесс обслуживания на фазе i. Для этого заметим, что поступающая заявка застает в ней $k,\ \ k = \overline{0, r-1}$ других заявок, если после поступления в системе будет $(k+1)$ заявок. Учитывая, что в момент поступления заявки фаза обслуживания не изменяется, имеем

$$\vec{p}_k^{\,-} = \vec{p}^{\,*}_{k+1},\ \ k = \overline{0, r-1}.$$

Нетрудно видеть, что для $k = r, R$

$$\vec{p}_k^{\,-T} = \sum_{j=k}^{R} \vec{p}_j^{\,*T} A_{j-k},\ \ k = r, R.$$

В частности, стационарная вероятность π потери заявки определяется формулой

$$\pi = \vec{p}_R^{\,-T}\vec{1} = \vec{p}_R^{\,*T} A_0 \vec{1},$$

где $\vec{1}$ — вектор-столбец из единиц.

Для нахождения стационарных вероятностей состояний по времени введем матрицы T_k и T_k^*, элементы $(T_k)_{ij}$ и $(T_k^*)_{ij},\ i, j = \overline{1, l}$, которых представляют собой среднее время проведенное на интервале между соседними моментами поступления заявок системой $G/BMSP/1/m$ (с накопителем емкости m) в состоянии $(j, M-k)$ при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось M заявок и фаза обслуживания была i. Здесь $M = m+1$. При этом в первом случае предполагается, что $M > k$, а во втором — $M = k$. Матрицы T_k и T_k^* определяются соотношениями

$$T_k = \int\limits_0^\infty (1 - A(x)) F_k(x)\, dx,$$

$$T_k^* = \int\limits_0^\infty (1 - A(x)) F_k^*(x)\, dx,$$

Используя результаты теории полумарковских процессов. получаем для векторов $\vec{p}_k,\ \ k = \overline{0, R}$, стационарных вероятностей состояний по времени формулы

$$\vec{p}_0^{\,T} = \frac{1}{T}\sum_{m=1}^{R} \vec{p}_m^{\,*T} T_m^*, \tag{6}$$

$$\vec{p}_k^{\,T} = \frac{1}{T} \sum_{m=k}^{R} \vec{p}_m^{\,*T} T_{m-k}, \quad k = \overline{1, R}, \tag{7}$$

где T — среднее время между изменениями состояний вложенной цепи Маркова, которое для рассматриваемой системы совпадает со средним временем a между поступлениями заявок, т.е. $T = a$.

Приведем одно соотношение между векторами $\vec{p}_k$ и $\vec{\pi}$, которое пригодится в дальнейшем. Для этого прежде всего заметим, что матричные функции $F_k(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$F_k'(x) = F_k(x)\Lambda_0 + \sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(x)\Lambda_m, \quad k \geq 0$$

Интегрируя по частям, из формул (1)–(3) получаем

$$A_0 = -(1 - A(x))F_0(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1 - A(x))F_0(x)\, dx\Lambda_0 = I + T_0\Lambda_0, \tag{8}$$

$$A_k = -(1 - A(x))F_k(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1 - A(x)) \left(F_k(x)\Lambda_0 + \sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(x)\Lambda_m \right) dx$$

$$= T_k\Lambda_0 + \sum_{m=1}^{k} T_{k-m}\Lambda_m, \quad k \geq 1, \tag{9}$$

$$A_k^* = -(1 - A(x)) \int\limits_0^x \left(\sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(y)\Lambda_m^* \right) dy \Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty (1 - A(x)) \left(\sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(x)\Lambda_m^* \right) dx$$

$$= \sum_{m=1}^{k} T_{k-m}\Lambda_m^*, \quad k \geq 1. \tag{10}$$

Суммируя уравнения СУР (5) по k от 1 до R, которая в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}
\vec{p}_1^{\,*T} = \vec{p}_1^{\,*T} A_1^* + \vec{p}_2^{\,*T} A_2^* + \vec{p}_3^{\,*T} A_3^* + \cdots + \vec{p}_{r-1}^{\,*T} A_{r-1}^* + \vec{p}_r^{\,*T} A_r^* + \vec{p}_R^{\,*T} A_R^*, \\
\vec{p}_2^{\,*T} = \vec{p}_1^{\,*T} A_0 + \vec{p}_2^{\,*T} A_1 + \vec{p}_3^{\,*T} A_2 + \cdots + \vec{p}_{r-1}^{\,*T} A_{r-2} + \vec{p}_r^{\,*T} A_{r-1} + \vec{p}_R^{\,*T} A_r, \\
\vec{p}_3^{\,*T} = \vec{p}_2^{\,*T} A_0 + \vec{p}_3^{\,*T} A_1 + \cdots + \vec{p}_{r-1}^{\,*T} A_{r-3} + \vec{p}_r^{\,*T} A_{r-2} + \vec{p}_R^{\,*T} A_{r-1}, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \cdots \quad \cdots \cdots \\
\vec{p}_r^{\,*T} = \vec{p}_{r-1}^{\,*T} A_0 + \vec{p}_r^{\,*T} A_1 + \vec{p}_R^{\,*T} A_2, \\
\vec{p}_R^{\,*T} = \vec{p}_r^{\,*T} A_0 + \vec{p}_R^{\,*T} (A_0 + A_1),
\end{cases}$$

получаем

$$\sum_{m=1}^{R} \vec{p}_m^{\,*T} = \sum_{m=1}^{R} \vec{p}_m^{\,*T} + \vec{p}_1^{\,*T} \left(T_0\Lambda_0 + T_0\Lambda_1^* \right) + \vec{p}_2^{\,*T} \left([T_0\Lambda_0 + T_0\Lambda_1] + [T_0\Lambda_2^* + T_1\Lambda_0 + T_1\Lambda_1^*] \right)$$

$$+\vec{p}_3^{\,*T} ([T_0\Lambda_0 + T_0\Lambda_1 + T_0\Lambda_2 + T_0\Lambda_3^*] + [T_1\Lambda_0 + T_1\Lambda_1 + T_1\Lambda_2^*]$$

$$+[T_2\Lambda_0 + T_2\Lambda_1^*]) + \cdots + \vec{p}_R^{\,*T}\left(\sum_{m=0}^{r} T_m\right)\Lambda^* = \sum_{m=1}^{R}\vec{p}_m^{\,*T} + \sum_{k=1}^{R}\sum_{m=k}^{R}\vec{p}_m^{\,*T}T_{m-k}\Lambda^*,$$

или, воспользовавшись (7),

$$\sum_{m=1}^{R}\vec{p}_m^{\,*T} = \sum_{m=1}^{R}\vec{p}_m^{\,*T} + T\sum_{k=1}^{R}\vec{p}_k^{\,T}\Lambda^*.$$

Из этого соотношения имеем

$$\sum_{k=1}^{R}\vec{p}_k^{\,T}\Lambda^* = \vec{0}^{\,T}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{R}\vec{p}_k = c\vec{\pi}, \tag{11}$$

где c — нормировочная постоянная, которая может быть записана в виде

$$c = 1 - p_0.$$

Здесь через $p_k = p_{\cdot,k}$, $k = \overline{0,R}$, обозначена стационарная (по времени) вероятность наличия в системе k заявок.

Полученный результат имеет прозрачный смысл. Он показывает, что условная стационарная вероятность (по времени) того, что марковский процесс обслуживания находится на фазе i, при условии, что в системе имеются заявки, совпадает с просто стационарной вероятностью марковскому процессу обслуживания находиться на той же фазе. Однако отметим, что, в отличие от систем с марковским входящим потоком, речь идет об условной вероятности при условии наличия заявок. Это становится очевидным, если еще раз вспомнить, что на свободном периоде фаза обслуживания не изменяется.

Выпишем некоторые характеристики, связанные с временем пребывания заявки в системе. Для этого обозначим через $V_k(x)$, $k \geq 1$, матрицу, элементом $(V_k(x))_{ij}$ которой является вероятность того, что за время x будет обслужено не менее k заявок и в момент окончания обслуживания k-й заявки процесс обслуживания перейдет на фазу j, при условии, что в начальный момент фаза обслуживания была i и системе находилось не менее k заявок, а через $\Phi_k(s)$ — ее преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС). Обозначим также через $f_k(s)$, $k \geq 0$, ПЛС матрицы $F_k(s)$, которая введена ранее.

Поскольку вероятность того, что обслуживание группы из m, $m < k$, заявок окончится на временном интервале $[x, x+dx)$, при условии, что до этого момента уже обслужилось ровно $(k-m)$ заявок, определяется матричной формулой $F_{k-m}\Lambda_m^* dx$, а за время x могло обслужиться от 1 до $(k-1)$ заявок, имеем

$$\Phi_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\sum_{m=1}^{k}F_{k-m}(x)\Lambda_m^* dx = \sum_{m=1}^{k}\int_0^\infty e^{-sx}F_{k-m}(x)\Lambda_m^* dx$$

$$= \sum_{m=1}^{k}\left(\int_0^\infty e^{-sx}F_{k-m}(x)\,dx\right)\Lambda_m^* = \sum_{m=1}^{k} f_{k-m}(s)\Lambda_m^*.$$

Заметим также, что при $k \geq 1$

$$f_k(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} F_k(x)\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-sx} \int\limits_0^x \sum_{m=1}^k F_{k-m}(x-y)\Lambda_m F_0(y)\,dy\,dx$$

$$= \sum_{m=1}^k \int\limits_0^\infty e^{-sx} \int\limits_0^x F_{k-m}(x-y)\Lambda_m F_0(y)\,dy\,dx = \sum_{m=1}^k \int\limits_0^\infty \int\limits_0^x e^{-sx} F_{k-m}(x-y)\Lambda_m F_0(y)\,dy\,dx$$

$$= \sum_{m=1}^k \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-s(u+v)} F_{k-m}(u)\Lambda_m F_0(v)\,du\,dv = \sum_{m=1}^k \int\limits_0^\infty e^{-su} F_{k-m}(u)\,du \Lambda_m \int\limits_0^\infty e^{-sv} F_0(v)\,dv$$

$$= \sum_{m=1}^k f_{k-m}(s)\Lambda_m f_0(s)$$

и при $k = 0$

$$f_0(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} F_0(x)\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-sx} e^{\Lambda_0 x} dx = \int\limits_0^\infty e^{(-sI+\Lambda_0)x} dx = (sI - \Lambda_0)^{-1}.$$

Очевидно, что при $k \geq 1$

$$f_k'(s) = \left(\sum_{m=1}^k f_{k-m}(s)\Lambda_m f_0(s)\right)' = \sum_{m=1}^k \left(f_{k-m}(s)\Lambda_m f_0(s)\right)'$$

$$= \sum_{m=1}^k (f_{k-m}'(s)\Lambda_m f_0(s) + f_{k-m}(s)\Lambda_m f_0'(s)).$$

Но $f_0(0) = -\Lambda_0$ и $f_0'(s) = ((sI - \Lambda_0)^{-1})' = -((sI - \Lambda_0)^{-1})^2$, откуда $f_0'(0) = -(\Lambda_0^{-1})^2$.

Подставляя значения для $f_0(0)$ и $f_0'(0)$ в последнюю формулу, получаем выражение

$$f_k'(0) = \sum_{m=1}^k (f_{k-m}'(0)\Lambda_m f_0(0) + f_{k-m}(0)\Lambda_m f_0'(0)) = -\sum_{m=1}^k (f_{k-m}'(0)\Lambda_m + f_{k-m}(0)\Lambda_m \Lambda_0)\Lambda_0,$$

из которого рекуррентно можно найти все $f_k'(0), k \geq 1$.

Отсюда уже нетрудно получить ПЛС $\varphi(s)$ стационарного распределения $V(x)$ времени пребывания в системе произвольной принятой к обслуживанию заявки, которое имеет вид

$$\varphi(s) = \frac{1}{1-\pi} \sum_{k=0}^r \vec{p}_k^{\,-T} \Phi_{k+1}(s)\vec{1}.$$

В частности, дифференцируя эти формулу в точке $s = 0$, получаем для среднего времени v пребывания в системе произвольной принятой к обслуживанию заявки для стационарного режима функционирования системы выражения

$$v = \frac{1}{1-\pi} \sum_{k=1}^r \vec{p}_k^{\,-T} \Phi_{k+1}'(0)\vec{1} = \frac{1}{1-\pi} \sum_{k=1}^r \vec{p}_k^{\,-T} \sum_{m=0}^k f_{(k+1)-m}'(0)\Lambda_m^* \vec{1}.$$

Для численных расчетов удобно воспользоваться формулой

$$V_k(x)\vec{1} = \vec{1} - \sum_{i=0}^{k-1} F_i(x)\vec{1}, \ \ k \geq 1,$$

из которой получаем следующие выражения для $V(x)$:

$$V(x) = \frac{1}{1-\pi}\sum_{k=0}^{r} \vec{p}_k^{\,-T} V_{k+1}(x)\vec{1} = \frac{1}{1-\pi}\sum_{k=0}^{r} \vec{p}_k^{\,-T}\left(\vec{1} - \sum_{i=0}^{k} F_i(x)\vec{1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{1-\pi}\sum_{i=0}^{r}\left(\sum_{k=i}^{r} \vec{p}_k^{\,-T}\right) F_i(x)\vec{1}.$$

3. БЕСКОНЕЧНЫЙ НАКОПИТЕЛЬ

Обратимся теперь к системе с бесконечным накопителем ($r = \infty$).

Рассмотрим, как и в случае конечного накопителя, вложенную цепь Маркова, множество состояний которой

$$\mathcal{X} = \{(i,k), \ \ i = \overline{1,l}, \ \ k \geq 1\}$$

будет счетным.

Вводя, как и прежде, векторы $\vec{p}_k^{\,*}$, $k \geq 1$, и $\vec{p}^{\,*} = \left(\vec{p}_1^{\,*T}, \vec{p}_2^{\,*T}, \ldots\right)^T$, стационарных вероятностей состояний вложенной цепи Маркова, получаем для $\vec{p}^{\,*}$ СУР, в которой матрица P переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} A_1^* & A_0 & 0 & 0 & \ldots \\ A_2^* & A_1 & A_0 & 0 & \ldots \\ A_3^* & A_2 & A_1 & A_0 & \ldots \\ A_4^* & A_3 & A_2 & A_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Приведем также развернутую запись СУР (4):

$$\vec{p}_1^{\,*T} = \sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_m^{\,*T} A_m^*, \tag{12}$$

$$\vec{p}_k^{\,*T} = \sum_{m=k-1}^{\infty} \vec{p}_m^{\,*T} A_{m-k+1}, \ \ k \geq 2. \tag{13}$$

Прежде, чем переходить к решению СУР (12), (13), введем векторы $\vec{p}_k$, $k \geq 0$, стационарных вероятностей состояний по времени и выведем некоторые полезные соотношения.

$$\vec{p}_0^{\,T} = \frac{1}{T}\sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_k^{\,*T} T_m^*,$$

$$\vec{p}_k^{\,T} = \frac{1}{T}\sum_{m=k}^{\infty} \vec{p}_k^{\,*T} T_{m-k}^*, \ \ k \geq 1,$$

являющиеся полным аналогом формул (6) и (7).

Для векторов $\vec{p}_k$ имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vec{p}_k = (1-p_0)\vec{\pi},$$

вывод которого с учетом приведенного выше доказательства формулы (11) также не вызывает затруднений.

Теперь мы можем приступить к решению СУР (12), (13), которое будем искать в виде

$$\vec{p}_k^{\,*T} = \vec{p}_1^{\,T} G^{k-1}, \ \ k \geq 1, \tag{14}$$

где G — решение уравнения

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} G^k A_k = \tilde{A}(G). \tag{15}$$

Лемма. *Уравнение (15) при $\rho < 0$ имеет единственное решение в классе матриц, все собственные значения которых по модулю меньше единицы. Это решение является матрицей, все элементы которой положительны, и итерационная процедура $G^{(n)} = \tilde{A}(G^{(n-1)})$ при $n \to \infty$ сходится к нему, если в качестве начальной итерации $G^{(0)}$ взять любую матрицу с собственными значениями, по модулю меньшими единицы.*

Доказательство этой леммы приведено в [5].

При численных расчетах в качестве $G^{(0)}$ удобно выбрать нулевую матрицу, что гарантирует монотонную сходимость последовательности $G^{(n)}$ к G.

При любом $\vec{p}_1^{\,*}$ последовательность векторов $\vec{p}_k^{\,*}$, задаваемых формулой (14), где G — решение уравнения (15), удовлетворяет всем уравнениям (13) и, кроме того, поскольку все собственные значения матрицы G по модулю меньше единицы,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{l} |p_{ik}^*|\right) < \infty.$$

Оставшийся неизвестным вектор $\vec{p}_1^{\,*}$ найдем из уравнения (12). Подставим в уравнение (15) вместо A_k их выражения по формулам (8), (9):

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} G^k A_k = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G^k A_k = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G^k \left(\sum_{m=1}^{k} T_{k-m}\Lambda_m + T_k\Lambda_0\right)$$

$$= I + T_0\Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G^k \left(\sum_{m=1}^{k} T_{k-m}\Lambda_m + T_k\Lambda_0\right)$$

$$= I + \sum_{k=1}^{\infty} G^k \sum_{m=1}^{k} T_{k-m}\Lambda_m + \left(T_0\Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G^k T_k \Lambda_0\right).$$

Вводя обозначение

$$U \equiv \sum_{k=0}^{\infty} G^k T_k,$$

приходим к следующему результату :

$$G = I + U\Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G^k \sum_{m=1}^{k} T_{k-m}\Lambda_m = I + U\Lambda_0 + \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} G^{u+v} T_v \Lambda_u$$

$$= I + U\Lambda_0 + \sum_{u=1}^{\infty} G^u \left(\sum_{v=0}^{\infty} G^v T_v\right)\Lambda_u = I + U\Lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} G^i U \Lambda_i = I + \sum_{i=0}^{\infty} G^i U \Lambda_i.$$

Подставим выражение для $\vec{p}_1^{\,*T}$ в первое равенство СУР:

$$\vec{p}_1^{\,*T} = \sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_m^{\,*T} A_m^* = \sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*T} G^{m-1} A_m^* = \vec{p}_1^{\,*T} \sum_{m=1}^{\infty} G^{m-1} \sum_{i=1}^{m} T_{m-i} \Lambda_i^*$$

$$= \vec{p}_1^{\,*T} \sum_{u=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} G^{u+v-1} T_v \Lambda_u^* = \vec{p}_1^{\,*T} \sum_{k=1}^{\infty} G^{k-1} U \Lambda_k^* = -\vec{p}_1^{\,*T} \sum_{k=1}^{\infty} G^{k-1} U \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_i$$

$$= -\vec{p}_1^{\,*T} \sum_{k=0}^{\infty} G^k U \sum_{i=0}^{k} \Lambda_i = -\vec{p}_1^{\,*T} \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} G^{u+v} U \Lambda_u = -\vec{p}_1^{\,*T} \sum_{v=0}^{\infty} G^v \sum_{u=0}^{\infty} G^u U \Lambda_u.$$

Заметим, что

$$\sum_{v=0}^{\infty} G^v = (I - G)^{-1},$$

так как матрица $(I - G)$ невырождена. Поэтому

$$-\vec{p}_1^{\,*T} \sum_{v=0}^{\infty} G^v \sum_{u=0}^{\infty} G^u U \Lambda_u = \vec{p}_1^{\,*T} (G - I)^{-1} \sum_{u=0}^{\infty} G^u U \Lambda_u = \vec{p}_1^{\,*T}.$$

Дальнейшее исследование СМО $G/BMSP/1/\infty$ ничем не отличается от исследования СМО $G/BMSP/1/r$ с накопителем конечной емкости. Так справедливы следующие формулы:

для вектора $\vec{p}_k^{\,-}$, $k \geq 0$, стационарных вероятностей того, что в момент времени поступления заявка застает в системе k других заявок

$$\vec{p}_k^{\,-} = \vec{p}_{k+1}^{\,*} = \vec{p}_1^{\,*T} G^k;$$

для векторов $\vec{p}_k$, $k \geq 0$, стационарных вероятностей состояний по времени

$$\vec{p}_0^{\,T} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*T} G^{m-1} T_m^*,$$

$$\vec{p}_k^{\,T} = \frac{1}{T} \sum_{m=k}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*T} G^{m-1} T_{m-k}^* = \frac{1}{T}\, \vec{p}_1^{\,*T} G^{m-1} U,\ k \geq 1;$$

для ПЛС $\varphi(s)$ стационарного распределения $V(x)$ времени пребывания в системе произвольной заявки

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*T} G^k \Phi_{k+1}(s)\vec{1};$$

для среднего времени v пребывания в системе произвольной заявки для стационарного режима функционирования системы

$$v = \varphi'(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{p}_1^{\,*T} G^k \Phi_{k+1}'(0)\vec{1} = \frac{1}{1-\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{p}_k^{\,-T} \sum_{m=0}^{k} f_{(k+1)-m}'(0)\Lambda_m^* \vec{1}.$$

Остановимся подробнее на вычислении функции распределения $V(x)$, которые для системы с бесконечным накопителем могут быть записана в форме

$$V(x) = 1 - \vec{p}_1^{\,*T} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} G^k \right) F_i(x)\vec{1} = 1 - \vec{p}_1^{\,*T} (I-G)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} G^i F_i(x)\vec{1}. \tag{16}$$

Положим

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} G^i F_i(x) \tag{17}$$

и обозначим через a модуль минимального элемента матрицы Λ_0. Положим $Q = I + \Lambda_0/a$.

Будем искать матричную функцию $R(x)$ в виде

$$R(x) = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} R_i. \tag{18}$$

Поскольку

$$F_0(x) = e^{\Lambda x} = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} Q^i, \tag{19}$$

то из соотношений (17)–(19) имеем

$$R(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} G^i F_i(x) = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} Q^i + \sum_{i=1}^{\infty} G^i F_i(x)$$

$$= e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} Q^i + \sum_{i=1}^{\infty} G^i \int_0^x \sum_{m=1}^{i} F_{i-m}(y) \Lambda_m F_0(x-y)\, dy.$$

Производя элементарные преобразования, получаем

$$R(x) = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} Q^i + e^{-ax} \sum_{u=1}^{\infty} G^u \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} R_m \Lambda_u Q^{n-m} \left(a^n \int_0^x \frac{y^m (x-y)^{n-m}}{m!(n-m)!}\, dy \right).$$

Учитывая, что $\int\limits_0^x y^i(x-y)^j dy = \dfrac{i!\,j!\,x^{i+j+1}}{(i+j+1)!}$, окончательно приходим к равенству

$$R(x) = e^{-ax}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}Q^i + e^{-ax}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}\sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{a}\left(\sum_{u=1}^{\infty}G^u R_m \Lambda_u\right)Q^{i-m-1}.$$

Далее, сравнивая множители при степенях x в последнем выражении с соответствующими множителями в формуле (18), приходим к рекуррентным выражениям, позволяющим найти все R_i:

$$R_0 = I, \tag{20}$$

$$R_i = Q^i + \sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{a}J_m Q^{i-m-1}, \;\; i \geq 1, \tag{21}$$

где обозначено

$$J_m = \sum_{u=1}^{\infty}G^u R_m \Lambda_u. \tag{22}$$

Заметим, что R_i при $i \geq 1$ можно записать в виде рекуррентного соотношения

$$R_i = \left(Q^{i-1} + \sum_{m=0}^{i-2}\frac{1}{a}J_m Q^{i-m-2}\right)Q + \frac{1}{a}J_{i-1} = R_{i-1}Q + \frac{1}{a}J_{i-1}. \tag{23}$$

Таким образом, из формул (16)–(18) следует, что функция распределения $V(x)$ может быть вычислена по формулам

$$V(x) = 1 - \vec{p}_1^{\,*T}(I-G)^{-1}R(x)\vec{1},$$

где матричная функция $R(x)$ определяется соотношениями (18), (20)–(23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания*, М.: Изд-во РУДН, 1995.
2. Бочаров П.П., D'Apice C., Печинкин А.В., Salerno S. Система массового обслуживания $G/MSP/1/r$. *Автоматика и Телемеханика*, 2003, № 2 (в печати).
3. Бочаров П.П. Анализ системы массового обслуживания $MAP/G/1/r$ конечной емкости *Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. "Прикладная математика и информатика"*, 1995, № 1, сс. 52–67.
4. Бочаров П.П. Стационарное распределение конечной очереди с рекуррентным потоком и марковским обслуживанием *Автоматика и Телемеханика*, 1996, № 9, сс. 66–78.
5. Neuts M.F. *Matrix-geometric solutions in stochastic models. An algorithmic approach*, Baltimore and London: The Jonhs Hopkins Univ. Press, 1981.