Информационные процессы, Том 4, № 4, 2004, стр. 261–268

2-связный 2-лесистый граф с заданным числом вершин и ребер с максимальным числом 2-разрезов

Петрунин В.И., Полесский В.П.

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 7.10.2004

Аннотация—Под редкой топологией сети передачи информации понимают 2-связный граф и граф с небольшим (относительно заданного числа вершин) числом ребер, соответственно. Простейшими и реальными примерами редких топологий служат 2-связные 2-лесистые графы. Дополнительной мерой качества в 2-связной топологии может служить количество 2-разрезов. В классе 2-связных 2-лесистых графов с заданным числом вершин и ребер найден граф, имеющий максимальное число 2-разрезов - наихудшая (по числу 2-разрезов) 2-лесистая топология.

1. НАДЕЖНОСТЬ РЕДКИХ ТОПОЛОГИЙ

Топология сети [1]— это граф G (понятия теория графов см.,например, в [2]), вершины $V(G)$ которого представляет узлы сети, а ребра $E(G)$-линии связи. Такая простая модель отражает, тем не менее, целый ряд свойств и характеристик сети:

1. свойство связности;
2. характеристики связности, например, вершинная связность связного графа G - наименьшее число вершин, удаление которых из графа G делает его несвязным;
3. метрические характеристики, например, диаметр графа G—максимум расстояний $l(u, v)$ между вершинами u, v по графу G;
4. характеристики стоимости - количество вершин $|V(G)|$ и ребер $|E(G)|$; а при заданном числе вершин количество ребер - единственная характеристика стоимости топологии.

Редкая топология - это граф G с небольшим ,относительно числа вершин $|V(G)|$ числом ребер $|E(G)|$; например, $|E(G)| \leq C \cdot |V(G)|$, где С-некая контанта. Простейшая редкая топология - 2-лесистый граф. Граф G называют 2-лесистым, если его ребра $E(G)$ можно окрасить в два цвета так, чтобы не было одноцветных циклов, и одним цветом обойтись нельзя. В 2-лесистом графе G $|E(G)| \leq 2(|V(G)|-1)$, т.е. 2-лесистый граф редкая топология с $C = 2$. В настоящей работе под редкой топологией подразумевается только 2-лесистый граф. Одним из критериев выбора топологии является надежность топологии. Характеристикой надежности топологии является вершинная связность $\nu(G)$ графа G. Так как узлы сети обычно высоконадежны, то одновременный отказ двух узлов маловероятен, что отражается в требовании $\nu \geq 2$, т.е. в требовании 2-связности графа G (связный граф G 2-связный если отказ любой одной его вершины не нарушает связности).

Хоть линии связи обычно высоконадежны, однако, одновременный отказ двух линий вполне возможен, что желательно учитывать дополнительно при выборе 2-связного графа. Разрезом связного графа G называют минимальное (по включению) множество ребер X, $X \subseteq E(G)$ такое, что граф $G\{\bar{X}\}$, полученный из графа G удалением ребер X, несвязен. Мощность $|X|$ разреза X называют его величиной, а наименьшую величину разреза в графе G — реберной связостью $\omega(G)$ графа G. Ясно что, $\omega(G) \leq \nu(G)$. Если разрез X состоит из двух рёбер, его называют 2-разрезом. Обозначим через $c_2(G)$ количество 2-разрезов графа G. В 2-связном 2-лесистом графе G 2-разрезы вполне возможны, что подтверждается примерами реальных сетей. 2-разрезы наиболее уязвимые ("узкие") места надежных топологий и выявление 2-связных 2-лесистых топологий с экстремальным числом 2-разрезов представляет несомненный интерес.

В разделе 3 представлен 2-связный 2-лесистый граф с заданным числом вершин и рёбер, имеющий максимальное число 2-разрезов. Это наихудшая по числу 2-разрезов редкая топология в классе надежных 2-лесистых графов.

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О 2-СВЯЗНЫХ И 2-ЛЕСИСТЫХ ГРАФАХ

Пусть G - граф. Множество рёбер графа G, кратных ребру $e \in E(G)$ (включая ребро e) называют 2-пучком. Разрез величины 1 называют мостом.

Соединение графов H и L означает, что $|V(H) \bigcap V(L)| \leq 1$; в случае $|V(H) \bigcap V(L)| = 1$ соединение называют связным. На множестве рёбер $E(G)$ имеется следующее эквивалентности. Для $e, f \in E(G)$ положим $e \sim f$, если $e = f$, или существует цикл графа G, содержащий e и f. Эту эквивалентность называют циклической связаностью. Разбиению $E_i, : i \in I$, где I — (множество элементов разбиения) множества $E(G)$ на классы эквивалентности соответствует представление графа G в виде соединения его подграфов - блоков(если $|E_i| > 1$), мостов и петель, соответствующим одноэлементным множествам E_i.

Граф G 2-связен (или циклически связен), если $|E(G)| > 1$, $e = \{u, v\}$, $e \in E(G)$, $u \neq v$ и $G\{\bar{e}\}$ - граф, полученный из G удалением ребра e. Подграф $G\{\bar{e}\}$ - 1-связен тогда и только тогда, когда существует вершинно-реберный разрез $\{u, v\}$ мощности 2, содержащий ребро e и вершину z, $z \neq u, v$. Если G — 2-связен, а $G\{\bar{e}\}$ — 1-связен, то $G\{\bar{e}\}$ есть связное последовательное соединение

$$G\{\bar{e}\} = \sum_{i=1}^{d(e)} G_i\{\bar{e}\},$$

$d(e) > 1$ подграфов $G_i\{\bar{e}\}$ таких, что

$$u \in V(G_1\{\bar{e}\}), \quad v \in V(G_{d(e)}\{\bar{e}\}),$$

$$|V(G_i\{\bar{e}\}) \bigcap V(G_{i+1})| = 1, \quad i = 1, ..., d(e) - 1$$

$$j \neq i-1, i+1 \quad \Rightarrow \quad V(G_i\{\bar{e}\}) \bigcap V(G_j\{\bar{e}\}) = \emptyset$$

(см.рис.1)

Подграф $G_i\{\bar{e}\}$ $(i = 1, ..., d(e))$ является либо 2-связным, либо мостом.

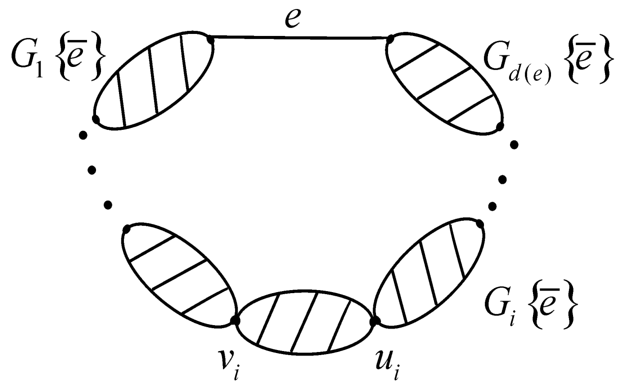

Рис. 1

Пусть G — связный 2-лесистый граф. Положим $x_1 = |V(G)|-1, x_2 = |E(G)|-|V(G)|+1$. В теории графов [2] x_1 называют рангом связного графа G, а x_2 корангом или цикломатическим числом графа G. Вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ назван в [3, 4] ациклическим спектром AC связного 2-лесистого графа G. Очевидно, что $|E(G)| = x_1 + x_2$. Существует 2-разбиение $\alpha = B_1, B_2$ множества ребер $E(G)$ связного 2-лесистого графа G на леса, такое, что 1) B_1 - остав графа G, 2) $|B_2| = x_2$. Такое разбиение α называется базовым рядом (см.[3, 4]) графа G.

Если G — 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ и подграф $G\{\bar e\}$ - 1-связан. (см.рис.1), то каждый подграф $G_i\{\bar e\}$ на рис.1 сам по себе либо 2-связный 2-лесистый либо мост.

Ациклический спектр для моста $G_i\{\bar e\}$ $\mathbf{X}(i) = (1, 1)$. Удобно считать, что ациклический спектр $\mathbf{X}(i)$ моста имеет размерность 2, т.е. $\mathbf{X}(i) = (x_1(i), x2(i))$, где $x_1(i) = 1$, $x_2(i) = 0$. Для 2-пучка $G_i\{\bar e\}$ его ациклический спектр $\mathbf{X}(i) = (x_1(i), x_2(i))$, $x_1(i) = x_2(i) = 1$.

Наконец, для блока $G_i\{\bar e\}$, не являющемся 2-пучком, его ациклический спектр $\mathbf{X}(i) = (x_1(i), x_2(i))$, $x_1(i) > 1$.

Пусть $I(e) = \{1, ..., d(e)\}$, $Y(e)$-множество индексов $i \in I(e)$, для которых подграф $G_i\{\bar e\}$ не является 2-пучком или мостом, т.е. это блок с $x_1(i) > 1$. Пусть множества $a(e)$, $b(e)$, $c(e)$ - количество мостов, 2-пучков и блоков, не является 2-пучками. Очевидно, что

$$a(e) + b(e) + c(e) = d(e)$$

Если $\alpha = \{B_1, B_2\}$ - базовый ряд графа G с $e \in B_2$, то след $\alpha_i = \{B_1 \bigcap E(G_i\{\bar e\}), B_2 \bigcap E(G_1\{\bar e\})$

2-разбиение α есть базовый ряд подграфа $G_i\{\bar e\}$, т.е. $x_1(i) = |B_1 \bigcap E(G_i\{\bar e\})|$, $x_2(i) = |B_2 \bigcap E(G_i\{\bar e\})|$. Поэтому (см. [5])

$$\sum_{i=1}^{d(e)} x_1(i) = x_1,$$

$$\sum_{i=1}^{d(e)} x_2(i) = x_2 + 1. \tag{1}$$

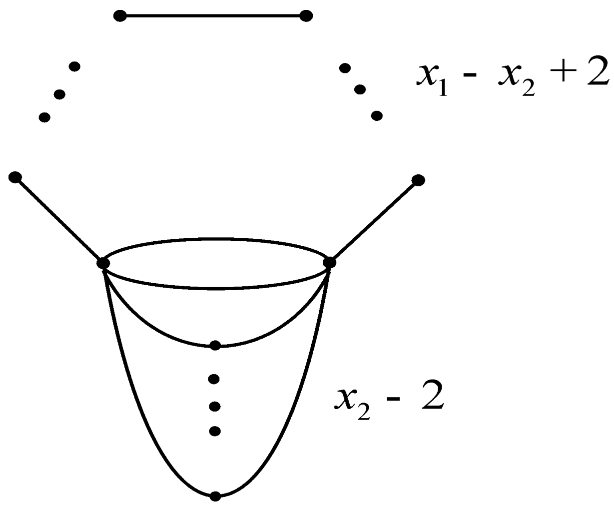

Рис. 2

3. 2-СВЯЗНЫЙ 2-ЛЕСИСТЫЙ ГРАФ С АС (x_1, x_2) С МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛОМ 2-РАЗРЕЗОВ.

В [3, 6] без доказательства утверждалось, что максимальным числом 2-разрезов в классе $L(x_1, x_2)$ 2-связных 2-лесистых мультиграфов с ациклическим спектром $\mathbf{X} = (x_1, x_2), 1 < x_2$ достигается на следующем мультиграфе $U(\mathbf{X})$.

Теорема. *Пусть G - 2-связный 2-лесистый граф с ацикличиским спектром (x_1, x_2), $x_2 > 1$ и $U(x_1, x_2)$ граф представлен на рис.2.*

Тогда

$$2(G) \leq 2(U(x_1, x_2)) = (x_2 - 2) + C^2_{x_1 - x_2 + 2}. \quad (2)$$

Доказательство. Применим индукцию по $m = x_1 + x_2$. Для ациклического спектра $(2, 2)$ 2-связный 2-лесистый граф G единственен, это граф $U(2, 2)$.

Пусть теперь G - 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром (x_1, x_2), $x_2 > 1$ и $m = x_1 + x_2 > 4$.

Докажем, что

$$2(G) \leq (x_2 - 2) + C^2_{x_1 - x_2 + 2} \quad (3)$$

Достаточно рассмотреть случай, когда G имеет 2-разрез. Структура такого графа G представлена на рис.1, где e — ребро 2-разреза. Так как e принадлежит 2-разрезу, то среди подграфов $G_i\{\bar{e}\}$, $i = 1, ..., d(e)$ существует мост, т.е. $a(e) \geq 1$.

2-разрез графа G есть либо 2-разрез, состоящий из ребра e и какого либо моста $G_i\{\bar{e}\}$, либо это 2-разрез блока $G_i\{\bar{e}\}$, не являющегося 2-пучком, не разделяющий граничные вершины v_i, u_i, с помощью которых блок $G_i\{\bar{e}\}$ соединен с соседними подграфами $G_{i-1}\{\bar{e}\}$, $G_{i+1}\{\bar{e}\}$. 2-разрез блока $G_i\{\bar{e}\}$, разделяющий граничные вершины v_i, u_i, не является 2-разрезом в графе G.

Поэтому

$$2(G) \le C^2_{a(e)+1} + \sum_{i \in J(e)} 2(G_i). \tag{4}$$

По предложению индукции для $i \in J(e)$

$$2(G_i) \le 2(U(x_1(i), x_2(i))) = x_2(i) - 2 + C^2_{x_1(i)-x_2.(i)+2} \tag{5}$$

Из (4),(5) следует, что

$$2(G) \le C^2_{q(e)+1} + \sum_{i \in J(e)} (x_2(i) - 2) + \sum_{i \in J(e)} C^2_{x_1(i)-x_2(i)+2}. \tag{6}$$

Ввиду (4),(6) для доказательства неравенства (5) достаточно доказать, что

$$C^2_{a(e)+1} + \sum_{i \in J(e)} (x_2(i) - 2) + \sum_{i \in J(e)} C^2_{x_1(i)-x_2(i)+2} \le (x_2 - 2) + C^2_{x_1-x_2+2}. \tag{7}$$

А для этого достаточно, чтобы

$$\sum_{i \in J(e)} (x_2(i) - 2) \le x_2 - 2, \tag{8}$$

$$C^2_{a(e)+1} + \sum_{i \in J(e)} C^2_{x_1(i)-x_2(i)+2} \le C^2_{x_1-x_2+2}. \tag{9}$$

Из соотношения (1) следует, что

$$\sum_{i \in J(e)} x_2(i) = x_2 - 1 - b(e),$$

и поэтому в силу $b(e) + c(e) \ge 1$ имеем

$$\sum_{i \in J(e)} (x_2(i) - 2) = \sum_{i \in J(e)} x_2(i) - 2c(e) = x_2 - 1 - b(e) - 2c(e) \le x_2 - 2. \tag{10}$$

Неравенство (8) доказано.

Заметим что, в доказательстве теоремы всегда можно считать, что $c(e) \ge 1$.

Действительно, если $c(e) = 0$, то каждый подграф $G_i\{\bar{e}\}$-либо мост, 2-пучок; поэтому $b(e) = x_2 - 1$, $a(e) = x_1 - b(e) = x_1 - x_2 + 1$ и $2(G) = C^2_{a(e)+1} = C^2_{x_1-x_2+2}$.

Но $2(U(x_1, x_2)) = (x_2 - 2) + C^2_{x_1-x_2+2}$ и так как (по условию теоремы) $x_2 > 1$, то $2(G) \le 2(U(x_1, x_2))$. Поэтому можно считать,что из (10) следует более сильное, чем (8) неравенство

$$\sum_{i \in J(e)} (x_2(i) - 2) \le x_2 - 3,$$

и тогда, вместо неравенства (9), достаточно доказать более легкое неравенство

$$C^2_{a(e)+1} + \sum_{i\in J(e)} C^2_{x_1(i)-x_2(i)+2} \leq C^2_{x_1-x_2+2} + 1. \tag{11}$$

Далее

$$C^2_{x_1-x_2+2} = \frac{1}{2}(x_1-x_2+2)(x_1-x_2+1) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{d(e)}(x_1(i)-x_2(i))+1)(\sum_{i=1}^{d(e)}(x_1(i)-x_2(i))). \tag{12}$$

Пусть $K(e)$ - множество индексов $i \in J(e)$ таких, что подграф $G_i\{\bar{e}\}$ не является мостом, т.е. это либо 2-пучок, либо блок с $x_1(i) > 1$.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{d(e)}(x_1(i)-x_2(i)) = a(e) + \sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i)). \tag{13}$$

Из (12), (13) следует, что

$$C^2_{x_1-x_2+2} = C^2_{a(e)+1} + \frac{1}{2}(2a(e)+1)\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i)) + \frac{1}{2}(\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i))^2. \tag{14}$$

Из (11), (14) следует, что для доказательства неравенства (11) достаточно доказать, что

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J(e)} C^2_{x_1(i)-x_2(i)+2} \leq \frac{1}{2}(2a(e)+1)\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i)) +\\ +\frac{1}{2}(\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i)) + \frac{1}{2}(\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i))^2+1.\end{aligned} \tag{15}$$

Но

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in J(e)} C^2_{x_1(i)-x_2(i)+2} =\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i\in J(e)}(x_1(i)-x_2(i))(x_1(i)-x_2(i)+1) =\\ =&\frac{3}{2}\sum_{i\in J(e)}(x_1(i)-x_2(i)) + \frac{1}{2}(\sum_{i\in J(e)}(x_1(i)-x_2(i))^2+1 =\\ =&\frac{3}{2}\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i)) + \frac{1}{2}(\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i))^2+1,\end{aligned}$$

так как для 2-пучка $G_i\{\bar{e}\}$ $x_1 = x_2 = 1$.

Итак

$$\sum_{i\in J(e)} C^2_{x_1(i)-x_2(i)+2} = \frac{3}{2}\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i)) + \frac{1}{2}\sum_{i\in K(e)}(x_1(i)-x_2(i))^2+1. \tag{16}$$

Так как $a(e) \geq 1$, то из (3) и следует (15), что завершает доказательство теоремы.

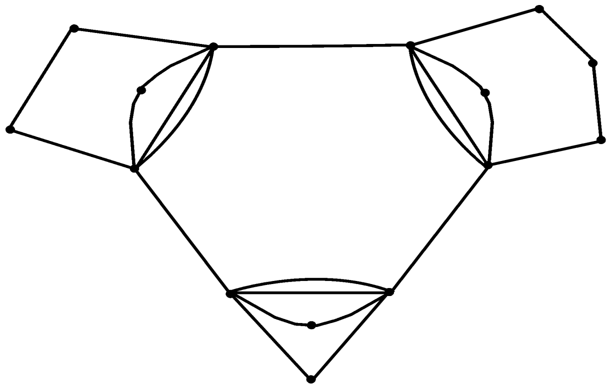

Рис. 3.

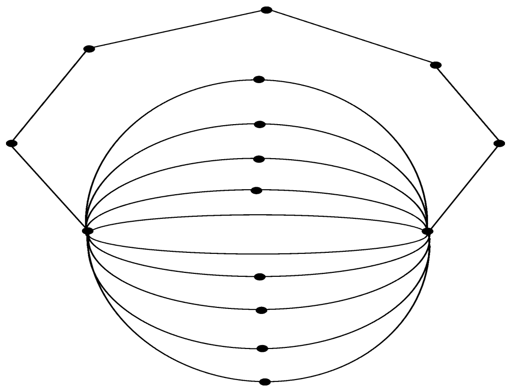

Рис. 4.

Следствие. *Если $G \neq U(x_1, x_2)$, то в основном неравенстве (2) теоремы, имеет строгое неравенство.*

Доказательство. Из доказательства теоремы, следует, что наличие 2-пучков $G_i\{\bar{e}\}$ влияет на ее доказательство, поэтому можно считать, что $b(e) = 0$.

Если число $c(e)$ блоков $G_i\{\bar{e}\}$ с $x_1(i) > 1$ не менее двух, т.е. $c(e) > 1$, то из нeравества (12) следует, что

$$\sum_{i \in J(e)} (x_2(i) - 2) \leq x_2 - 5$$

и тогда в основном неравенстве (2) имеет место строгое неравенство.

В случае $c(e) = 1$ из неравенства (4) следует, что если в (2) имеет место равенство, то $G_1\{\bar{e}\} = U(x_1(1), x_2(1))$ и в нем 2-пучок имеет концевые вершины v_1, u_1 (см.рис.1).

Случай $a(e) > 1$ невозможен, ибо тогда в (2) имеет место строгое неравество. Поэтому $a(e) = 1$ и $G = U(x_1, x_2)$.

На рис.3 представлен 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром (14,10), имеющий шестнадцать 2-разрезов. Наихудшая топология с ациклическим спектром (14,10)-граф $U(14, 10)$ представлен на рис.4. Она имеет $C^2_{14-10+2} + (10 - 2) = 23$ 2-разреза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рочинский В.Н., Харкевич А.Д., Шкенс М.А. и др. *Теория сетей связи.* Под ред. В.Н. Рочинского, М.: Радио и связь, 1981

2. Емиличев В.А. и др. *Лекции по теории графов.* М.: Наука, 1990

3. Polessky V.P.*Some open network reliability problems.* Manuscript, 1993, unpublished.

4. Полесский В.П. *Достижимые границы вероятности полного ранга случайного подматроида.* Проблемы передачи информации. Том 31, № 4, 1995, С. 81–99

5. Полесский В.П.*Нижние оценки вероятности связности для некоторых классов случайных графов.* Проблемы передачи информации. Том 29, № 2, 1993, С. 85–95

6. *Эффективные границы надежности топологии сети. Перспективные средства телекоммуникаций.* Интегрированные системы связи, Итоговый отчет за 1992, ИППИ РАН, С. 221–261