Информационные процессы, Том 4, № 1, 2004, стр. 32–45.

Марковская модель системы обслуживания с двумя типами заявок, дисциплиной случайного выбора на обслуживание и общим накопителем конечной емкости[1]

А.В.Печинкин*, **С.И.Тришечкин****

**Институт проблем информатики, Российская академия наук, Москва, Россия*

***Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана*

Поступила в редколлегию 16.12.2003

Аннотация—Рассматривается марковская модель многолинейной системы массового обслуживания с входящим потоком заявок двух типов, общим накопителем конечной емкости и дисциплиной случайного выбора заявки из очереди на обслуживание. Для этой системы получены соотношения, позволяющие эффективно вычислять стационарные распределения основных характеристик обслуживания. Приводятся примеры расчетов, выполненных с помощью программной реализации модели.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим n-линейную систему массового обслуживания (СМО) марковского типа с входящим потоком заявок двух типов, общим накопителем конечной емкости r и дисциплиной случайного выбора заявки из очереди на обслуживание (RANDOM). Эта система описывается следующим образом.

Процесс поступления и обслуживания заявок становится марковским при введении дополнительных состояний (фаз). Его функционирование определяется матрицами $\Lambda^{(u)}$, $\Lambda_k^{(u)}$, $k=\overline{0,n-1}$, $u=1,2$, матрицами $M^{(u)}$, $u=1,2$, M_k, $k=\overline{1,n}$, и матрицами N и N_k, $k=\overline{0,n-1}$ (размеры матриц определяются числами I и I_k, $k=\overline{0,n-1}$, которые будем называть числами фаз процесса поступления-обслуживания заявок, или просто числами фаз) и протекает так.

Если в системе находится k, $k=\overline{0,n-1}$, заявок и фаза равна i, $i=\overline{1,I_k}$, то с интенсивностью $(\Lambda_k^{(u)})_{ij}$, $u=1,2$, в систему поступает новая заявка u-го типа, которая тут же начинает обслуживаться, и фаза становится равной j, $j=\overline{1,I_{k+1}}$. Кроме того, с интенсивностью $(N_k)_{ij}$ в систему не поступают заявки и не заканчивается обслуживание ни одной из k заявок, но фаза становится равной j, $j=\overline{1,I_k}$. Наконец, если дополнительно $k\ge 1$, то с интенсивностью $(M_k)_{ij}$ заканчивается обслуживание одной из k заявок (это может быть заявка любого типа) и фаза становится равной j, $j=\overline{1,I_{k-1}}$.

Если же в системе все приборы заняты, в очереди имеется k_1 заявок первого типа, k_2 заявок второго типа, $k_1+k_2=\overline{0,r-1}$, и фаза равна i, $i=\overline{1,I}$, то с интенсивностью $(\Lambda^{(u)})_{ij}$, $u=1,2$, в систему поступает новая заявка u-го типа, увеличивая соответствующую очередь на единицу, и фаза становится равной j, $j=\overline{1,I}$. Кроме того, с интенсивностью $(N)_{ij}$ в систему не поступают заявки и не заканчивается обслуживание ни одной из n заявок на приборах, но фаза становится равной j, $j=\overline{1,I}$. Наконец, если дополнительно $k_1+k_2\ge 1$, то с интенсивностью $k_u(M^{(u)})_{ij}/(k_1+k_2)$, $u=1,2$, заканчивается обслуживание одной из n заявок на приборах, на освободившийся прибор поступает заявка u-го типа и фаза становится равной j, $j=\overline{1,I}$, а если $k_1=k_2=0$, то, как и ранее, с интенсивностью $(M_n)_{ij}$ заканчивается обслуживание одной из n заявок на приборах и фаза становится равной j, $j=\overline{1,I_{n-1}}$.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 02-07-90147.

Если система полностью загружена ($k_1 + k_2 = r$) и фаза равна i, $i = \overline{1, I}$, то с интенсивностью $(\Lambda^{(1)})_{ij} + (\Lambda^{(2)})_{ij} + (N)_{ij}$ фаза становится равной j, т.е. либо поступающая заявка уходит из системы и больше в нее не возвращается, либо происходит смена фазы без поступления заявки. Кроме того, с интенсивностью $k_u(M^{(u)})_{ij}/r$, $u = 1, 2$, заканчивается обслуживание одной из n заявок на приборах, на освободившийся прибор поступает заявка u-го типа и фаза становится равной j, $j = \overline{1, I}$.

В заключение вводной части отметим, что СМО с дисциплиной случайного выбора на обслуживание исследовались различными авторами. В частности, для анализа системы $M^{[X]}/G/1/\infty$ с такой дисциплиной и пуассоновским неординарным входящим потоком в [1–3] был применен подход, связанный с ветвящимися процессами Крампа–Мода–Ягерса. Метод анализа СМО с марковским входящим потоком однотипных заявок, также основанный на изучении ветвящихся процессов специального типа, предложен в [4]. В [5] авторами настоящей статьи был разработан способ исследования однолинейной системы $SM_2/MSP/1/r$, который затем в [6] ими же был обобщен на многолинейную СМО $SM_2/MSP/n/r$. Наконец, упомянем еще [7, 8], в которых рассматривались однолинейные системы с двумя типами заявок, марковским входящим потоком, а также общей очередью для заявок обоих типов и раздельными очередями для заявок каждого типа.

Однако во всех этих работах стационарные распределения, связанные с временем пребывания заявки в системе, получены в терминах преобразований Лапласа–Стилтьеса. В настоящей статье для описанной выше марковской модели СМО получены выражения, позволяющие, по крайней мере, для систем с относительно небольшим объемом накопителя создавать эффективные вычислительные процедуры.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Функционирование рассматриваемой СМО описывается марковским процессом с множеством состояний

$$\mathcal{X} = \{(i, k),\ \ i = \overline{1, I_k},\ \ k = \overline{0, n-1}\} \cup \{(i, k_1, k_2),\ \ i = \overline{1, I},\ \ k_1, k_2 \geq 0,\ \ k_1 + k_2 \leq r\},$$

где состояние (i, k) соответствует фазе (процесса поступления и обслуживания заявок) i и наличию k заявок в системе (все они обслуживаются на приборах), а состояние (i, k_1, k_2) — фазе i и очереди из k_1 заявок первого типа и k_2 заявок второго типа (все n приборов заняты обслуживанием заявок).

Инфинитезимальная матрица U марковского процесса состоит из подматриц U_k^l, $k, l = \overline{0, n-1}$, U_{k_1,k_2}^l, $k_1, k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 \leq r$, $l = \overline{0, n-1}$, $U_k^{l_1,l_2}$, $k = \overline{0, n-1}$, $l_1, l_2 \geq 0$, $l_1 + l_2 \leq r$, и $U_{k_1,k_2}^{l_1,l_2}$, $k_1, k_2, l_1, l_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 \leq r$, $l_1 + l_2 \leq r$. При этом

$$U_k^k = N_k,\ \ k = \overline{0, n-1}, \tag{1}$$

$$U_k^{k+1} = \Lambda_k^{(1)} + \Lambda_k^{(2)},\ \ k = \overline{0, n-2}, \tag{2}$$

$$U_k^{k-1} = M_k,\ \ k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

$$U_{0,0}^{n-1} = M_n, \tag{4}$$

$$U_{n-1}^{0,0} = \Lambda_{n-1}^{(1)} + \Lambda_{n-1}^{(2)}, \tag{5}$$

$$U_{k,l}^{k,l} = N,\ \ k, l \geq 0,\ \ k + l \leq r - 1, \tag{6}$$

$$U_{k,l}^{k+1,l} = \Lambda^{(1)},\ \ k, l \geq 0,\ \ k + l \leq r - 1, \tag{7}$$

$$U_{k,l}^{k,l+1} = \Lambda^{(2)},\ \ k, l \geq 0,\ \ k + l \leq r - 1, \tag{8}$$

$$U_{k,l}^{k,l} = N + \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)},\ \ k, l \geq 0,\ \ k + l = r, \tag{9}$$

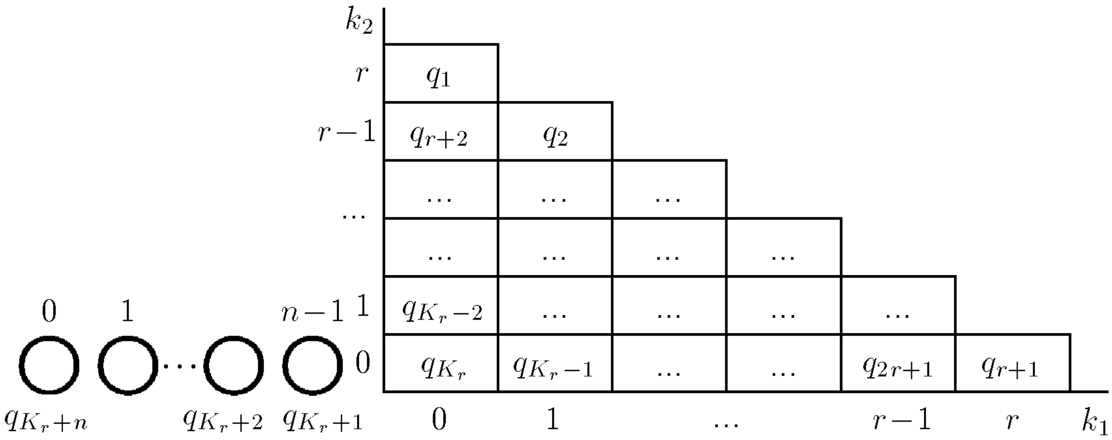


Рис. 1. Нумерация состояний марковского процесса

$$U_{k,l}^{k-1,l} = \frac{k}{k+l} M^{(1)}, \;\; k \geq 1, \;\; l \geq 0, \;\; k+l \leq r, \tag{10}$$

$$U_{k,l}^{k,l-1} = \frac{l}{k+l} M^{(2)}, \;\; k \geq 0, \;\; l \geq 1, \;\; k+l \leq r. \tag{11}$$

Остальные подматрицы U_k^l, U_{k_1,k_2}^l, $U_k^{l_1,l_2}$ и $U_{k_1,k_2}^{l_1,l_2}$ являются нулевыми.

Обозначим через $\vec{p}_k$, $k = \overline{0, n-1}$, стационарную вероятность того, что в системе находится k заявок (все они обслуживаются на приборах), а через $\vec{p}_{k_1,k_2}$, $k_1, k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 \leq r$, — стационарную вероятность того, что в системе в очереди находится k_1 и k_2 заявок первого и второго типов. Векторная запись соответствует фазам процесса поступления-обслуживания заявок.

Определим вектор $\vec{p}$ как вектор, состоящий из компонентов $\vec{p}_k$ и $\vec{p}_{k_1,k_2}$. Тогда вектор $\vec{p}$ удовлетворяет системе уравнения равновесия (СУР)

$$\vec{p} U = \vec{0} \tag{12}$$

с условием нормировки

$$\sum_{\substack{n_1,n_2 \geq 0,\\ n_1+n_2 \leq r}} \vec{p}_{n_1,n_2} \vec{1} + \sum_{s=0}^{n-1} \vec{p}_s \vec{1} = 1 \tag{13}$$

(здесь и далее $\vec{1}$ означает вектор-столбец $(1, \ldots, 1)^T$, размерность которого определяется либо нижним индексом, либо из контекста).

Для удобства изложения алгоритма решения СУР (12) с условием нормировки (13) проведем нумерацию состояний марковского процесса в зависимости только от числа заявок в системе следующим образом (см. рис. 1). Сначала последовательно нумеруются состояния с общим числом r заявок в очереди, затем — с общим числом $r-1$ и т.д. Очевидно, что число таких состояний равно $K_r = (r+1)(r+2)/2$. Последние номера присваиваются состояниям, при которых в системе имеются свободные приборы. Этих состояний будет еще n.

Таким образом, состояние $(r, 0)$ будет обозначено через q_1, состояние $(r-1, 1)$ — через q_2, $(r-2, 2)$ — через q_3 и т.д. Обозначению q_{K_r+n} состояния с последним номером $K_r + n$ будет соответствовать состояние марковского процесса без заявок в системе.

Естественно, каждое состояние q_k, полученное таким образом, состоит из I (для $k \leq K_r$) или I_{n-k+K_r} (для $k > K_r$) состояний марковского процесса, отвечающих различным значениям фаз процесса поступления и обслуживания.

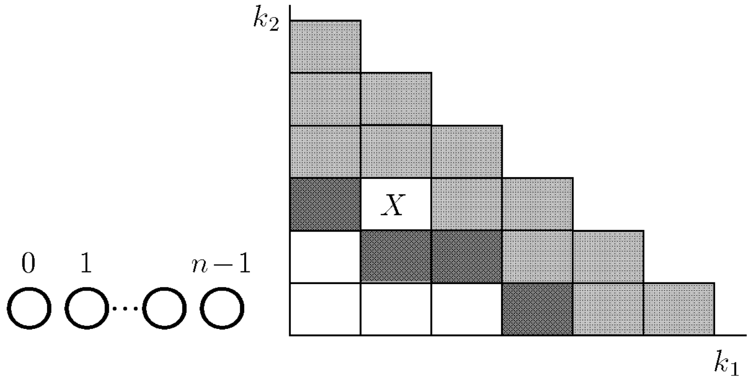


Рис. 2. Последовательность пересчетов матрицы U

Для описания алгоритма решения переобозначим подматрицы матрицы U следующими образом. Обозначим через $\Lambda_{ij}^k,\ k=\overline{j,i+1}\ \ M_{ij}^k,\ k=\overline{0,j},\ N_{ij}^k,\ k=\overline{0,i}$, инфинитезимальные матрицы интенсивностей переходов с позиции j на диагонали i (т.е. позиции, соответствующей состоянию с i заявками в очереди, из которых j — первого типа) в позицию k на диагонали выше (матрица Λ_{ij}^k), на той же диагонали (матрица N_{ij}^k) и на диагонали ниже (матрица M_{ij}^k); аналогичным образом введем матрицы Λ_i^{i+1}, N_i^i, $M_{i+1}^i,\ i=\overline{0,n-1}$, определяющие интенсивности переходов между состояниями с частично свободными приборами.

Формулы для начального заполнения шести введенных наборов матриц несложно получить из вышеприведенных определений и выражений (1)–(11) для подматриц инфинитезимальной матрицы U.

Кроме того, введем матрицы F_{ij}^k и G_{ij}^k вероятностей перехода с позиции j на диагонали i в позицию k на той же диагонали и на диагонали ниже. Выражения для этих матриц выглядят следующим образом:

$$F_{ij}^k=\int\limits_0^\infty e^{N_{ij}^j t}N_{ij}^k\,dt=-(N_{ij}^j)^{-1}N_{ij}^k,\ \ k>j,$$

$$G_{ij}^k=\int\limits_0^\infty e^{N_{ij}^j t}M_{ij}^k\,dt=-(N_{ij}^j)^{-1}M_{ij}^k,\ \ k\le j.$$

Алгоритм решения СУР (12) с условием нормировки (13) состоит из следующих действий.

Последовательно исключаются состояния q_k с наименьшими номерами и для полученных марковских процессов пересчитываются инфинитезимальные матрицы Λ_{ij}^k, N_{ij}^k, M_{ij}^k. На рис. 2 изображен пример пересчета этих матриц. Светло-серым изображены уже исключенные состояния, темно-серым — (еще не исключенные) состояния, интенсивности переходов между которыми должны быть пересчитаны на данном шаге, а значком “X"отмечено состояние, исключаемое в данный момент. Как нетрудно видеть, Λ_{ij}^k, N_{ij}^k и M_{ij}^k полностью определяют все изменяемые матрицы.

Отметим, что в ходе работы алгоритма значения матриц Λ_{ij}^k, N_{ij}^k, M_{ij}^k, Λ_i^{i+1}, N_i^i, M_{i+1}^i, F_{ij}^k и G_{ij}^k изменяются. Будем обозначать значком тильды значения, получаемые на текущем шаге.

Если исключаемое состояние лежит на диагонали i и позиции j, то формулы, по которым производится пересчет изменяемых матриц, будут следующими:

$$\tilde N_{ik}^l=N_{ik}^l+N_{ik}^jF_{ij}^l,\ \ k,l>j,$$

$$\tilde M_{ik}^l=M_{ik}^l+N_{ik}^jG_{ij}^l,\ \ k>j,\ \ l\le j,$$

$$\tilde{\Lambda}^l_{i-1k} = \Lambda^l_{i-1k} + \Lambda^j_{i-1k} F^l_{ij}, \ \ l > j, \ \ k \le j,$$

$$\tilde{N}^l_{i-1k} = N^l_{i-1k} + \Lambda^j_{i-1k} G^l_{ij}, \ \ k \le j, \ \ l \le j,$$

а если исключаемое состояние соответствует $i, \ 0 < i < n$, занятым приборам, то пересчет производится по формулам

$$\tilde{N}^{i-1}_{i-1} = N^{i-1}_{i-1} + \Lambda^i_{i-1} (N^i_i)^{-1} M^{i-1}_i.$$

Теперь для марковского процесса с одним состоянием q_{K_r+n} стационарные вероятности состояний определяются из уравнения

$$p_{q_{K_r+n}} N^0_0 = \vec{0}.$$

Затем последовательно добавляются исключенные ранее состояния q_k с наибольшими номерами и находятся стационарные вероятности $\vec{p}_{q_k}$ (здесь используется факт равенства с точностью до константы стационарных вероятностей общих состояний всех полученных марковских процессов (см. [9]), что позволяет на каждом шаге вычислять только один вектор $\vec{p}_{q_k}$). Вычисление этих векторов производится по формуле

$$\vec{p}_i N^i_i - \vec{p}_{i-1} \Lambda^i_{i-1} = \vec{0}$$

для системы с $i, \ i < n$ состояниями (добавляется состояние, соответствующее i занятым приборам, причем матрицы N^i_i и Λ^i_{i-1} берутся для системы с i состояниями), и по формуле

$$\vec{p}_{j,i-j} N^j_{ij} = \sum_{k=0}^{\min(j,i-1)} \vec{p}_{k,i-k-1} \Lambda^j_{i-1,k} + \sum_{k=j+1}^{i} \vec{p}_{k,i-k} N^j_{ik}$$

для системы с числом состояний более n (добавляется состояние, соответствующее i приборам в очереди, из которых j первого типа, а матрицы N^k_{ij} и $\Lambda^j_{i-1,k}$ берутся для системы, у которой добавленное состояние имеет наименьший номер). Напомним, что нумерация по первому и второму нижнему индексу у вектора $\vec{p}$ соответствует количеству частиц первого и второго типа в очереди, а у матриц Λ и N — диагоналям и позициям на них.

Наконец, по формуле (13) производится нормировка полученных стационарных вероятностей состояний марковских процессов.

Отметим, что алгоритмы решения СУР, аналогичные приведенному здесь, для других СМО можно найти, например, в [5, 6, 8, 10].

Зная стационарные вероятности $\vec{p}_k$ и $\vec{p}_{k_1,k_2}$, нетрудно определить и другие стационарные характеристики очереди. Так, стационарная интенсивность $\lambda^{(u)}$ входящего потока заявок u-го типа, $u = 1, 2$, определяется формулой

$$\lambda^{(u)} = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{p}_k \Lambda^{(u)}_k \vec{1} + \sum_{\substack{k_1,k_2 \ge 0 \\ k_1+k_2 \le r}} \vec{p}_{k_1,k_2} \Lambda^{(u)} \vec{1},$$

стационарные вероятности $\vec{\pi}^{(u)}_k, \ k = \overline{0, n-1}$, того, что поступающая заявка застанет на приборах k заявок, и $\vec{\pi}^{(u)}_{k_1,k_2}, \ k_1, k_2 \ge 0, \ k_1 + k_2 \le r$, того, что поступающая заявка застанет все приборы занятыми и в очереди k_1 и k_2 заявок первого и второго типов, — формулами

$$\vec{\pi}^{(u)}_k = \frac{1}{\lambda^{(u)}} \vec{p}_k \Lambda^{(u)}_k,$$

$$\vec{\pi}^{(u)}_{k_1,k_2} = \frac{1}{\lambda^{(u)}} \vec{p}_{k_1,k_2} \Lambda^{(u)}$$

(здесь векторная запись соответствует фазам процесса поступления-обслуживания заявок непосредственно после поступления заявки), стационарная вероятность $\pi^{(u)}$ потери заявки u-го типа — формулой

$$\pi^{(u)} = \frac{1}{\lambda^{(u)}} \sum_{k=0}^{r} \vec{p}_{k,r-k} \Lambda^{(u)} \vec{1}.$$

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ НАЧАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Обозначим через $W_{k,l}(x),\ k,l \geq 0,\ k+l \leq r-1$, вероятность того, что заявка (любого типа) будет ожидать начала обслуживания время больше x, при условии, что в начальный момент времени все приборы были заняты и в системе в очереди, кроме выделенной заявки, находилось k заявок первого и l второго типов. Матричная запись соответствует фазам в начальный момент и в момент x.

Положим

$$B(x) = e^{Nx}, \tag{14}$$

$$B^*(x) = e^{N^*x}, \tag{15}$$

где $N^* = N + \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}$. Тогда

$$W_{0,0}(x) = B(x) + \int\limits_0^x B(y)[\Lambda^{(1)} W_{1,0}(x-y) + \Lambda^{(2)} W_{0,1}(x-y)]\, dy, \tag{16}$$

$$W_{k,0}(x) = B(x) + \int\limits_0^x B(y)\Big[\frac{k}{k+1} M^{(1)} W_{k-1,0}(x-y) +$$

$$+ \Lambda^{(1)} W_{k+1,0}(x-y) + \Lambda^{(2)} W_{k,1}(x-y)\Big] dy,\ \ k = \overline{1, r-2}, \tag{17}$$

$$W_{0,l}(x) = B(x) + \int\limits_0^x B(y)\Big[\frac{l}{l+1} M^{(2)} W_{0,l-1}(x-y) +$$

$$+ \Lambda^{(1)} W_{1,l}(x) + \Lambda^{(2)} W_{0,l+1}(x)\Big] dy,\ \ l = \overline{1, r-2}, \tag{18}$$

$$W_{r-1,0}(x) = B^*(x) + \frac{r-1}{r} \int\limits_0^x B^*(y) M^{(1)} W_{r-2,0}(x-y)\, dy, \tag{19}$$

$$W_{0,r-1}(x) = B^*(x) + \frac{r-1}{r} \int\limits_0^x B^*(y) M^{(2)} W_{0,r-2}(x-y)\, dy, \tag{20}$$

$$W_{k,l}(x) = B(x) + \int\limits_0^x B(y)\Big[\frac{k}{k+l+1} M^{(1)} W_{k-1,l}(x-y) + \frac{l}{k+l+1} M^{(2)} W_{k,l-1}(x-y) +$$

$$+ \Lambda^{(1)} W_{k+1,l}(x) + \Lambda^{(2)} W_{k,l+1}(x)\Big] dy,\ \ k,l \geq 1,\ \ k+l \leq r-2, \tag{21}$$

$$W_{k,l}(x) = B^*(x) + \int\limits_0^x B^*(y)\Big[\frac{k}{r} M^{(1)} W_{k-1,l}(x-y) +$$

$$+ \frac{l}{r} M^{(2)} W_{k,l-1}(x-y)\Big] dy,\ \ k,l \geq 1,\ \ k+l = r-1. \tag{22}$$

Если не фиксировать фазу в момент x и ввести векторы

$$\vec{w}_{k,l}(x) = W_{k,l}(x)\vec{1}, \;\; k,l \geq 0, \;\; k+l \leq r-1,$$

$$\vec{b}(x) = e^{Nx}\vec{1}, \quad \vec{b}^*(x) = e^{N^*x}\vec{1},$$

то формулы (16)–(22) примут вид

$$\vec{w}_{0,0}(x) = \vec{b}(x) + \int\limits_0^x B(y)[\Lambda^{(1)}\vec{w}_{1,0}(x-y) + \Lambda^{(2)}\vec{w}_{0,1}(x-y)]\,dy,$$

$$\vec{w}_{k,0}(x) = \vec{b}(x) + \int\limits_0^x B(y)\Big[\frac{k}{k+1}M^{(1)}\vec{w}_{k-1,0}(x-y) +$$

$$+ \Lambda^{(1)}\vec{w}_{k+1,0}(x-y) + \Lambda^{(2)}\vec{w}_{k,1}(x-y)\Big]dy, \;\; k = \overline{1, r-2},$$

$$\vec{w}_{0,l}(x) = \vec{b}(x) + \int\limits_0^x B(y)\Big[\frac{l}{l+1}M^{(2)}\vec{w}_{0,l-1}(x-y) + \Lambda^{(1)}\vec{w}_{1,l}(x) + \Lambda^{(2)}\vec{w}_{0,l+1}(x)\Big]dy, \;\; l = \overline{1, r-2},$$

$$\vec{w}_{r-1,0}(x) = \vec{b}^*(x) + \frac{r-1}{r}\int\limits_0^x B^*(y)M^{(1)}\vec{w}_{r-2,0}(x-y)\,dy,$$

$$\vec{w}_{0,r-1}(x) = \vec{b}^*(x) + \frac{r-1}{r}\int\limits_0^x B^*(y)M^{(2)}w_{0,r-2}(x-y)\,dy,$$

$$\vec{w}_{k,l}(x) = \vec{b}(x) + \int\limits_0^x B(y)\Big[\frac{k}{k+l+1}M^{(1)}\vec{w}_{k-1,l}(x-y) + \frac{l}{k+l+1}M^{(2)}\vec{w}_{k,l-1}(x-y) +$$

$$+ \Lambda^{(1)}\vec{w}_{k+1,l}(x) + \Lambda^{(2)}\vec{w}_{k,l+1}(x)\Big]dy, \;\; k,l \geq 1, \;\; k+l \leq r-2,$$

$$\vec{w}_{k,l}(x) = \vec{b}^*(x) + \int\limits_0^x B^*(y)\Big[\frac{k}{r}M^{(1)}\vec{w}_{k-1,l}(x-y) +$$

$$+ \frac{l}{r}M^{(2)}\vec{w}_{k,l-1}(x-y)\Big]dy, \;\; k,l \geq 1, \;\; k+l = r-1.$$

Переходя к преобразованиям Лапласа

$$\vec{\omega}_{k,l}(s) = \int\limits_0^x e^{-sx}\vec{w}_{k,l}(x)\,dx, \;\; k,l \geq 0, \;\; k+l \leq r-1,$$

$$\vec{\beta}(s) = \int\limits_0^x e^{-sx}\vec{b}(x)\,dx = (sI-N)^{-1}\vec{1},$$

$$\vec{\beta}^*(s) = \int\limits_0^x e^{-sx}\vec{b}^*(x)\,dx = (sI-N^*)^{-1}\vec{1},$$

$$\beta(s) = \int_0^x e^{-sx} B(x)\,dx = (sI - N)^{-1},$$

$$\beta^*(s) = \int_0^x e^{-sx} B^*(x)\,dx = (sI - N^*)^{-1},$$

имеем

$$\vec{\omega}_{0,0}(s) = \vec{\beta}(s) + \beta(s)[\Lambda^{(1)}\vec{\omega}_{1,0}(s) + \Lambda^{(2)}\vec{\omega}_{0,1}(s)],$$

$$\vec{\omega}_{k,0}(s) = \vec{\beta}(s) + \beta(s)\Big[\frac{k}{k+1}M^{(1)}\vec{\omega}_{k-1,0}(s) + \Lambda^{(1)}\vec{\omega}_{k+1,0}(s) + \Lambda^{(2)}\vec{\omega}_{k,1}(s)\Big],\ \ k = \overline{1, r-2},$$

$$\vec{\omega}_{0,l}(s) = \vec{\beta}(s) + \beta(s)\Big[\frac{l}{l+1}M^{(2)}\vec{\omega}_{0,l-1}(s) + \Lambda^{(1)}\vec{\omega}_{1,l}(s) + \Lambda^{(2)}\vec{\omega}_{0,l+1}(s)\Big],\ \ l = \overline{1, r-2},$$

$$\vec{\omega}_{r-1,0}(s) = \vec{\beta}^*(s) + \frac{r-1}{r}\beta^*(s)M^{(1)}\vec{\omega}_{r-2,0}(s),$$

$$\vec{\omega}_{0,r-1}(s) = \vec{\beta}^*(s) + \frac{r-1}{r}\beta^*(s)M^{(2)}\vec{\omega}_{0,r-2}(s),$$

$$\vec{\omega}_{k,l}(s) = \vec{\beta}(s) + \beta(s)\Big[\frac{k}{k+l+1}M^{(1)}\vec{\omega}_{k-1,l}(s) + \frac{l}{k+l+1}M^{(2)}\vec{\omega}_{k,l-1}(s) +$$

$$+ \Lambda^{(1)}\vec{\omega}_{k+1,l}(s) + \Lambda^{(2)}\vec{\omega}_{k,l+1}(s)\Big],\ \ k,l \ge 1,\ \ k+l \le r-2,$$

$$\vec{\omega}_{k,l}(s) = \vec{\beta}^*(s) + \beta^*(s)\Big[\frac{k}{r}M^{(1)}\vec{\omega}_{k-1,l}(s) + \frac{l}{r}M^{(2)}\vec{\omega}_{k,l-1}(s)\Big],\ \ k,l \ge 1,\ \ k+l = r-1.$$

Из последних формул можно получить систему уравнений для моментов времени ожидания начала обслуживания заявки при условии, что в начальный момент времени все приборы были заняты и в системе в очереди, кроме выделенной заявки, находилось k заявок первого и l второго типов. В частности, средние времена ожидания начала обслуживания $\vec{w}_{k,l}$ удовлетворяет уравнениям

$$\vec{w}_{0,0} = \vec{\omega}_{0,0}(0) = -N^{-1}\vec{1} - N^{-1}[\Lambda^{(1)}\vec{w}_{1,0} + \Lambda^{(2)}\vec{w}_{0,1}],$$

$$\vec{\omega}_{k,0} = -N^{-1}\vec{1} - N^{-1}\Big[\frac{k}{k+1}M^{(1)}\vec{\omega}_{k-1,0} + \Lambda^{(1)}\vec{\omega}_{k+1,0} + \Lambda^{(2)}\vec{\omega}_{k,1}\Big],\ \ k = \overline{1, r-2},$$

$$\vec{\omega}_{0,l} = -N^{-1}\vec{1} - N^{-1}\Big[\frac{l}{l+1}M^{(2)}\vec{\omega}_{0,l-1} + \Lambda^{(1)}\vec{\omega}_{1,l} + \Lambda^{(2)}\vec{\omega}_{0,l+1}\Big],\ \ l = \overline{1, r-2},$$

$$\vec{\omega}_{r-1,0} = -(N^*)^{-1}\vec{1} - \frac{r-1}{r}(N^*)^{-1}M^{(1)}\vec{\omega}_{r-2,0},$$

$$\vec{\omega}_{0,r-1} = -(N^*)^{-1}\vec{1} - \frac{r-1}{r}(N^*)^{-1}M^{(2)}\vec{\omega}_{0,r-2},$$

$$\vec{\omega}_{k,l} = -N^{-1}\vec{1} - N^{-1}\Big[\frac{k}{k+l+1}M^{(1)}\vec{\omega}_{k-1,l} + \frac{l}{k+l+1}M^{(2)}\vec{\omega}_{k,l-1} +$$

$$+ \Lambda^{(1)}\vec{\omega}_{k+1,l} + \Lambda^{(2)}\vec{\omega}_{k,l+1}\Big],\ \ k,l \ge 1,\ \ k+l \le r-2,$$

$$\vec{\omega}_{k,l} = -(N^*)^{-1}\vec{1} - (N^*)^{-1}\Big[\frac{k}{r}M^{(1)}\vec{\omega}_{k-1,l} + \frac{l}{r}M^{(2)}\vec{\omega}_{k,l-1}\Big],\ \ k,l \ge 1,\ \ k+l = r-1.$$

Обозначим теперь через $W^{(u)}(x)$ стационарную вероятность того, что произвольная принятая к обслуживанию заявка u-го типа будет ожидать начала обслуживания время больше x. По формуле полной вероятности имеем

$$W^{(u)}(x) = \frac{1}{1-\pi^{(u)}} \frac{1}{\lambda^{(u)}} \sum_{\substack{k_1,k_2 \geq 0 \\ k_1+k_2 \leq r-1}} \vec{p}_{k_1,k_2} \Lambda^{(u)} \vec{w}_{k_1,k_2}(x). \tag{23}$$

В терминах преобразований Лапласа эта же формула имеет вид

$$\omega^{(u)}(s) = \frac{1}{1-\pi^{(u)}} \frac{1}{\lambda^{(u)}} \sum_{\substack{k_1,k_2 \geq 0 \\ k_1+k_2 \leq r-1}} \vec{p}_{k_1,k_2} \Lambda^{(u)} \vec{\omega}_{k_1,k_2}(s),$$

откуда нетрудно получить стационарное среднее значение $w^{(u)}$ времени ожидания начала обслуживания произвольной принятой к обслуживанию заявки u-го типа:

$$w^{(u)} = \frac{1}{1-\pi^{(u)}} \frac{1}{\lambda^{(u)}} \sum_{\substack{k_1,k_2 \geq 0 \\ k_1+k_2 \leq r-1}} \vec{p}_{k_1,k_2} \Lambda^{(u)} \vec{w}_{k_1,k_2}.$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ $W_{k,l}(x)$

При программной реализации полученных формул наибольшую сложность представляет вычисление матриц $W_{k,l}(x)$. В этом разделе описывается эффективный способ их вычисления, основанный на разложении в степенные ряды.

Обозначим через a модуль минимального диагонального элемента матрицы N. Положим $Q = I + N/a,\ Q^* = I + N^*/a$.

Будем искать матрицы $W_{k,l}(x)$ в виде

$$W_{k,l}(x) = e^{-ax} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ax)^s}{s!} R_{k,l,s}.$$

Тогда из формул (14)–(22) имеем

$$R_{0,0,0} = I, \tag{24}$$

$$R_{0,0,s} = QR_{0,0,s-1} + \frac{1}{a}(\Lambda^{(1)} R_{1,0,s-1} + \Lambda^{(2)} R_{0,1,s-1}),\ \ s \geq 1, \tag{25}$$

$$R_{k,l,0} = I,\ \ k = \overline{0, r-1},\ \ l = \overline{0, r-1}, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} R_{k,0,s} = QR_{k,0,s-1} + \frac{1}{a}\Big(\frac{k}{k+1} M^{(1)} R_{k-1,0,s-1} + \Lambda^{(1)} R_{k+1,0,s-1} + \\ + \Lambda^{(2)} R_{k,1,s-1}\Big),\ \ s \geq 1,\ \ k = \overline{1, r-2}, \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} R_{0,l,s} = QR_{0,l,s-1} + \frac{1}{a}\Big(\frac{l}{l+1} M^{(2)} R_{0,l-1,s-1} + \Lambda^{(1)} R_{1,l,s-1} + \\ + \Lambda^{(2)} R_{0,l+1,s-1}\Big),\ \ s \geq 1,\ \ l = \overline{1, r-2}, \end{gathered} \tag{28}$$

$$R_{r-1,0,s} = Q^* R_{r-1,0,s-1} + \frac{1}{a}\frac{r-1}{r} M^{(1)} R_{r-2,0,s-1},\ \ s \geq 1, \tag{29}$$

$$R_{0,r-1,s} = Q^* R_{0,r-1,s-1} + \frac{1}{a}\frac{r-1}{r} M^{(2)} R_{0,r-2,s-1},\ \ s \geq 1, \tag{30}$$

$$R_{k,l,s} = QR_{k,l,s-1} + \frac{1}{a}\Big(\frac{k}{k+l+1}M^{(1)}R_{k-1,l,s-1} + \frac{l}{k+l+1}M^{(2)}R_{k,l-1,s-1} + $$
$$+ \Lambda^{(1)}R_{k+1,l,s} + \Lambda^{(2)}R_{k,l+1,s}\Big), \ \ k,l \geq 1, \ \ k+l \leq r-2, \ \ s \geq 1, \tag{31}$$

$$R_{k,l,s} = Q^{*}R_{k,l,s-1} + \frac{1}{a}\Big(\frac{k}{r}M^{(1)}R_{k-1,l,s-1} + $$
$$+ \frac{l}{r}M^{(2)}R_{k,l-1,s-1}\Big), \ \ k,l \geq 1, \ \ k+l = r-1, \ \ s \geq 1. \tag{32}$$

При построении графиков функций $W^{(u)}(x)$ необходимо многократно определять их значения при различных значениях аргумента x. Тогда целесообразно вычислять $W^{(u)}(x)$ не непосредственно по формуле (23), а представив (23) в виде

$$W^{(u)}(x) = \frac{1}{\lambda^{(u)}}\frac{1}{1-\pi^{(u)}}e^{-ax}\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s^{(u)}\frac{(ax)^s}{s!}, \tag{33}$$

где

$$\beta_s^{(u)} = \sum_{\substack{k_1,k_2 \geq 0 \\ k_1+k_2<r}} \vec{p}_{k_1,k_2}\Lambda^{(u)}R_{k_1,k_2,s}\vec{1}. \tag{34}$$

Такая организация вычислений позволяет уменьшить объем памяти, необходимый для хранения коэффициентов разложения $R_{k_1,k_2,s}$, и ускорить расчет $W^{(u)}(x)$.

Алгоритм вычисления $W^{(u)}(x)$ выглядит следующим образом: сначала определяются стационарные вероятности $\vec{p}_{k_1,k_2}$ с помощью соотношений раздела 2; затем последовательно определяются коэффициенты $\beta_s^{(u)}$ по формуле (34) и формулам (24)–(32) для $R_{k_1,k_2,s}$; наконец, вычисляется непосредственно $W^{(u)}(x)$ по формуле (33).

5. СИСТЕМА $MAP_2/PH/n/r$

В этом разделе мы кратко остановимся на СМО *MAP*$_2$/*PH*$_2$/*n*/*r*, в которой входящий поток является марковским, а распределение времени обслуживания заявки каждого типа является распределением фазового типа (*PH*-распределением), и покажем, как нужно преобразовать параметры этой системы, чтобы привести ее к разобранной выше общей марковской модели СМО с дисциплиной RANDOM.

Марковский входящий поток определяется квадратными матрицами и A, C_1 и C_2 порядка k, где A — матрица интенсивностей изменения фаз процесса генерации заявок без поступления заявки, C_u — с поступлением заявки u-го типа, $u = 1,2$, и k — число фаз процесса генерации заявок.

Будем обозначать через $\vec{\gamma}_u$ и G_u, $\ u = 1,2$, параметры *PH*-распределения времени обслуживания заявки u-го типа, где $\vec{\gamma}_u$ — вероятностный вектор размерности l_u, G_u — квадратная матрица того же порядка, l_u — число фаз обслуживания заявки u-го типа. Положим $l = l_1 + l_2$.

Для того чтобы привести СМО *MAP*$_2$/*PH*$_2$/*n*/*r* к общей марковской модели, определим число состояний процесса поступления и обслуживания равным kl^i при $i, \ i < n$, занятых приборах и kl^n при всех занятых приборах.

Обозначим через E_i единичную матрицу порядка i, а через $E^{(i)}$ — единичную матрицу порядка l^i. Положим

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix},$$

$$\mu_i = -\sum_{j=1}^{l} G_{ij}, \quad \vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_l),$$

$$\vec{\alpha}_1 = ((\gamma_1)_1, \ldots, (\gamma_1)_{l_1}, 0, \ldots, 0),$$
$$\vec{\alpha}_2 = (0, \ldots, 0, (\gamma_2)_1, \ldots, (\gamma_2)_{l_2}),$$

причем векторы $\vec{\alpha}_u$ имеют размерность l. Матрицы, определяющие марковскую модель, зададим следующим образом:

$$\Lambda_i^{(u)} = C_u \otimes E^{(i)} \otimes \vec{\alpha}_u, \ \ 0 \le i < n, \ \ u = 1, 2,$$
$$\Lambda^{(u)} = C_u \otimes E^{(n)}, \ \ u = 1, 2,$$
$$M^{(u)} = E_k \otimes \sum_{i=0}^{n-1} E^{(i)} \otimes \vec{\mu}^T \otimes \vec{\alpha}_u \otimes E^{(n-i-1)}, \ \ u = 1, 2,$$
$$M_j = E_k \otimes \sum_{i=0}^{j-1} E^{(i)} \otimes \vec{\mu}^T \otimes E^{(j-i-1)}, \ \ 1 \le j \le n,$$
$$N_0 = A,$$
$$N_j = A \otimes E^{(j)} + E_k \otimes \sum_{i=0}^{j-1} E^{(i)} \otimes G \otimes E^{(j-i-1)}, \ \ 1 \le j < n,$$
$$N = A \otimes E^{(n)} + E_k \otimes \sum_{i=0}^{n-1} E^{(i)} \otimes G \otimes E^{(n-i-1)}.$$

6. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ, РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

По полученным формулам было написано программное обеспечение, позволяющее вычислять стационарные вероятности состояний и стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания как для общей марковской модели СМО, так и для СМО $MAP_2/PH_2/n/r$. Программное обеспечение написано в среде визуального программирования Delphi. Программа представляет собой исполняемый файл, предназначенный для любых операционных систем семейства Windows. Она позволяет производить расчет для числа приборов $n \ge 1$ и емкости накопителя $r \ge 2$. Максимальные значения n и r, для которых можно произвести расчет с помощью программного обеспечения, определяются оперативной памятью компьютера.

В качестве первого примера рассмотрим СМО $MAP_2/PH_2/1/2$ со следующими параметрами:

$$A = (-2), \quad C_1 = (1), \quad C_2 = (1),$$
$$l_1 = 1, \quad \gamma_1 = (1), \quad G_1 = (-1),$$
$$l_2 = 1, \quad \gamma_2 = (1), \quad G_2 = (-1).$$

Стационарные вероятности состояний, вычисленные с помощью разработанной программы, представлены на рис. 3.

Таким образом, для данной СМО с суммарной загрузкой, равной двум, стационарная вероятность нахождения в системе в сумме m заявок вдвое больше стационарной вероятности нахождения $m-1$ заявок. Этот результат согласуется с классической теорией.

Если рассмотреть ту же СМО, взяв значения матриц A, C_1 и C_2 вдвое и вчетверо меньше, получим системы с загрузкой ρ, равной 1 и 0,5 соответственно.

Графики стационарных распределений времени ожидания начала обслуживания заявки для трех вариантов значения загрузки приведены на рис. 4. Поскольку в рассмотренных СМО параметры входящих потоков и обслуживания заявок первого и второго типа одинаковые, то заявки обоих типов имеют также одинаковые стационарные характеристики обслуживания.

P(i)	
0	0,0666666666666667

P(i,j)	0	1	2
0	0,133333333333333	0,133333333333333	0,133333333333333
1	0,133333333333333	0,266666666666667	
2	0,133333333333333		

Рис. 3. Стационарное распределение чисел заявок

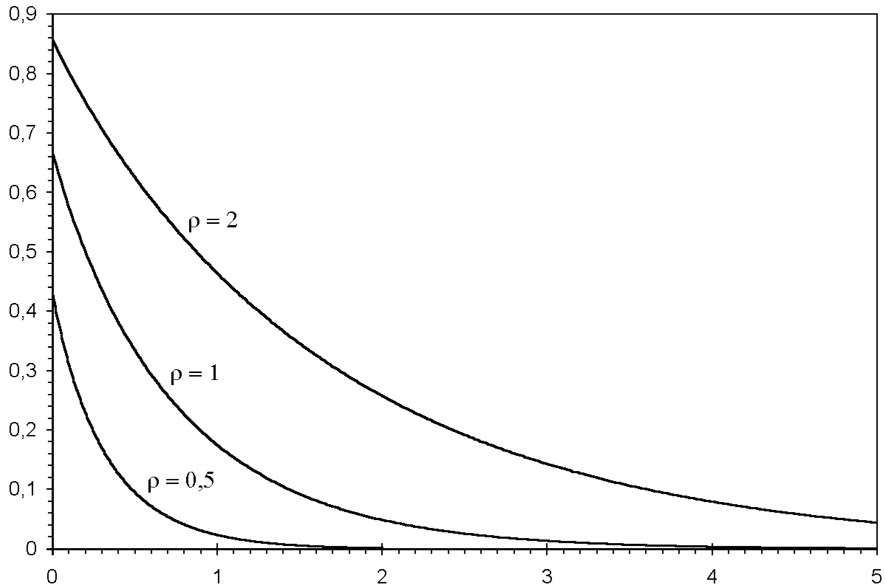


Рис. 4. Стационарные распределения времени ожидания начала обслуживания

В качестве второго примера рассмотрим СМО $MAP_2/PH_2/2/5$ с параметрами:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = 2, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

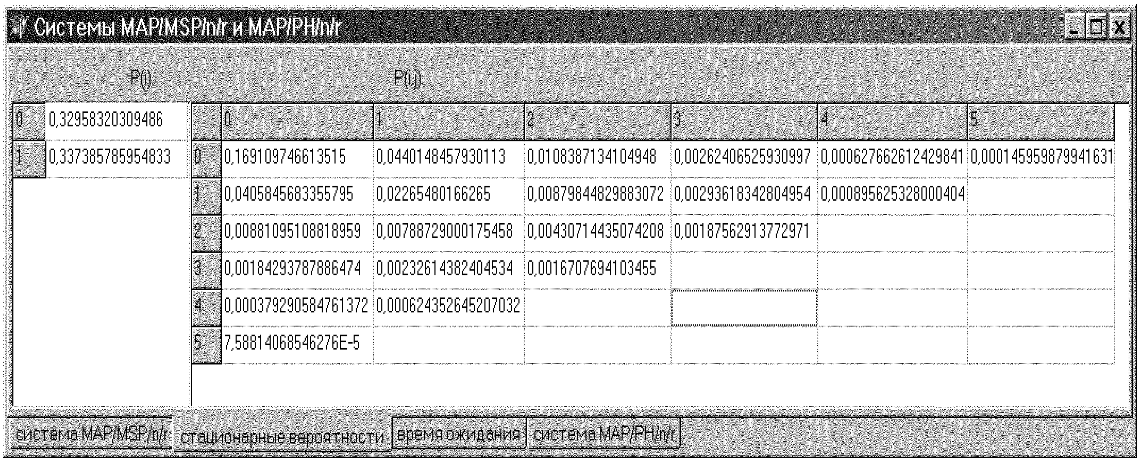
$$l_2 = 1, \quad \gamma_2 = (1), \quad G_2 = (-3).$$

Для этой системы стационарное распределение чисел заявок приведено на рис. 5, а графики стационарных распределений времени ожидания начала обслуживания (различные для заявок разных типов) — на рис. 6.

Были также произведены и другие расчеты, показывающие работоспособность программного обеспечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гришечкин С.А. Ветвящиеся процессы и системы с повторными вызовами или случайной дисциплиной. *Теория вероятностей и ее прим.,* 1990, т. 35, вып. 1, стр. 35–50.



	P(i)
0	0,32958320309486
1	0,337385785954833

	0	1	2	3	4	5
0	0,169109746613515	0,0440148457930113	0,0108387134104948	0,00262406525930997	0,000627662612429841	0,000145959879941631
1	0,0405845683355795	0,02265480166265	0,00879844829883072	0,00293618342804954	0,000895625328000404	
2	0,00881095108818959	0,00788729000175458	0,00430714435074208	0,00187562913772971		
3	0,00184293787886474	0,00232614382404534	0,0016707694103455			
4	0,000379290584761372	0,000624352645207032				
5	7,58814068546276E-5					

Рис. 5. Стационарное распределение чисел заявок

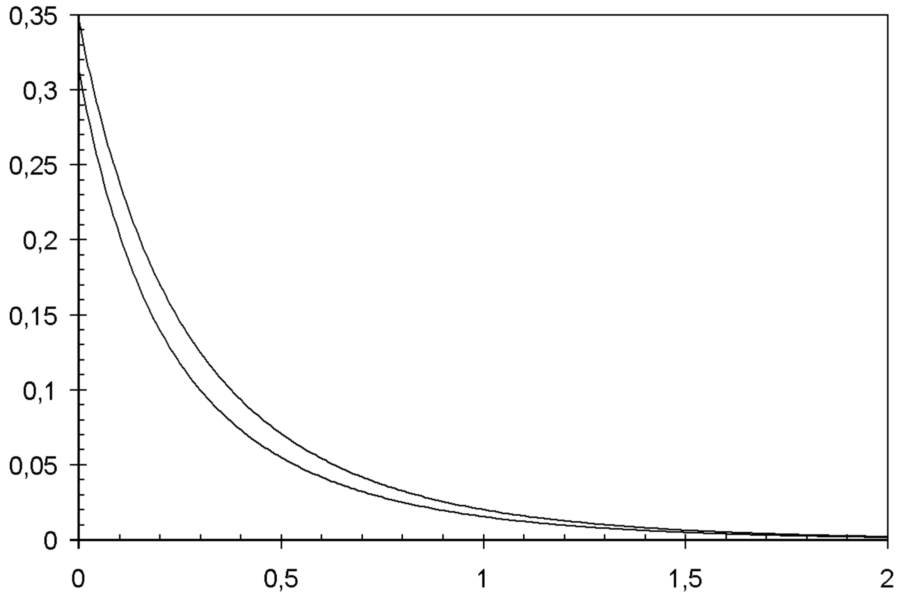


Рис. 6. Стационарные распределения времени ожидания начала обслуживания

2. Гришечкин С.А. Ветвящиеся процессы Крампа–Мода–Ягерса как метод исследования системы $M/G/1$ с разделением процессора. *Теория вероятностей и ее прим.,* 1991, т. 36, вып. 1, стр. 16–33.

3. Grishechkin S.A. On a relationship between processor-sharing queues and Crump–Mode–Jagers branching processes. *Adv. Appl. Prob.,* 1992, vol. 24, pp. 653–698.

4. Печинкин А.В. Система обслуживания с марковским входящим потоком и дисциплиной случайного выбора заявок из очереди. *Автоматика и телемеханика,* 2000, № 9, стр. 90–97.

5. Печинкин А.В., Тришечкин С.И. Система $SM_2/MSP/1/r$ с дисциплиной случайного выбора заявки на обслуживание и общим накопителем. *Системы и средства информатики: спец. выпуск.* М.: Изд-во института проблем информатики РАН, 2002, стр. 160–180.

6. Печинкин А.В., Тришечкин С.И. Система $SM_2/MSP/n/r$ с дисциплиной случайного выбора на обслуживание и общим накопителем. *Автоматика и телемеханика,* 2004 (в печати).

7. Печинкин А.В., Тришечкин С.И. Ветвящийся процесс с двумя типами частиц, управляемый цепью Маркова, и его применение к исследованию системы массового обслуживания с дисциплиной случайного выбора из очереди. *Вест. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2000, № 1, стр. 5–17.

8. Тришечкин С.И. Система $MAP/G_2/1/n$ с двумя типами требований, дисциплиной RANDOM и раздельными очередями. *Вест. РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика,* 2002, № 1, стр. 144–158.

9. Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания.* М.: РУДН, 1995.

10. Коляденкова Л.Г., Печинкин А.В., Тришечкин С.И. Система $MAP_2/G_2/1/n$ с абсолютным приоритетом и общей очередью. *Вест. РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика,* 2000, № 1, стр. 72–90.

Статью представил к публикации член редколлегии И.И.Иванов