Информационные процессы, Том 4, № 1, 2004, стр. 1–7.

Модель локального взаимодействия компонент геоэкологической структуры

В.Г.Гитис, Е.Н.Петрова, С.А.Пирогов

Институт проблем передачи информации, Российская Академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 03.11.2003

Аннотация—Предлагается модель, описывающая процесс взаимодействия компонент сложной географической или геоэкологической структуры. Основное предположение состоит в том, что компоненты структуры взаимодействуют локально, то есть только при наличии прямых пространственных или функциональных связей. В качестве примеров рассматриваются распространение загрязняющих веществ с поверхностным стоком, а также цепочки вторичных природных и природно-техногенных катастроф, возникающих как последствия спонтанных катастроф, таких, как землетрясения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Географическая информация включает в себя географические сущности, их свойства, а также и всевозможные внутренние и взаимные связи этих сущностей и свойств. Географические сущности независимо от масштаба изучаемого явления могут представлять целостные географические объекты или непрерывные пространственные многообразия, которые чаще всего формализуются в виде числовых значений на регулярной координатной сетке.

Наиболее сложные задачи пространственно-временного геоинформационного анализа относятся к исследованию внутренних и взаимных связей в географических данных. Изучение связей между свойствами географических сущностей позволяет по комплексу известных пространственных и пространственно-временных свойств прогнозировать заранее неизвестные свойства или обнаруживать и распознавать заранее неизвестные географические объекты и явления. Изучение связей между географическими объектами и явлениями позволяет исследовать пространственно-временные процессы их взаимодействия и прогнозировать их стационарные свойства.

В данной работе предлагается модель, описывающая процесс взаимодействия компонент сложной пространственной структуры, которая может состоять как из географических объектов, так и из условно выделенных фрагментов региона. Основное предположение модели состоит в том, что компоненты структуры взаимодействуют локально, то есть только при наличии прямых пространственных или функциональных связей. В качестве примеров рассматриваются распространение загрязняющих веществ с поверхностным стоком, а также цепочки вторичных природных и природно-техногенных катастроф, возникающих как последствия спонтанных катастроф, таких, как землетрясения.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пространственная структура описывается конечным ориентированным графом, вершины которого соответствуют компонентам рассматриваемой структуры, а направленные ребра — возможным непосредственным воздействиям одной компоненты пространственной структуры на другую. Количественно структура описывается вектором $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, где m_i —

некоторая количественная характеристика i-й компоненты, смысл которой устанавливается из контекста конкретной задачи. Вектор $\mathbf{m}$ мы будем называть вектором потенциалов структуры, а величину m_i— потенциалом i-ой компоненты структуры. Кроме того, считаются заданными величины воздействий извне на каждую компоненту структуры, описываемые вектором $f = (f_1, \ldots, f_n)$, а также степени непосредственного воздействия компонент пространственной структуры друг на друга, распространяющиеся по ребрам направленного графа: ребру (i, j) приписывается величина p_{ij} воздействия компоненты i на компоненту j. Таким образом, имеется матрица взаимных воздействий $P = (p_{ij})$. Мы обосновываем применимость в данной модели уравнения для предельного (стационарного) вектора потенциалов

$$\mathbf{m} = \mathbf{f} + \mathbf{mP} \tag{1}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{m} = \mathbf{f}(\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1} = \mathbf{f}(\mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots + \mathbf{P}^K + \ldots)$$

Перейдем к рассмотрению задач, которые могут быть формализованы при помощи описанной модели.

3. ЦЕПОЧКИ ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ ПРИРОДНЫХ И ПРИРОДНО-ТЕХНОГЕННЫХ КАТАСТРОФ

Рассмотрим структуру, компонентами которой являются географические объекты, например, ледники, плотины, заводы, водохранилища, а также элементы среды некоторой пространственной области. Предположим, что любой объект может находиться в одном из двух состояний: нормальном и аномальном. При этом, исходя из конкретной ситуации, пользователю предоставляется самому провести разграничение между нормальным и аномальным состояниями объекта. Если объект i находится в аномальном состоянии, мы будем говорить, что он подвергся катастрофе. Считается, что объекты могут переходить в аномальное состояние в результате прямых внешних воздействий либо воздействий друг на друга. Такое воздействие возможно, если объект, индуцирующий аномальное состояние у других объектов, либо находится в непосредственной близости от них, либо связан с ними функционально.

Перенумеруем все подверженные воздействиям объекты, относящиеся к исследуемой области, числами $i = 1, 2, \ldots, n$. Построим ориентированный граф $\mathbf{G}$, каждая вершина которого соответствует одному из объектов. Соединим вершину i с вершиной j ориентированной дугой, если катастрофа объекта i может непосредственно индуцировать катастрофу на объекте j.

Пусть известно, что разрушительное внешнее воздействие на объект i (то есть такое воздействие, что объект переходит из нормального в аномальное состояние), наступает в среднем один раз в T_i лет. Обозначим $f_i = 1/T_i$ среднюю частоту переходов объекта i в аномальное состояние. Вектор $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ мы будем называть вектором внешних воздействий на структуру. Вектор потенциалов структуры $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ составлен из частот m_i перехода объекта i в аномальное состояние (катастрофа на объекте i). Отметим, что m_i (как и f_i) может принимать значения, большие 1. Если, например, $m_i = 3$, это означает, что за год в среднем объект i может перейти в аномальное состояние три раза. Соответственно, если $m_i = 1/3$, это означает, что данный объект может перейти в аномальное состояние в среднем один раз в три года.

Чтобы оценить интенсивность возможных катастроф на объекте j, нужно учесть влияние всех возможных внешних воздействий на все объекты структуры и то, в какой степени эти внешние воздействия по цепочкам влияющих друг на друга объектов передадутся объекту j.

Сценарий развития влияния произошедшей на объекте i катастрофы на другие объекты мы будем абстрактно описывать процессом с дискретным временем. Заметим, что физически время передачи влияния катастрофы с одного объекта на другой различается в различных ситуациях и для различных объектов. В этом смысле время в данном случае описывает лишь шаги по цепочкам развивающихся катастроф.

Пусть p_{ij} — вероятность того, что перешедший в аномальное состояние объект i непосредственно повлияет на объект j таким образом, что объект j также перейдет в аномальное состояние. Тогда величина $f_i p_{ij}$ интерпретируется как степень возможного воздействия аномального объекта i (ставшего таким под влиянием воздействия извне) на объект j, точнее, как частота перехода объекта j в аномальное состояние лишь в результате непосредственного влияния объекта i.

Обозначим $\mathbf{m}^{(t)} = (m_1^{(t)}, \ldots, m_n^{(t)})$ — вектор частот $m_i^{(t)}$ переходов в аномальное состояние объектов $i = 1, \ldots, n$ под влиянием как непосредственно внешнего воздействия, так и воздействий всех других объектов, дошедших до объекта i по цепочкам, количество шагов в которых не превосходит $t-1$. Таким образом, для $t = 1$ получаем

$$\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{f}.$$

В следующий момент времени, $t = 2$, мы учитываем влияние как внешних воздействий, так и непосредственных воздействий соседних объектов, то есть цепочки длины 1. Получаем:

$$m_j^{(2)} = f_j + \sum\nolimits_{i \neq j} f_i p_{ij}$$

или, в векторном виде,

$$\mathbf{m}^{(2)} = \mathbf{f} + \mathbf{fP} = \mathbf{f}(\mathbf{E} + \mathbf{P})$$

где — единичная матрица.

Далее, влияние "соседей порядка 2" скажется на следующем шаге развития сценария, то есть вектор

$$\mathbf{m}^{(3)} = \mathbf{f} + \mathbf{m}^{(2)}\mathbf{P} = \mathbf{f}(\mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2)$$

описывает возможности возникновения катастроф, пришедших по цепочке длины 2, длины 1 и непосредственно от внешнего воздействия.

Заметим, что векторы $\mathbf{m}^{(t+1)}$ и $\mathbf{m}^{(t)}$ отличаются тем, что $\mathbf{m}^{(t+1)}$, в отличие от $\mathbf{m}^{(t)}$, учитывает еще и цепочки длины t, в то время как $\mathbf{m}^{(t)}$ учитывает лишь воздействие цепочек длины $t-1$ и меньше. Следовательно, векторы $\mathbf{m}^{(t+1)}$ и $\mathbf{m}^{(t)}$ связаны рекуррентным соотношением

$$\mathbf{m}^{(t+1)} = \mathbf{f} + \mathbf{m}^{(t)}\mathbf{P},$$

или, покомпонентно,

$$m_j^{(t+1)} = f_j + \sum\nolimits_{i=1}^{n} m_i^{(t)} p_{ij}$$

где $\mathbf{P} = (p_{ij})$ — матрица взаимных воздействий. Заметим, что матрица $\mathbf{P}$ не обязательно является стохастической, то есть сумма элементов матрицы по строке не равна 1. Однако матрица $\mathbf{P}$ содержит много нулей, так как $p_{ij} \neq 0$ только если граф непосредственных воздействий $\mathbf{G}$ содержит ребро (i, j). Кроме того, $0 \leq p_{ij} \leq 1$ для всех i, j.

Мы предполагаем, что цепочки вторичных катастроф не могут быть очень длинными, иными словами, найдется число такое, что $\mathbf{P}^{K+1} = 0$. Тогда вектор частот перехода в аномальное состояние под влиянием как прямых (внешних) так и всех косвенных (индуцированных) воздействий, равен

$$\mathbf{m}^{(K+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots + \mathbf{P}^K).$$

Этот вектор мы называем предельным (или стационарным) вектором потенциалов.

Заметим, что, формально говоря, можно отказаться от условия

$$\mathbf{P}^{K+1} = 0.$$

При условии, что ряд

$$\mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots + \mathbf{P}^K + \ldots$$

сходится,[1] вектор предельных потенциалов задается формулой:

$$\mathbf{m} = \mathbf{f}(\mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots + \mathbf{P}^K + \ldots)$$

Это есть не что иное, как решение системы уравнений (1) $\mathbf{m} = \mathbf{f} + \mathbf{mP}$.

Если известны величины ущебов u_i от перехода объекта i в аномальное состояние, то средний ожидаемый ущерб за год будет равен

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i m_i.$$

В рассмотренной модели предполагается, что каждая компонента среды перед разрушающим воздействием находится в нормальном состоянии. Невыполнение этого условия, очевидно, может только уменьшить частоту переходов компонент структуры в аномальное состояние. Следовательно, наши оценки вектора потенциалов $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ и среднего ущерба U являются оценками сверху.

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАГРЯЗНЕНИЙ С ПОВЕРХНОСТНЫМ СТОКОМ

Рассмотрим поверхность некоторой ограниченной территории, которая подвержена загрязнению. Предполагается, что частицы загрязняющего вещества попадают тем или иным способом в дождевую либо талую воду и, находясь в воде в виде взвеси или раствора, распространяются по поверхности территории с поверхностным стоком. Некоторое количество воды с загрязняющим веществом может просочиться под землю. Задача состоит в описании распределения по пространству концентрации загрязняющего вещества.

Разобьем рассматриваемую область на ячейки равномерной координатной сетки, достаточно малые для того, чтобы корректно учесть необходимые характеристики рельефа территории. Пусть для удобства ячейки будут квадратными. Компонентами структуры в данной задаче являются указанные ячейки, а непосредственное влияние могут оказывать друг на друга соседние, то есть имеющие общую сторону, ячейки. Перенумеруем ячейки в произвольном порядке, и мысленно поместим вершины графа $\mathbf{G}$, отражающего возможные непосредственные воздействия компонент пространственной структуры друг на друга, в центры ячеек. Тогда граф $\mathbf{G}$ есть просто фрагмент квадратной решетки, сдвинутой относительно координатной сетки на половину длины ребра ячейки по обеим осям (так называемая двойственная решетка). Все ребра графа $\mathbf{G}$, вообще говоря, двусторонние, что отражает двусторонность взаимного влияния соседних ячеек.

В качестве вектора потенциалов структуры $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ естественно взять вектор, i-ой компонентой которого является количество частиц загрязненной воды, находящееся в i-ой ячейке. Естественно, в разные моменты времени это количество будет разным, то есть вектор потенциалов структуры изменяется во времени: $\mathbf{m} = \mathbf{m}^{(t)}$. Заметим, что в отличие от предыдущего примера (цепочки катастроф), время в данном случае совпадает с физическим временем системы. Однако для простоты изложения мы будем рассматривать процесс распространения загрязнения в дискретном времени.

[1] Этот ряд сходится в том и только в том случае, если $\mathbf{P}^n \to 0$ при $n \to \infty$, [1]

Обозначим через $\mathbf{f}^{(t)} = (f_1^{(t)}, \ldots, f_n^{(t)})$ внешний входной поток, то есть $f_i^{(t)}$ есть количество макрочастиц загрязненной воды, поступающее в момент времени t в ячейку i извне, например, с дождем, талыми водами, либо в результате аварии коммуникаций. Мы предполагаем, что каждая частица загрязненной воды, находящаяся в момент времени t в ячейке i, может за единицу времени с некоторыми вероятностями p_{ij} перескочить в одну из соседних ячеек j. Кроме того, с некоторой вероятностью p_{i*} частица, находящаяся в ячейке i, может просочиться сквозь землю и, таким образом, покинуть систему. С некоторой вероятностью p_{ii} частица может остаться в ячейке i. Для описания возможности просочиться, то есть покинуть систему, достроим граф $\mathbf{G}$, добавив в него еще одну вершину, которую обозначим $*$, и построим из каждой вершины ребро, идущее в $*$. Ребер, выходящих из вершины $*$, нет. Таким образом, вершина $*$ описывает просачивание вглубь перемещающихся по поверхности частиц. В конце статьи мы обсудим модель, описывающую подповерхностное распространение загрязненной воды.

Естественно предположить, что вероятности переходов p_{ij} пропорциональны разности высоты рельефа в ячейках i и j, а вероятность просочиться из ячейки вглубь определяется проницаемостью почвы в ячейке i. Однако здесь мы не будем подробно касаться проблемы определения вероятностей p_{ij} подчеркнем лишь, что этот вопрос невозможно решить без участия эксперта.

Обозначим $\mathbf{P} = (p_{ij})$ — матрицу переходов из ячеек (поглощающее состояние $*$ здесь не учитывается). Подчеркнем, что в данной задаче величины p_{ij} следует задать как вероятности, причем

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + p_{i*} = 1, \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \le 1$$

для любого $i = 1, \ldots, n$.

Пусть в момент времени t вектор потенциалов структуры равен $\mathbf{m}^{(t)} = (m_1^{(t)}, \ldots, m_n^{(t)})$. Тогда к моменту времени $t+1$ ячейку i покинет количество вещества, равное

$$\sum_{j \ne i} m_i^{(t)} p_{ij} + m_i^{(t)} p_{i*},$$

а поступит в ячейку i количество вещества, равное

$$f_i^{(t+1)} + \sum_{j \ne i} m_j^{(t)} p_{ji}.$$

Мы можем записать уравнение баланса, которое дает нам рекуррентное соотношение:

$$m_i^{(t+1)} = m_i^{(t)} - m_i^{(t)} p_{i*} - \sum_{j \ne i} m_i^{(t)} p_{ij} + f_i^{(t+1)} + \sum_{j \ne i} m_j^{(t)} p_{ji}. \tag{3}$$

Упростим уравнение (3). Из (2) следует, что

$$m_i^{(t)} (1 - p_{i*}) = m_i^{(t)} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3) и приведя подобные члены, получаем:

$$m_i^{(t+1)} = m_i^{(t)} p_{ii} + f_i^{(t+1)} + \sum_{j \neq i} m_j^{(t)} p_{ji},$$

или

$$m_i^{(t+1)} = \sum_{j=1}^{n} m_j^{(t)} p_{ji} + f_i^{(t+1)}. \tag{5}$$

В векторном виде уравнение (5) имеет вид

$$\mathbf{m}^{(t+1)} = \mathbf{f}^{(t+1)} + \mathbf{m}^{(t)}\mathbf{P}. \tag{6}$$

Естественно предположить, что если входной поток $f_i^{(t)}$ не зависит от t, то на достаточно длинных временных интервалах система переходит в стационарный режим. Обозначим соответствующие стационарному режиму вектор потенциала $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ и вектор входного потока $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Перейдя к пределу $t \to \infty$ в уравнении (6), мы получим уравнение, которому удовлетворяет предельный (стационарный) потенциал структуры:

$$\mathbf{m} = \mathbf{f} + \mathbf{m}\mathbf{P}. \tag{7}$$

Заметим, что, хотя интерпретация структуры и даже времени разная, мы получили то же самое уравнение, что и для взаимно влияющих катастроф. Как уже отмечалось выше, решение уравнения (7) имеет вид

$$\mathbf{m} = \mathbf{f}(\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1} = \mathbf{f}(\mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots),$$

где мы предполагаем, что ряд $\mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots$ сходится.

Коснемся кратко уравнения, описывающего подповерхностное распространение загрязнений. Для удобства изложения и пространство будем считать непрерывным, помня, однако, что, применяя это уравнение к практическим задачам, необходимо будет провести дискретизацию по пространству и по времени для того, чтобы выполнить вычисления на компьютере.

Пусть $h(x)$ высота рельефа водоупорного слоя в точке x, а $\rho(x,t)$ — уровень жидкости над поверхностью рельефа в точке x в момент времени t. Тогда уравнение, описывающее перемещение жидкости, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \operatorname{div}(J(x,t)) = f_{in}(x,t) - f_{out}(x,t), \tag{8}$$

где $J(x,t)$ — поток жидкости, $J(x,t) = \rho(x,t)v(x,t)$, $v(x,t)$ — скорость жидкости в момент времени t в точке пространства x, f_{in} — входящий извне поток жидкости, f_{out} — поток покидающей систему жидкости.

Предположим, что вектор скорости имеет вид

$$v(x,t) = -c\,\nabla(h(x) + \rho(x,t)),$$

где c — некоторая константа, которая для практических задач определяется экспериментально. Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = c \operatorname{div}\big(\rho \nabla \rho(x,t) + \rho \nabla h(x,t)\big) + f_{in}(x,t) - f_{out}(x,t). \tag{9}$$

В отсутствие источников и стоков стационарным решением уравнения (9) является функция $\rho(x)$, удовлетворяющая уравнению $\rho\,\nabla(\rho + h) = 0$. Смысл такого решения очень прост: если $\rho(x) > 0$, то $\rho + h$ постоянно, т.е. в любом замкнутом подповерхностном водоеме уровень воды горизонтален.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
2. Гитис В.Г., Петрова Е.Н., Пирогов С.А. Математическая модель комплексного развития природных и природно-техногенных катастроф и оценка риска. Тезисы конференции “Проблемы управления в чрезвычайных ситуациях”. М., 1992, стр. 28-29.
3. Гитис В.Г., Петрова Е.Н., Пирогов С.А. Модель косвенного ущерба от природных катастроф на основе экспертных оценок уязвимости. Третья международная конференция “Проблемы управления в чрезвычайных ситуациях”. Тезисы докладов. М., 1995, стр. 89-90.
4. Gitis V.G., Petrova E.N., Pirogov S.A. Catastrophe Chains: Hazard Assessment. Natural Hazards, 1994, vol. 10, pp. 117-127.
5. Gitis V.G., Petrova E.N., Pirogov S.A. Expert Knowledge Approach to Catastrophe Chains. Cahiers du Centre Eurioeen de Geodynamique et de Seismologie, 1996, vol. 12, pp. 67-72.

This paper was recommended for publication by V.V.Zyablov, a member of the Editorial Board