Информационные процессы, Том 4, № 3, 2004, стр. 275–283

2-связный 2-лесистый граф с заданным числом вершин и ребер с минимальным числом остовов

Петрунин В.И., Полесский В.П.

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
email: vip@iitp.ru
Поступила в редколлегию 12.11.2004

Аннотация—Под редкой топологией сети передачи информации понимают 2-связный граф и граф с небольшим (относительно заданного числа вершин) числом ребер, соответственно. Простейшими и реальными примерами редких топологий служат 2-связные 2-лесистые графы. Дополнительной мерой качества в 2-связной топологии может служить количество остовов. В классе 2-связных 2-лесистых графов с заданным числом вершин и ребер найден подкласс, имеющий наименьшее число остовов - наихудшая (по числу оставов) 2-лесистая топология.

1. ВВЕДЕНИЕ

Топология или *структура* [1] — это граф G, вершины $V(G)$ которого соответствуют узлам сети, а ребра $E(G)$ — линиям связи (о понятиях теории графов см., например, в [2]).

Под *редкой топологией* в данной статье понимается 2-лесистый граф, т.е. граф G, ребра $E(G)$ которого можно окрасить в два цвета так, чтобы не было одноразовых циклов, и одним цветом обойтись нельзя. Для 2-лесистого графа G справедливо неравенство

$$|V(G)| \leq |E(G)| \leq 2(|V(G)| - 1).$$

При выборе топологии сети, т.е. графа G, учитываются требования надежности. Так как узлы сети обычно высоконадежны, то одновременный отказ двух узлов маловероятен, что отражается в требовании 2-связности графа G (связный граф G — 2–связный, если отказ любой его вершины не нарушает связности).

При заданном числе вершин n и ребер m, $m \leq 2(n-1)$ существует достаточно много 2–связных и 2–лесистых графов. Дополнительной мерой качества 2–связной топологии G может служить количество $N(G)$ остовов графа G.

Остовом связного графа G называют его минимальный (по включению) подграф H с множеством вершин $V(H) = V(G)$; очевидно, что $|E(Y)| = |V(G)| - 1$, и это дерево графа G на всех вершинах $V(G)$ графа G.

В разделе 4 представлен подкласс 2–связных 2–лесистых графов с заданным числом вершин и ребер, имеющих минимальное число остовов. Это — наихудшие (по числу остовов) топологии в классе 2–связных 2–лесистых графов.

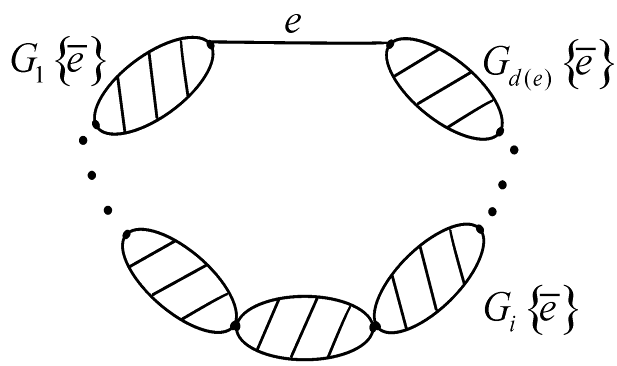

Рис. 1

2. НЕКОТРЫЕ СВЕДЕНИЯ О 2 — СВЯЗНЫХ И 2–ЛЕСИСТЫХ ГРАФАХ

Пусть G — граф. Множество ребер, кратных ребру $e \in E$ (включая само ребро e) называют *пучком* ребер. Пучок из двух ребер называют 2-пучком. Ребро связного графа G, удаление которого из G делает его несвязным, называют *мостом*.

На множестве ребер $E(G)$ имеется следующее отношение эквивалентности. Для $e, f \in E(G)$ положим $e \sim f$, если $e = f$. Эту эквивалентность называют *циклической связностью*. Разбиению $\{E_i : i \in I\}$ множества $E(G)$ на классы эквивалентности соответствует представления графа G в виде соединения его подграфов — *блоков* (если $|E_i| > 1$), *мостов* и *петель*, соответствующим одноэлементным множеством E_i. Граф 2-связен (или цикличеки связен), если $|EG| > 1$ и $|I| = 1$. 2-связность графа G эквивалетна тому, что подграф $G\{\bar{v}\}$, полученный из G удалением (прозвольной) вершины $v \in V(G)$, будет связным. Пусть G - 2-связный граф, $e = \{u, v\}$, $e \in E(G)$ и полученный из G удалением ребра.

Подграф $G\{\bar{e}\}$ — 1-связен тогда и только тогда, когда существует вершинно-реберный $\{u, v\}$ разрез мощности 2, содержащий ребро e и вершину z, $z \neq u, v$. Если G 2-связен, а $G\{\bar{e}\}$ 1-связен, то $G\{\bar{e}\}$ есть связное последовательные соединение.

$$G\{\bar{e}\} = \sum_{i=1}^{d(e)} G_i \{\bar{e}\}$$

подгафов $G_i\{\bar{e}\}$ таких что

$$u \in V(G)_i \{\bar{e}\}, v \in V(G)_d(e) \{\bar{e}\},$$

$$|V(G)_i \{\bar{e}\} \bigcap V(G)_{i+1} \{\bar{e}\}| = 1,$$

$$i = 1, ..., d(e) - 1,$$

$$j \neq i - 1, i + 1 \Rightarrow |V(G)_i \{\bar{e}\} \bigcap V(G)_{i+1} \{\bar{e}\}| = \emptyset.$$

(см. рис.1)

Подграф $G_i\{\bar{e}\}$ является либо 2-связным либо мостом. Пусть G — связный граф. Величину $rG = |V(G)| - 1$ называют рангом связного графа G. Положим $x_1 = r$, $x_2 = |E(G)| - r$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$. Вектор $\mathbf{X}$ назван в [3, 4] ациклическим спектром связного 2-лесистого графа G. Очевидно что $|E(G)| = x_1 + x_2$. Существует такое 2-разбиение $\alpha = \{B_1, B_2\}$ множества ребер $E(G)$ связного лесистого графа G на леса такое, что

1. B_1 - остов графа G (т.е.$|B_1| = x_1$),
2. $|B_2| = x_2$.

Такое разбиение α назывется [3, 4] базовым рядом графа G, оно реализует ациклический спектр $\mathbf{X}$.

Если G 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$, а подграф $G\{\bar{e}\}$—1-связен сам по себе (см.рис.1), G то либо 2-связный 2-лесистый граф либо мост. Для моста $G_i\{\bar{e}\}$ ациклический спектр $\mathbf{X} = (1)$. Удобно считать, что ациклический спект моста имеет размерность 2, т.е. $\mathbf{X} = (x_1(i), x_2(i))$, где $x_1 = 1, x_2(i) = 0$. Для 2-пучка $G_i\{\bar{e}\}$ его ациклический спектр $\mathbf{X}(i) = (x_1(i), x_2(i)), x_1(i) = x_2(i) = 1$. Наконец для блока $G_i\{\bar{e}\}$ не являющегося 2- пучком его ациклическим спектром $\mathbf{X}(i) = (x_1(i), x_2(i)), x_1(i) > 1$. Если $\alpha = \{B_1, B2\}$— базовый ряд графа G , то след $\alpha_i = B_1 \bigcap E(G_i\{\bar{e}\}), B_2 \bigcap E(G_i\{\bar{e}\})$ 2-разделения есть базовый ряд графа подгафа т.е. $x_1(i) = |E(G_i\{\bar{e}\})|, x_2 = |E(G_i\{\bar{e}\})|$. Поэтому (см.[8])

$$\sum_{i=1}^{d(e)} x_1(i) = x_1, \sum_{i=1}^{d(e)} x_2(i) = x_2 - 1.$$

Нам понадобиться в разделе 4 следующий факт о 2-связном 2-лесистом графе (см.[8]).

Утверждение 1. *Пусть — 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром* (x_1, x_2), $x_2 < x_1$. *Тогда в графе* G *существует ребро* e *такое, что подграф* $G\{e\}$, *полученный из* G *стягиванием ребра* e *(т.е. отождествлением его концевых вершин и удалением ребра* e*)— также 2-связные 2-лесистые граф (ациклический спектр графа* $G\{e\}$ *есть* $(x_1 - 1, x_2)$).

3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛЕ ОСТОВОВ ГРАФА

Пусть — граф G и ребро $e \in E(G)$. Тогда

$$N(G) = N'\{e\} + N(G\{\bar{e}\}), \tag{1}$$

где $N(L)$ - число остовов графа L, $G\{e\}$, $G\{\bar{e}\}$ графы получаются из графа G стягиванием и удалением ребра e соответственно.

При этом $|V(G)\{e\} = |V(G)| - 1$, $|E(G)\{e\} = |E(G)| - 1$,$|V(G)\{\bar{e}\}| = V(G)$, $|E(G)\{\bar{e}\} = |E(G)| - 1$, что позваляет использовать рекурентное соотношение (1) для доказательства методом индукции.

Чтобы получить нужные нам неравества на число остовов 2-лесистого и 2-связного графа на м понадобиться вероятностная модель надежности топологии сети.

Вероятностной моделью надежности топологии сети служит случайный граф $(G; p)$ с бернуллиевским случайным множеством ребер $(E(G); p)$, вероятность связности $R(G; p)$

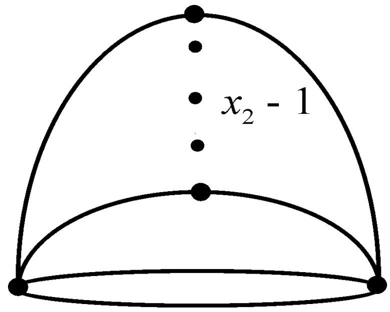

Рис. 2

которого рассматривается как надежность топологии сети. В этой модели имеют дело с семейством подгррафов графа G и каждому такому подграфу H приписана мультипликативная мера

$$\mu(H;p) = \prod_{i \in E(H)} p(i) \prod_{j=E(G)-E(H)} q(j), \tag{2}$$

где $p : EG \to [0,1]$ - надежность линии, соответствующей ребру i ; $q(i) = 1 - p(i)$;

$$R(G;p) = \sum \mu(H;p),$$

где суммирование идет по связным подграфам. Если $p(i) = p$ для всех $i \in E(G)$, то случайный граф (G,p) называют изотропным и обозначают через $(G;p)$. Вероятность связности $R(G,p)$ изотропного случайного графа $(G;p)$- полином от p. Нам понадобиться только изотропный случайный граф . Из (2),(3) следует, что при $p = 0(1)$

$$R(G;p) = N(G)p^{r(G)} + o(p^{r(G)}), \tag{3}$$

где ранг связного графа G, $N(G)$— число оставов графа G. Вероятность связности $R(G;p)$ изотропного случайного графа $G(G;p)$, порожденного связным 2-лесистым графом G с ациклическим спектром (x_1,x_2) может быть оценена снизу следующим образом:

$$p^{x_1-x_2}(1-q^2)^{x_2} \le R(G_j;p) \tag{4}$$

Оценка (4) есть частный случай нижней оценки надежности изотропного случайного матроида (вероятность того, что ранг изотропного бернулиевского случайного множества $(E;p)$ равен рангу матроида в терминах ациклического спектра матроида (см.[1, 7]).

В [8] оценка улучшена за счет привлечения понятия 2-связности. Если G — 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром (x_1,x_2), то (см. [8])

$$p^{x_1-x_2}R(L(x_2);p) \le R(G;p), \tag{5}$$

где мультиграф $L(x_2)$ представленный на рис.2.

Если $x_2 > 1$, то оценка (5) лучше (4).

Из неравенств (4),(5) и асимтотического соотношения (3) следуют утверждения 1,2.

Утверждение 2. *Пусть G— 2-лесистый граф с ациклическим спектром (y_1,y_2) и $N(G)$ число остовов графа G. Тогда*

$$2^{y_2} \le N(G). \tag{6}$$

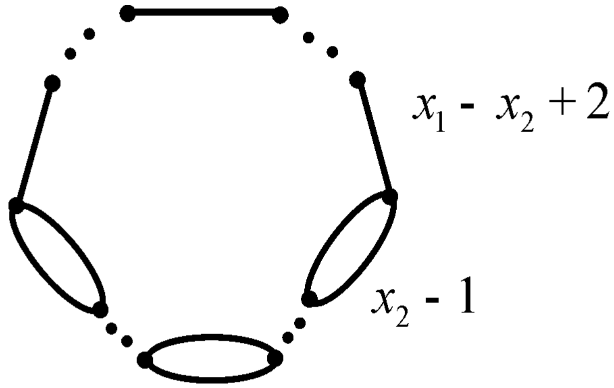

Рис. 3

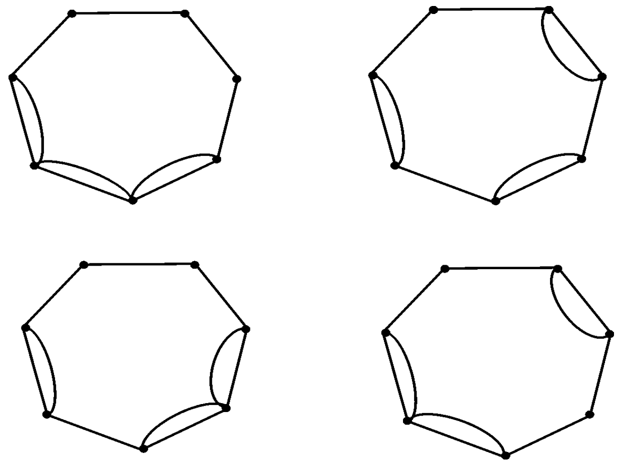

Рис. 4

2-остовым графом называют 2-лесистый граф с ациклическим спектром (x_1, x_2) при $x_1 = x_2$.

Утверждение 3. *Пусть G — 2-связный 2-остовый граф. Тогда*

$$N(L_r) \leq N(G),$$

где L_r граф представленный на рис.1 $(x_2 = r)$

4. 2-СВЯЗНЫЕ 2-ЛЕСИСТЫЕ ГРАФЫ С АЦИКЛИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ x_1, x_2 С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОСТОВОВ

В [3, 4] без доказательства утверждалось, что минимум числа остовов в классе $L(x_1, x_2)$ 2-связных 2-лесистых графов с ациклическим спектром $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ достигается на следующем мультиграфе $T(\mathbf{X})$.

Пусть $S(x_1, x_2)$— мультицикл с ациклическим спектром (x_1, x_2) отвечающий другому распределению 2-пучков по циклу на $x_1 + 1$ вершине. Например, на рис.4 представлены все такие неизомрфные мультициклы с ациклическим спектром $(6, 4)$, включая граф $T(x_1, x_2)$.

При $x_2 = 1$ или $x_1 = x_2$ существует один единственный такой мультицикл (см.рис.5).

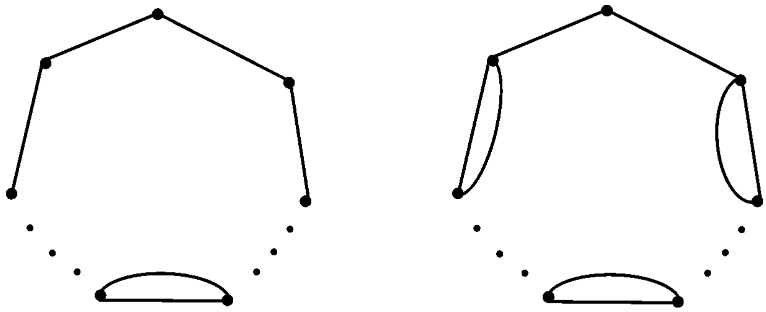

Рис. 5

При $1 < x_2 < x_1$ таких мультициклов может быть несколько. В этом случае индукцией по $x_1 + x_2$ (применяя рекурентное соотношение (2) для ребра мультицикла, не принадлежащего 2-пучку) легко показать что все такие мультициклы имеют одно и тоже число остовов. Например, графы на рис.4 имееют 44 остава. Поэтому далее мы будем иметь дело только с мультициклом $T(x_1, x_2)$.

Теорема 1. *Пусть G — 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром (x_1, x_2) и $T(x_1, x_2)$— мультиграф, представленный на рис.3. Тогда*

$$N(T(x_1, x_2)) \leq N(G). \tag{7}$$

Доказательство. Применим индукцию по числу ребёр $m = x_1 + x_2$. Для $m = 2$ 2-связный 2-лесистый граф G с ациклическим спектром $(1, 1)$ единственен - это граф $T(1, 1)$. Отметим, что 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром $(x_1, 1)$ единственен — это цикл на $x_1 + 1$ вершинах. Пусть теперь G— 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром (x_1, x_2) и $m = x_1 + x_2 > 2$. Возможны два случая:1)$x_2 < x_1$, 2)$x_1 = x_2$

Случай 1. Используем здесь рекурентное соотношение (2). В графе G применим его к ребру e такому, что граф $G\{e\}$ также 2-связный 2 -лесистый (согласно утверждения 1 такое ребро существует). Имеем

$$N(G) = N(G\{e\}) + N(G\{\bar{e}\}). \tag{8}$$

В графе $T(x_1, x_2)$ применим соотношение (2) к произвольному ребру f, не принадлежащему 2-пучку. Имеем

$$N(T(x_1, x_2)) = N(T(x_1, x_2)\{f\}) + N(T(x_1, x_2)\{\bar{f}\}). \tag{9}$$

Докажем, что $N(G\{e\}) \geq N(T(x_1, x_2)\{f\})$, $N(G\{\bar{e}\}) \geq N(T(x_1, x_2)\{\bar{f}\})$; тогда и $N(G) \geq N(T(x_1, x_2))$.

Граф $G\{e\}$— 2-связный 2-лесистый граф с ациклическим спектром $(x_1 - 1, x_2)$. Так как $x_1 - x_2 \geq 3$, то граф $T(x_1, x_2)\{f\}$ есть $T(x_1 - 1, x_2)$. По предположению индукции

$$N(T(x_1, x_2)) = N(T(x_1, x_2))\{f\} \leq N(G\{e\}). \tag{10}$$

Ациклический спектр связного 2-лесистого графа $G\{\bar{e}\}$ есть $(x_1, x_2 - 1)$, если $x_2 > 1$. Согласно утверждению 2

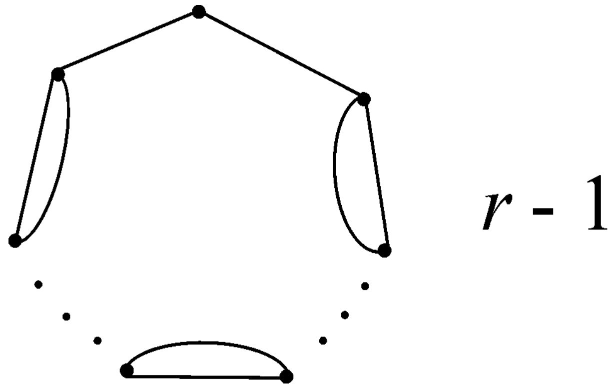

Рис. 6

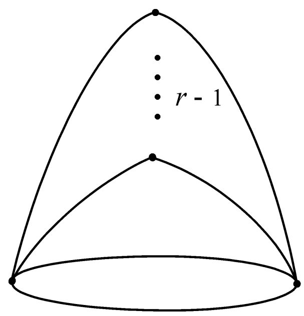

Рис. 7

$$2^{x_2-1} \leq N(G\{\bar{e}\}) \tag{11}$$

Граф $T(x_1, x_2)\{\bar{f}\}$ есть связное соединение $x_1 - x_2 + 1$ моста и $(x_2 - 1)$ пучка, поэтому

$$N(T(x_1, x_2)\{\bar{f}\} = 2^{x_2-1}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что

$$2^{x_2-1} = N(T(x_1, x_2) \leq N(G\{\bar{e}\}). \tag{13}$$

Случай 2. Положим $x_1 = x_2 = r$ и обозначим граф $T(x_1, x_2)$ для этого случая через $T(2)$ (см. рис.6, а так же рис.5)

В [8] было доказано, что минимум числа остовов в классе 2-связных 2-лесистых графов ранга r достигается на следующем графе $U(r)$.

Докажем (индукцией по r), что графы $T(r)$ и $U(r)$ имеют равное число остовов, т.е. $N(T(r)) = N(U(r))$. При $r = 1$ это утверждение уже доказано в базисе индукции теоремы, ибо $T(1) = U(1)$. Докажем теперь, что $N(T(r + 1)) = N(U(r))$. Применим дважды рекурентное соотношение(1). В графе $T(r + 1)$ сначала для ребра a произвольного 2-пучка, а затем в графе $T(r + 1)\{\bar{a}\}$ для ребра b, кратному ребру a в $T(r + 1)$. Имеем

$$N(T(r+1)) = N(T(r+1)\,\{a\} + N(T(r+1)\,\{\bar{a}, b\}) + N(T(r+1)\overline{\{a, b}\}). \tag{14}$$

В графе $U(r+1)$ сначала для ребра c произвольной вилки, а затем в граф $U(r+1)\{c\}$ для произвольного ребра a в пучке. Имеем

$$N(U(r+1)) = N(U(r+1))\{c,d\} + N(U(r+1))\{c,\bar{d}\} + N(U(r+1))\{\bar{c}\}. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$N(T(r+1))\{a\} = N(T(r+1))\{\bar{a},b\} = N(T(r)), \tag{16}$$

$$N(U(r+1))\{c,\bar{d}\} = N(U(r+1)),\{\bar{c}\} = N(U(r)). \tag{17}$$

Граф $T(r+1)\overline{\{a,b\}}$ есть связный связное соединение последовательное соединение двух мостов и $(r-2)$ 2-пучков, поэтому

$$N(T(r+1))\overline{\{a,b\}} = 2^{r-2} \tag{18}$$

Граф $U(r+1)\{c,d\}$ есть связное звездное соединение $(r-2)-x$ 2-пучков, поэтому

$$N(U(r+1))\{c,d\} = 2^{r-2} \tag{19}$$

Ввиду (16),(17),(18),(19) соотношения (14),(15) принимают следующий вид

$$N(T(r+1)) = 2^{r-2} + 2N(T(r)), \tag{20}$$

$$N(U(r+1)) = 2^{r-2} + 2N(U(r)). \tag{21}$$

Но по предположению индукции $N(T(r)) = N(U(r))$, согласно (20),(21), $N(T(r+1)) = N(U(r+1))$ что завершает доказательство теоремы...

Определение. Если G не есть мультицикл вида $S(x_1,x_2)$, то основном неравенстве (7) теоремы 1 имеет место строгое неравенство.

Доказательство. Пусть в (7) имеет место равенство. Из неравенства следует, $G\{\bar{e}\}$ что есть последовательное связное соединение $(x_1-x_2)+1$ мостов и (x_2-1)-го 2-пучков. Поэтому $G = S(x_1,x_2)$.

Как отмечалось графы рис.4 имеют 44 остова Число 2-разрезов в них равно На рис.8 представлен граф с наибольшим числом 2-разрезов равным 8. Нетрудно проверить, однако, что граф имеет уже 52 остова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рогинский В.Н., Харкевич А.Д., Шнепс М.А. и др. *Теория сетей связи.* Под ред. В.Н.Рогинского. — М.: Радио и связь, 1981.

2. Емиричев В.А. *Лекции по теории графов.* — М.: Наука, 1990.

3. Polessky V.P.*Some open network reliability problems.* Manuscript, 1993, unpublished

4. Полесский В.П. *Достижимые границы вероятности полного ранга случайного подматроида.* Проблемы передачи информации. Том 31, №4, 1995, С.81-99

5. Полесский В.П.*Нижние оценки вероятности связности для некоторых классов случайных графов.* Проблемы передачи информации. Том 29, №2, 1993, С.85-95

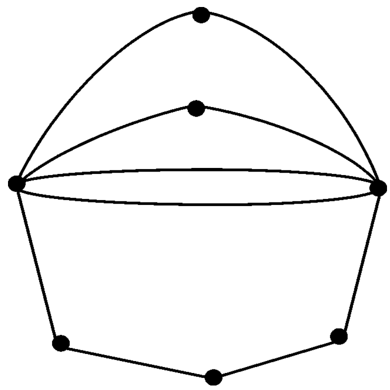

Рис. 8

6. Ball M.O., Colbourn C.J., Provan J.S.*Network Reliability* Handbook of Operations Research, Chapter 11, New York, 1995, p.673-762.

7. Полесский В.П. *Оценки вероятности связности случайного графа.* Проблемы передачи информации. Том 26, №1, с.90-98

8. *Нижние оценки вероятности связности для некоторых классов случайных графов.* Проблемы передачи информации. Том 29, №2, 1993, с.85-95

9. Полесский В.П.*Эффективные границы надежности топологии сети. Перспективные средства телекоммуникаций.* Интегрированные системы связи. Итоговый отчет за 1992 г., Москва, ИППИ РАН, с.221-261