Информационные процессы, Том 4, № 1, 2004, стр. 58–75.

О ДЕКОМПОЗИЦИИ G-СЕТЕЙ С ЗАВИСИМЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И ДООБСЛУЖИВАНИЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК[1]

П.П. Бочаров*, **Е.В. Гаврилов***, **А.В. Печинкин****

**Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
***Институт проблем информатики РАН, Москва, Россия*
Поступила в редколлегию 15.01.2004

Аннотация—Рассматриваются открытые сети массового обслуживания с отрицательными заявками (G-сети). На сеть поступает пуассоновский поток (обычных, положительных) заявок. Для каждой заявки, поступившей в сеть, определяется набор случайных параметров: ее маршрут по сети (последовательность номеров узлов, проходимых заявкой), длина маршрута, объем заявки и длительность ее обслуживания на каждом этапе маршрута. Такая характеризация заявок является достаточно общей и позволяет ввести зависимости в обслуживании заявки на различных этапах ее маршрута. Рассматриваются узлы, являющиеся аналогами узлов в BCMP-сетях, исключая случай экспоненциальных узлов. Отрицательная заявка при поступлении в сеть “убивает” заявку на случайно выбранном приборе, однако “убитая” заявка покидает сеть не сразу, а лишь после завершения обслуживания на данном узле. Доказано, что многомерное стационарное распределение вероятностей состояний сети представимо в мультипликативной форме.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сети массового обслуживания (СеМО) с отрицательными заявками или G-сети были введены Геленбе в [1]. Сущность отрицательных заявок состоит в следующем. После поступления в некоторый узел сети отрицательная заявка “убивает” (разрушает) одну обычную (положительную) заявку, если таковая имеется в данном узле, тем самым уменьшая на единицу число положительных заявок в данном узле. После этого отрицательная заявка уходит из сети, не получая никакого обслуживания. В [1] было показано, что стационарное многомерное распределение вероятностей состояний марковского процесса, описывающего функционирование экспоненциальной G-сети с однолинейными узлами, представляется в мультипликативной форме. Однако система уравнений равновесия для интенсивностей потоков, циркулирующих в даннной G-сети, в отличие от сети Джексона, является нелинейной.

В последующих работах Геленбе и других авторов (см., например, статьи [2-10] и книгу [11]) понятие отрицательной заявки развивалось и обобщалось. Было введено понятие тригера, передвигающего положительную заявку из одного узла (без обслуживания в нем) в другой узел, а также понятие сигнала, обобщающего понятия отрицательной заявки и триггера. Было показано, что G-сети с триггерами и сигналами также являются мультипликативными. Обширная библиография и основные результаты для G-сетей даются в обзорах [12, 13].

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-07-90147).

В [14, 15] теория мультипликативных G-сетей с BCMP-узлами была развита на случай, когда для каждой заявки, поступившей в некоторый узел сети, задается набор случайных параметров: длина маршрута – последовательность номеров узлов, на которых заявка должна обслуживаться, собственно маршрут заявки, объемы заявок на каждом этапе (узле) обслуживания и длительность обслуживания заявки на каждом узле. Такая модель позволяет учитывать эффект зависимого обслуживания заявки в различных узлах сети.

В настоящей работе в развитие работ [14, 15] для G-сетей с BCMP-узлами, исключая экспоненциальные узлы, исследуется случай, когда отрицательная заявка, поступившая в некоторый узел сети, случайным образом выбирает положительную заявку из общего числа находящихся на приборах заявок и "убивает" ее, но "убитая" заявка покидает сеть лишь после завершения обслуживания в данном узле. Для данной G-сети также получено мультипликативное решение для стационарного распределения вероятностей состояний сети.

2. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Рассматривается открытая СеМО. Для описания ее определяющих параметров будем использовать следующие обозначения:

$\mathcal{M}$ — конечное множество узлов сети,

M — число узлов в СеМО,

s — номер узла, $s = \overline{1, M}$.

Каждый из узлов СемО из множества $\mathcal{M}$ может принадлежать к одному из следующих типов:

1 — бесконечнолинейные;

2 — однолинейные с неограниченным накопителем и инверсионной дисциплиной обслуживания с прерыванием обслуживания и дообслуживанием (дисциплина LCFS PR);

3 — однолинейные с неограниченным накопителем и дисциплиной равномерного разделения прибора (дисциплина PS).

Множество узлов типа i, $i = \overline{1, 3}$, содержащихся в СеМО, обозначим через $\mathcal{M}_i$.

Условимся в дальнейшем обозначать случайные величины (СВ) прописными латинскими буквами, а их реализации — соответствующими строчными буквами, при этом векторные СВ, а также другие векторы будем дополнительно выделять полужирным шрифтом.

Предполагается, что в сеть поступает пуассоновский поток (обычных) заявок интенсивности λ.

Каждая поступающая в СеМО заявка характеризуется набором СВ $(L, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, которые не зависят от аналогичных СВ для других заявок и от предыстории функционирования сети, где:

L — случайная длина маршрута заявки, т.е. число этапов (узлов), на которых она будет обслуживаться;

$\boldsymbol{R} = (R_1, \ldots, R_L)$ — случайный маршрут, который представляет собой набор номеров узлов, последовательно проходимых заявкой на всех L этапах, при этом номера узлов в маршруте могут повторяться;

$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_L)$ — случайные объемы заявки на последовательно проходимых этапах маршрута; объемы заявки на разных этапах маршрута могут быть различными;

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_L)$ — случайные длительности обслуживания на последовательно проходимых этапах маршрута, которые, в общем случае, могут быть различными на разных этапах. Если на некотором этапе заявка обслуживается в узле типа 2 или 3, то под длительностью обслуживания на данном этапе понимается то время, которое нужно было бы затратить на обслуживание заявки в этом узле, если бы в нем не было других заявок.

Объемы $\boldsymbol{Y}$ заявки могут иметь реальную физическую интерпретацию, например, в виде объема памяти, необходимого для записи сообщения, а также могут носить некоторый вспомогательный характер.

Заметим, что при таком описании сети объем Y_n и длина X_n характеризуют заявку, обслуживаемую в узле R_n, при этом допускаются маршруты $\boldsymbol{R}$, в которых номера R_n могут повторяться, т.е. заявка может обслуживаться в одном и том же узле s несколько раз, причем с различными длительностями обслуживания.

Статистические характеристики многомерной СВ $(L, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ задаются совместной функцией распределения (ФР)

$$B(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{L = l,\, R_n = r_n,\, Y_n \le y_n,\, X_n \le x_n,\ \ n = \overline{1, l}\}.$$

Далее, пусть:

$$G(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{L = l,\, R_n = r_n,\, Y_n \le y_n,\ \ n = \overline{1, l}\}$$

— совместная ФР маршрута $\boldsymbol{R}$ длины L и объемов $\boldsymbol{Y}$ заявки на этапах;

$$B(\boldsymbol{x} \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{X_n \le x_n,\ \ n = \overline{1, l} \mid L = l,\, \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\}$$

— условная совместная ФР длительностей $\boldsymbol{X}$ обслуживания заявки на этапах при фиксированных маршруте $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}$ длины $L = l$ и объемах $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$;

$$B_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{X_n \le x \mid L = l,\, \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\},\ \ n = \overline{1, l},$$

— условная ФР длительности X_n обслуживания заявки на n-м этапе (в узле с номером $R_n = r_n$) при фиксированных маршруте $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}$ длины $L = l$ и объемах $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$.

Предполагается, что для введенных выше ФР выполняются следующие условия.

П 1.1. Длительности обслуживания условно независимы вдоль маршрута, т.е. условная ФР $B(\boldsymbol{x} \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ имеет вид

$$B(\boldsymbol{x} \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \prod_{n=1}^{l} B_n(x_n \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}).$$

П 1.2. ФР $G(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ и $B_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ абсолютно непрерывны; через $g(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ и $b_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ обозначим их плотности, т.е.

$$g(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial^l}{\partial y_1 \cdots \partial y_l} G(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}),$$

$$b_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial}{\partial x} B_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}).$$

Это предположение является чисто техническим и от него нетрудно освободиться, если трактовать производные как обобщенные функции.

Помимо описанного выше потока обычных заявок, которые далее будем называть положительными, в узлы СеМО поступают потоки отрицательных заявок, обладающие следующими свойствами.

П 2.1. Потоки отрицательных заявок, поступающие в разные узлы, являются независимыми.

П 2.2. Поток отрицательных заявок, поступающий в узел s типа 2 или 3, является пуассоновским интенсивности γ_s.

П 2.3. Поток отрицательных заявок, поступающий в узел s типа 1, является марковского типа с интенсивностью $\gamma_s(n)$, зависящей только от числа n занятых текущим обслуживанием в этом узле приборов следующим образом:

$$\gamma_s(n) = n\gamma_s.$$

П 2.4. Отрицательная заявка, поступившая в узел s и заставшая в этом узле k положительных заявок на текущем обслуживании (если этот узел типа 1 или 3, то k — общее число положительных заявок в узле, если типа 2, то $k = 1$), с одинаковой вероятностью $1/k$ выбирает одну из обслуживаемых положительных заявок. Далее отрицательная заявка либо с вероятностью $\omega_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ "убивает" выбранную положительную заявку, либо с вероятностью $1-\omega_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, мгновенно покидает СеМО, не оказывая на нее никакого воздействия. Здесь $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — параметры обслуживания выбранной заявки, определенные при ее поступлении в сеть, n — этап (номер узла) маршрута, на котором проходит обслуживание данная заявка (очевидно, что $r_n = s$), x — обслуженная длина заявки. Однако, в отличие от СеМО, рассмотренной в [14, 15], "убитая" заявка покинет СеМО только после того, как целиком выработается ее длительность обслуживания на этом этапе. Если же в момент поступления отрицательной заявки в некоторый узел в нем отсутствуют положительные заявки или выбранная положительная заявка уже "убита" ранее поступившей отрицательной заявкой, то вновь поступающая отрицательная заявка покидает СеМО, не оказывая на нее никакого воздействия.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Следуя [14, 15], для положительной заявки с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ введем при $n = \overline{1, l}$ вспомогательные функции $\omega_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $F_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, $B_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ и $B_n^-(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, (здесь и далее для сокращения записи для любой ФР $F(x)$ будем употреблять обозначение $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$):

$$\omega_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \int_0^\infty \overline{F}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, b_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, dx, \tag{1}$$

$$F_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = 1 - \exp\left\{ -\gamma_{r_n} \int_0^x \omega_n(z \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, dz \right\}, \tag{2}$$

$$B_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = 1 - \overline{B}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \overline{F}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, y). \tag{3}$$

$$B_n^-(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = B_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) - B_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \overline{B}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, F_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}). \tag{4}$$

Далее, положим

$$\omega_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \ \ n = \overline{1, l+1}, \tag{5}$$

$$g_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \omega_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, g(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \ \ n = \overline{1, l}, \tag{6}$$

$$m_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \int_0^\infty \overline{B}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, dx, \ \ n = \overline{1, l}, \tag{7}$$

$$m_n^+(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \int_0^\infty \overline{B}_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, dx, \ \ n = \overline{1, l},$$

$$m_n^-(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \int_0^\infty B_n^-(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, dx = m_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) - m_n^+(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \ \ n = \overline{1, l},$$

и для $w = 0, 1$

$$B_n^*(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, w) = \delta_w \overline{B}_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) + \delta_{1-w} B_n^-(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) =$$

$$= \delta_w \overline{B}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \overline{F}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) + \delta_{1-w} \overline{B}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, F_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \quad n = \overline{1, l}, \tag{8}$$

где δ_w — символ Кронекера.

Введенные выше функции имеют следующую вероятностную интерпретацию:

$F_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — вероятность того, что положительная заявка с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, не "убитая" до n-го этапа и имеющая бесконечную длительность обслуживания на n-м этапе (в узле r_n), будет "убита" на данном этапе за время меньше x;

$\omega_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — вероятность того, что положительная заявка с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, не "убитая" до n-го этапа, не будет "убита" на данном этапе (в узле r_n);

$\omega_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — вероятность того, что положительная заявка с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ не будет "убита" до n-го этапа;

$B_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — условная вероятность того, что на n-м этапе (в узле r_n) положительная заявка с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ будет пребывать на приборе время меньше x до того момента пока либо закончится ее обслуживание, либо она будет "убита" при условии, что она не будет "убита" до n-го этапа;

$B_n^-(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — условная вероятность того, что на n-м этапе (в узле r_n) положительная заявка с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ будет обслуживаться время больше x, но до момента x она будет "убита" (иными словами, при обслуженной длине x она еще будет находиться на приборе, но уже будет "убита"), при условии, что она не будет "убита" до n-го этапа;

$m_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — среднее время обслуживания (пребывания на приборе) положительной заявки с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ на n-м этапе (в узле r_n), не "убитой" до n-го этапа;

$m_n^+(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — среднее время пребывания на приборе положительной заявки с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ на n-м этапе (в узле r_n), не "убитой" до n-го этапа, до того момента пока либо закончиться ее обслуживание, либо она будет "убита";

$m_n^-(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ — среднее время пребывания на приборе уже "убитой", но еще продолжающей обслуживаться положительной заявки с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ на n-м этапе (в узле r_n), не "убитой" до n-го этапа.

Заметим, что для узлов типов 2 и 3 соответствующие характеристики определены при условии отсутствия в таких узлах других заявок.

Введем также для s-го узла следующие величины:

$$\rho_s = \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \le r_1, \ldots, r_l \le M} \int\limits_{\mathbb{R}^l} \sum_{n=1}^{l} g_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \delta_{s-r_n} m_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy}, \tag{9}$$

$$\rho_s^+ = \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \le r_1, \ldots, r_l \le M} \int\limits_{\mathbb{R}^l} \sum_{n=1}^{l} g_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \delta_{s-r_n} m_n^+(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy}, \tag{10}$$

$$\rho_s^- = \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \le r_1, \ldots, r_l \le M} \int\limits_{\mathbb{R}^l} \sum_{n=1}^{l} g_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \delta_{s-r_n} m_n^-(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy} = \rho_s - \rho_s^+. \tag{11}$$

Здесь и далее для сокращения записи используется обозначение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^l} \ldots\, \boldsymbol{dy} = \int\limits_{\mathbb{R}^l}\!\!\ldots\!\!\int \ldots\, dy_1 \cdots dy_l.$$

Заметим, что полученные ниже результаты позволяют сделать утверждение, что ρ_s — общая загрузка s-го узла, ρ_s^+ — загрузка s-го узла, создаваемая "неубитыми" заявками, ρ_s^- — загрузка s-го узла, создаваемая "убитыми", но еще обслуживаемыми заявками.

Будем предполагать, что для любого узла s

$$\lambda_s = \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \le r_1,\ldots,r_l \le M} \int_{\mathbb{R}^l} \sum_{n=1}^{l} g_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \delta_{s-r_n}\, \boldsymbol{dy} < \infty. \tag{12}$$

Условие (12) означает, что суммарная интенсивность потока положительных заявок, поступающего в узел s, конечна.

Наконец, обозначим через $\beta_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ и $\beta_n^-(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ интенсивности ухода с прибора за счет окончания обслуживания и "убийства" отрицательной заявкой положительной заявки с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ на n-м этапе маршрута (в узле $s = r_n$), определяемые следующими формулами:

$$\beta_n^+(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \frac{b_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})}{\overline{B}_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})}, \tag{13}$$

$$\beta_n^-(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \gamma_{r_n} \omega_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}). \tag{14}$$

4. МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, ОПИСЫВАЮЩИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СЕТИ

Определим теперь марковский процесс, описывающий функционирование рассматриваемой СеМО.

Будем обозначать набором $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_M)$ состояние сети, где, в свою очередь, набор $\boldsymbol{z}_s = (k_s, \boldsymbol{z}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{sk_s}),\ s = \overline{1, M}$, описывает состояние s-го узла следующим образом: k_s — число заявок, находящихся в s-м узле, а набор $\boldsymbol{z}_{si},\ s = \overline{1, M},\ i = \overline{1, k_s}$, с компонентами $\boldsymbol{z}_{si} = (l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, n_{si}, x_{si}, w_{si})$ определяет информацию $(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})$ об i-й заявке, находящейся в s-м узле, и ее положении (n_{si}, x_{si}, w_{si}) в сети:

l_{si} — длина маршрута;

$\boldsymbol{r}_{si} = (r_{si1}, \ldots, r_{sil_{si}})$ — маршрут;

$\boldsymbol{y}_{si} = (y_{si1}, \ldots, y_{sil_{si}})$ — объемы заявки на этапах маршрута;

n_{si} — номер этапа маршрута, на котором находится (обслуживается или ожидает обслуживания) заявка (ясно, что $n_{si} \le l_{si}$);

x_{si} — выработанная длительность обслуживания заявки на данном этапе;

w_{si} — функция, показывающая состояние заявки, причем полагаем $w_{si} = 0$, если заявка не "убита", и $w_{si} = 1$, если заявка "убита" (но продолжает обслуживаться).

Напомним, что в силу принятого обозначения $r_{sin_{si}} = s$. Вектор $\boldsymbol{z}_s = 0$ в случае $k_s = 0$, т.е. когда в s-м узле отсутствуют заявки, а вектор $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$ в том случае, когда в сети нет заявок.

В дальнейшем примем следующее правило нумерации заявок в узлах. Для узлов типов 1 и 3 будем нумеровать заявки в случайном порядке, а для узлов типа 2 — в порядке, обратном порядку поступления заявок в этот узел.

Множество состояний сети обозначим через $\mathcal{Z} = \{\boldsymbol{z}\}$.

В качестве процесса, описывающего стохастическое поведение рассматриваемой СеМО, рассмотрим процесс

$$\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{z}, \quad \text{если в момент } t \text{ сеть находится в состоянии } \boldsymbol{z}.$$

Нетрудно видеть, что введенный таким образом процесс является марковским.

Кроме того, введем (немарковские) процессы

$$\boldsymbol{Z}_s(t) = \boldsymbol{z}_s, \quad \text{если в момент } t \text{ сеть находится в состоянии } \boldsymbol{z},\ s = \overline{1, M}.$$

Процесс $\boldsymbol{Z}_s(t)$ описывает функционирование узла s сети.

5. МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

В этом разделе доказывается теорема о мультипликативном представлении стационарных вероятностей состояний марковского процесса, введенного выше.

Обозначим через $p(\boldsymbol{z})$ стационарную плотность распределения вероятностей состояний процесса $\boldsymbol{Z}(t)$. Ниже прямым построением покажем, что при естественном ограничении на загрузку сети, плотность $p(\boldsymbol{z})$ существует.

Теорема. *Если для узлов s типа 1 $\rho_s < \infty$ и для узлов s типов 2 и 3 $\rho_s < 1$, где ρ_s определяются формулой (9), то существует предельное (стационарное) распределение вероятностей состояний процесса $\boldsymbol{Z}(t)$ с плотностью распределения вероятностей*

$$p(\boldsymbol{z}) = \prod_{s=1}^{M} p_s(\boldsymbol{z}_s), \tag{15}$$

причем для узла s типа 1

$$p_s(\boldsymbol{z}_s) = e^{-\rho_s}\frac{\lambda^{k_s}}{k_s!}\prod_{i=1}^{k_s} B^*_{n_{si}}(x_{si} \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, w_{si})\, g^*_{n_{si}}(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}), \tag{16}$$

а для узла s типов 2 и 3

$$p_s(\boldsymbol{z}_s) = (1-\rho_s)\lambda^{k_s}\prod_{i=1}^{k_s} B^*_{n_{si}}(x_{si} \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, w_{si})\, g^*_{n_{si}}(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}). \tag{17}$$

Доказательство.

Так как состояние **0** марковского процесса $\boldsymbol{Z}(t)$ является положительно возвратным, то процесс $\boldsymbol{Z}(t)$ является регулярным и положительно возвратным по Харрису. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $p(\boldsymbol{z})$, определяемая формулами (15)-(17), удовлетворяет системе уравнений для стационарной плотности распределения вероятностей состояний процесса $\boldsymbol{Z}(t)$, которую, по аналогии с дискретным случаем, будем называть системой уравнений равновесия (СУР).

Введем следующие обозначения, которые потребуются ниже для записи СУР. Пусть СеМО находится в состоянии $\boldsymbol{z}$. Тогда через $v_{si}(\boldsymbol{z})$ обозначим скорость обслуживания i-й заявки, находящейся в узле s, т.е.

$$v_{si}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я заявка обслуживается в узле } s \text{ типа 1} \\ & \text{или находится на приборе в узле } s \text{ типа 2;} \\ 1/k_s, & \text{если } i\text{-я заявка обслуживается в узле } s \text{ типа 3} \\ & \text{(в котором обслуживается еще } k_s-1 \text{ заявок);} \\ 0, & \text{если } i\text{-я заявка находится в очереди в узле } s \text{ типа 2,} \end{cases} \tag{18}$$

а через

$$\mu^+_{si}(\boldsymbol{z}) = v_{si}(\boldsymbol{z})\, \beta^+_{n_{si}}(x_{si} \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}) \tag{19}$$

и

$$\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}) = v_{si}(\boldsymbol{z})\, \beta^-_{n_{si}}(x_{si} \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})\, \delta_{w_{si}} \tag{20}$$

— интенсивности выхода из состояния $\boldsymbol{z}$ за счет окончания обслуживания и “убийства” (еще не “убитой”) i-й заявки в s-м узле.

Наконец, для $k > 0$ и $i = \overline{1, k}$ положим

$$u_{si}(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in \mathcal{M}_2 \text{ и } i = 1; \\ 0, & \text{если } s \in \mathcal{M}_2 \text{ и } i > 1; \\ 1/k, & \text{если } s \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3. \end{cases} \tag{21}$$

Функция $u_{si}(k)$ представляет собой вероятность того, что заявке, поступающей в узел s, в котором находится еще $k - 1$ заявок, будет присвоен номер i.

Так как уравнения СУР будут иметь различный вид для разных состояний множества состояний $\mathcal{Z}$ процесса $\boldsymbol{Z}(t)$, то разобьем множество $\mathcal{Z}$ на два подмножества состояний. К первому подмножеству отнесем такие состояния, для которых $x_{si} > 0$. Такие состояния будем называть внутренними состояниями. Очевидно, что к внутренним состояниям относятся такие состояния, в которых все заявки уже обслуживались какое-то время. Остальные состояния, которые будем называть граничными, отнесем ко второму подмножеству.

Построение СУР начнем с внутренних состояний.

Каждому внутреннему состоянию $\boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}$ поставим в соответствие множество состояний $\tilde{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{z})$. Состояния из множества $\tilde{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{z})$ будем называть предшествующими состоянию $\boldsymbol{z}$. Физический смысл предшествующих состояний заключается в том, что только из низ возможен непосредственный переход в состояние $\boldsymbol{z}$.

В свою очередь, все состояния, предшествующие внутреннему состоянию $\boldsymbol{z}$, разобьем на два (пересекающихся) класса. Состояния каждого класса соответствуют определенному типу перехода в состояние $\boldsymbol{z}$.

Первый класс $\mathcal{Z}^+(\boldsymbol{z}) = \mathcal{Z}_1^+(\boldsymbol{z}) \cup \mathcal{Z}_2^+(\boldsymbol{z})$ состоит из двух подклассов $\mathcal{Z}_1^+(\boldsymbol{z})$ и $\mathcal{Z}_2^+(\boldsymbol{z})$.

Первый подкласс

$$\mathcal{Z}_1^+(\boldsymbol{z}) = \{\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x)\},$$

соответствует тем состояниям сети, из которых возможен переход в состояние $\boldsymbol{z}$ за счет ухода заявки из сети при полном окончании ее обслуживания (в последнем узле маршрута) и состоит из состояний $\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x)$, имеющих вид

$$\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x) = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{s-1}, \boldsymbol{z}_s^*, \boldsymbol{z}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_M),$$

где

$$\boldsymbol{z}_s^* = (k_s + 1, \boldsymbol{z}_{s1}^*, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,k_s+1}^*)$$

и

$$\boldsymbol{z}_{sj}^* = \begin{cases} \boldsymbol{z}_{sj}, & j < i, \\ (l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, l, x, 0), & j = i, \\ \boldsymbol{z}_{s,j-1}, & j > i, \end{cases}$$

а $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x)$ — параметры уходящей с i-го места в s-м узле полностью обслуженной заявки, которые могут принимать любые (возможные) значения.

Второй подкласс

$$\mathcal{Z}_2^+(\boldsymbol{z}) = \{\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, n, x)\},$$

соответствует состояниям сети, из которых возможен переход в состояние $\boldsymbol{z}$ за счет ухода “убитой” заявки из сети при окончании ее обслуживания на i-м месте в s-м узле сети на n-м этапе маршрута и состоит из состояний $\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, n, x)$, имеющих вид

$$\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, n, x) = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{s-1}, \boldsymbol{z}_s^*, \boldsymbol{z}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_M),$$

где

$$\boldsymbol{z}_s^* = (k_s + 1, \boldsymbol{z}_{s1}^*, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,k_s+1}^*)$$

и

$$\boldsymbol{z}_{sj}^* = \begin{cases} \boldsymbol{z}_{sj}, & j < i, \\ (l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, n, x, 1), & j = i, \\ \boldsymbol{z}_{s,j-1}, & j > i, \end{cases}$$

а параметры $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, n, x)$ также могут принимать любые (возможные) значения.

Второй класс $\mathcal{Z}^-(\boldsymbol{z})$ предшествующих состояний не пуст только для тех состояний $\boldsymbol{z}$, при которых в СеМО имеются еще обслуживаемые, но уже "убитые" заявки, и получается следующим образом. Рассмотрим все возможные компоненты $\boldsymbol{z}_{si}$ вектора $\boldsymbol{z}$, для которых $w_{si} = 1$, и для каждой такой пары (s, i) определим состояние $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, s, i)$, имеющее вид

$$\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, s, i) = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{s-1}, \boldsymbol{z}_s^*, \boldsymbol{z}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_M),$$

где

$$\boldsymbol{z}_s^* = (k_s, \boldsymbol{z}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,i-1}, \boldsymbol{z}_{si}^*, \boldsymbol{z}_{s,i+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{sk_s})$$

и

$$\boldsymbol{z}_{si}^* = (l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, n_{si}, x_{si}, 0).$$

Класс $\mathcal{Z}^-(\boldsymbol{z})$ и будет состоять из всех состояний $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, s, i)$, только из которых, как нетрудно видеть, можно попасть в состояние $\boldsymbol{z}$ за счет "убийства" заявки с последующим продолжением ее обслуживания на приборе.

Выпишем уравнения глобального баланса для внутреннего состояния $\boldsymbol{z}$. Для этого вычислим потоки вероятностей, входящие и выходящие из состояния $\boldsymbol{z}$.

Поток, выходящий из состояния $\boldsymbol{z}$, состоит из двух частей.

Во-первых, выход из состояния $\boldsymbol{z}$ осуществляется при поступлении новой заявки в СеМО (с интенсивностью λ). Выходящий из состояния $\boldsymbol{z}$ поток вероятностей, связанный с поступлением новых заявок, равен $\lambda p(\boldsymbol{z})$.

Во-вторых, выход из состояния $\boldsymbol{z}$ происходит и при окончании обслуживания i-й заявки в s-м узле (с интенсивностью $\mu_{si}^+(\boldsymbol{z})$ вне зависимости от того, "убита" эта заявка или нет) или "убийства" ее в этом узле (с интенсивностью $\mu_{si}^-(\boldsymbol{z})$, поскольку "убить" можно только еще не "убитую" заявку). Общий выходящий из состояния $\boldsymbol{z}$ поток вероятностей, связанный с окончанием обслуживания или "убийством" заявок во всех узлах, с учетом тождества $s = r_{sin_{si}}$ равен

$$\sum_{s=1}^{M} \sum_{i=1}^{k_s} \delta_{s - r_{sin_{si}}} (\mu_{si}^+(\boldsymbol{z}) + \mu_{si}^-(\boldsymbol{z}))\, p(\boldsymbol{z}).$$

Войти во внутреннее состояние $\boldsymbol{z}$ можно из состояния $\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x) \in \mathcal{Z}_1^+(\boldsymbol{z})$ при окончании обслуживания "не убитой" i-й заявки в s-м узле (последнем узле маршрута). Поскольку интенсивность окончания обслуживания i-й заявки в s-м узле равна $\mu_{si}^+(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x))$, то суммарный входящий в состояние $\boldsymbol{z}$ поток вероятностей из состояний подкласса $\mathcal{Z}_1^+(\boldsymbol{z})$ равен

$$\sum_{s=1}^{M} \sum_{i=1}^{k_s+1} \sum_{l,r} \int_{\mathbb{R}^l} \boldsymbol{dy} \int_0^\infty \mu_{si}^+(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x))\, \delta_{s-r_l} p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, x))\, dx.$$

Кроме того, во внутреннее состояние $\boldsymbol{z}$ можно войти из состояния $\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z}, s, i, l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}, n, x) \in \mathcal{Z}_2^+(\boldsymbol{z})$ при окончании обслуживания "убитой" i-й заявки в s-м узле на

n-м этапе маршрута при той же интенсивности окончания обслуживания i-й заявки в s-м узле, равной $\mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))$.

Следовательно, суммарный входящий в состояние $\boldsymbol{z}$ поток вероятностей из состояний подкласса $\mathcal{Z}^+_2(\boldsymbol{z})$ равен

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s+1}\sum_{l,r,n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty \mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,\delta_{s-r_n}p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,dx.$$

Наконец, войти во внутреннее состояние $\boldsymbol{z}$ можно из состояния $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i)\in\mathcal{Z}^-(\boldsymbol{z})$ при “убийстве” i-й заявки в s-м узле на n-м этапе маршрута с интенсивностью “убийства” i-й заявки в s-м узле, равной $\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i)$. При этом суммарный входящий в состояние $\boldsymbol{z}$ поток вероятностей из состояний класса $\mathcal{Z}^-(\boldsymbol{z})$ равен

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s}\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i))\,p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i)).$$

При составлении уравнений глобального баланса для внутренних состояний $\boldsymbol{z}$ необходимо учесть также слагаемое, связанное с изменением текущего времени пребывания заявок в узлах сети. Это слагаемое равно

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s}\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big(v_{si}(\boldsymbol{z})\,p(\boldsymbol{z})\big),$$

и оно должно быть записано в левой части уравнения равновесия.

Выпишем теперь СУР для внутренних состояний $\boldsymbol{z}$. Эти система имеет вид

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s}\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big(v_{si}(\boldsymbol{z})\,p(\boldsymbol{z})\big)+\Big(\lambda+\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s}(\mu^+_{si}(\boldsymbol{z})+\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}))\Big)p(\boldsymbol{z})=$$

$$=\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s+1}\sum_{l,r}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty \mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,\delta_{s-r_l}p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,dx+$$

$$+\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s+1}\sum_{l,r,n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty \mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,\delta_{s-r_n}p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,dx+$$

$$+\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s}\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i))\,p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i)). \tag{22}$$

Покажем теперь, что функция $p(\boldsymbol{z})$, задаваемая формулами (15)-(17), удовлетворяет уравнению (22). С этой целью перепишем уравнение (22) в виде

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big(v_{si}(\boldsymbol{z})\,p(\boldsymbol{z})\big)+(\mu^+_{si}(\boldsymbol{z})+\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}))\,p(\boldsymbol{z})-\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i))\,p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i))\Big]+$$

$$+\Bigg[\lambda p(\boldsymbol{z})-\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s+1}\sum_{l,r}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty \mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,\delta_{s-r_l}p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,dx-$$

$$-\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s+1}\sum_{l,r,n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty \mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,\delta_{s-r_n}p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,dx\Bigg]=0. \tag{23}$$

Докажем ниже лемму, которая выявляет определенные соотношения во внутренних точках $\boldsymbol{z}$ для функции $p(\boldsymbol{z})$, задаваемой формулами (15)-(17), и показывает, что каждое из выражений формулы (23), заключенных в квадратные скобки (уравнения частичного баланса), равно нулю, и, следовательно, функция $p(\boldsymbol{z})$ действительно удовлетворяет СУР (22) во всех внутренних точках $\boldsymbol{z}$.

Лемма 1. *Функция $p(\boldsymbol{z})$, определяемая формулами (15)-(17), для всех внутренних состояний $\boldsymbol{z}$ сети удовлетворяет следующим соотношениям:*

1. Для любого узла s и любого i, $i=\overline{1,k_s}$,

$$\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big(v_{si}(\boldsymbol{z})\,p(\boldsymbol{z})\big)+(\mu^+_{si}(\boldsymbol{z})+\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}))\,p(\boldsymbol{z})-\mu^-_{si}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i))\,p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i))=0;$$

2. Имеет место тождество

$$\lambda p(\boldsymbol{z})=\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s+1}\sum_{l,r}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty \mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,\delta_{s-r_l}p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,dx+$$

$$+\sum_{s=1}^{M}\sum_{i=1}^{k_s+1}\sum_{l,r,n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty \mu^+_{si}(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,\delta_{s-r_n}p(\boldsymbol{z}^+(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,dx. \qquad (24)$$

Доказательство леммы 1. Из формул (8), (2), (3), (13), (14), (19), (20) и определения состояния $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},s,i)\in\mathcal{Z}^-(\boldsymbol{z})$ следует

$$\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big[v_{si}(\boldsymbol{z})\,B^*_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si},w_{si})\big]=$$

$$=v_{si}(\boldsymbol{z})\Big(\delta_{w_{si}}\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big[\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\big]+$$

$$+\delta_{1-w_{si}}\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big[\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,F_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\big]\Big)=$$

$$=v_{si}(\boldsymbol{z})\Bigg[\delta_{w_{si}}\Bigg(-b_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})-$$

$$-\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\gamma_{r_{sin_{si}}}\omega_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\times$$

$$\times\exp\Bigg\{-\gamma_{r_{sin_{si}}}\int\limits_0^{x_{si}}\omega_{n_{si}}(z\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,dz\Bigg\}\Bigg)+$$

$$+\delta_{1-w_{si}}\Bigg(-b_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,F_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})+$$

$$+\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\gamma_{r_{sin_{si}}}\omega_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\times$$

$$\times\exp\Bigg\{-\gamma_{r_{sin_{si}}}\int\limits_0^{x_{si}}\omega_{n_{si}}(z\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,dz\Bigg\}\Bigg)\Bigg]=$$

$$=v_{si}(\boldsymbol{z})\Big(\delta_{w_{si}}\big[-\beta^+_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})-$$

$$-\beta^{-}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\big]+$$
$$+\delta_{1-w_{si}}\big[-\beta^{+}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,F_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})+$$
$$+\beta^{-}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\big]\Big)=$$
$$=-v_{si}(\boldsymbol{z})\,\beta^{+}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\delta_{w_{si}}\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})-$$
$$-\delta_{w_{si}}v_{si}(\boldsymbol{z})\,\beta^{-}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\big[\delta_{w_{si}}\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})+$$
$$+\delta_{1-w_{si}}\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,F_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\big]-$$
$$-v_{si}(\boldsymbol{z})\,\beta^{+}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\delta_{1-w_{si}}\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,F_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})+$$
$$+\delta_{1-w_{si}}v_{si}(\boldsymbol{z})\,\beta^{-}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\big[\delta_{1-w_{si}}\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})+$$
$$+\delta_{w_{si}}\overline{B}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\,\overline{F}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si})\big]=$$
$$=-(\mu^{+}_{si}(\boldsymbol{z})+\mu^{-}_{si}(\boldsymbol{z}))\,B^{*}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si},w_{si})+$$
$$+\mu^{-}_{si}(\boldsymbol{z}^{-}(\boldsymbol{z},s,i))\,B^{*}_{n_{si}}(x_{si}\mid l_{si},\boldsymbol{r}_{si},\boldsymbol{y}_{si},1-w_{si}).$$

Отсюда и из (15), (17), (18) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_{si}}\big(v_{si}(\boldsymbol{z})\,p(\boldsymbol{z})\big)=-(\mu^{+}_{si}(\boldsymbol{z})+\mu^{-}_{si}(\boldsymbol{z}))\,p(\boldsymbol{z})+\mu^{-}_{si}(\boldsymbol{z}^{-}(\boldsymbol{z},s,i))\,p(\boldsymbol{z}^{-}(\boldsymbol{z},s,i)).$$

Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства второго утверждения леммы перепишем правую часть (24) в виде

$$\sum_{s=1}^{M}\sum_{l,r}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty\sum_{i=1}^{k_s+1}\mu^{+}_{si}(\boldsymbol{z}^{+}(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,\delta_{s-r_l}p(\boldsymbol{z}^{+}(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},x))\,dx+$$
$$+\sum_{s=1}^{M}\sum_{l,r,n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty\sum_{i=1}^{k_s+1}\mu^{+}_{si}(\boldsymbol{z}^{+}(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,\delta_{s-r_n}p(\boldsymbol{z}^{+}(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x))\,dx. \tag{25}$$

Зафиксируем теперь параметры $(l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$ заявки, покидающей сеть из s-го узла, и рассмотрим все состояния $\{\boldsymbol{z}^{+}(\boldsymbol{z},s,i,l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},n,x)\}\in\mathcal{Z}^{+}(\boldsymbol{z})$, содержащие данный набор $(l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})$. Из формул (15)-(17) и (18)–(20) следует, что выражение (25) можно переписать в виде

$$\lambda p(\boldsymbol{z})\Bigg(\sum_{s=1}^{M}\delta_{s-r_l}\sum_{l,r}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty\beta^{+}_{l}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,\overline{B}^{+}_{l}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,g^{*}_{l}(l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,dx+$$
$$+\sum_{s=1}^{M}\delta_{s-r_n}\sum_{l,r,n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty\beta^{+}_{n}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,\overline{B}^{-}_{n}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,g^{*}_{n}(l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,dx\Bigg)=$$
$$=\lambda p(\boldsymbol{z})\Bigg(\sum_{l,r}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty\beta^{+}_{l}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,\overline{B}^{+}_{l}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,g^{*}_{l}(l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,dx+$$
$$+\sum_{l,r,n}\int\limits_{\mathbb{R}^l}\boldsymbol{dy}\int\limits_0^\infty\beta^{+}_{n}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,\overline{B}^{-}_{n}(x\mid l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,g^{*}_{n}(l,\boldsymbol{r},\boldsymbol{y})\,dx\Bigg). \tag{26}$$

Далее, с учетом (13), (1) и (4)-(6) и очевидных равенств

$$\int\limits_0^\infty F_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, b_n(x \mid l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, dx = 1 - \omega_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}),$$

$$\sum_{n=1}^{l} \omega_n^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})(1 - \omega_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})) + \omega_{l+1}^*(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = 1,$$

формула (26) принимает вид

$$\lambda p(\boldsymbol{z}) \sum_{l,\boldsymbol{r}} \int\limits_{\mathbb{R}^l} g(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy}.$$

Осталось заметить, что суммирование по всем l и $\boldsymbol{r}$ и интегрирование по всем $y_1, \ldots, y_l$ дает параметры общего входящего в СеМО потока, т.е.

$$\sum_{l,\boldsymbol{r}} \int\limits_{\mathbb{R}^l} g(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy} = 1,$$

откуда вытекает второе утверждение леммы.

Перейдем теперь к граничным состояниям. При этом ограничимся рассмотрением таких граничных состояний $\boldsymbol{z}$, для которых $x_{si} = 0$ только для одной пары (s, i). В случае равенства нулю сразу нескольких выработанных длительностей обслуживания исследование проводится совершенно аналогично. Кроме того, для узлов s типа 2 к граничным состояниям отнесем только такие состояния, у которых $x_{s1} = 0$, поскольку для узлов этого типа при $x_{si} = 0,\ \ i > 1$, СУР записывается по тем же правилам, что и для внутренних состояний, а выполнение соотношений частичного баланса доказывается леммой 1.

Рассмотрим некоторое граничное состояние $\boldsymbol{z}$, т.е. состояние, у которого $x_{si} = 0$ для некоторых s и i. Каждое такое состояние отнесем к одному из 3 типов по следующему принципу.

Пусть $n_{si} = 1$ и $\omega_{si} = 0$. Тогда состояние $\boldsymbol{z}$ отнесем к первому типу граничных состояний. Ясно, что попадание в граничное состояние $\boldsymbol{z}$ первого типа происходит за счет поступления в сеть новой заявки, занимающей i-е место в s-м узле.

Если $n_{si} > 1$ и $\omega_{si} = 0$, то состояние $\boldsymbol{z}$ будем относить ко второму типу граничных состояний. Попадание в граничное состояние $\boldsymbol{z}$ второго типа происходит за счет поступления на i-е место в s-й узел не "убитой" заявки, закончившей обслуживаться в узле $r_{s,i,n_{si}-1}$.

Наконец, при $\omega_{si} = 1$ состояние $\boldsymbol{z}$ будем относить к третьему типу граничных состояний. Попадание в граничное состояние $\boldsymbol{z}$ третьего типа происходит за счет "мгновенного" "убийства" на i-м месте в s-м узле только что поступившей сюда (не "убитой") заявки.

Так же, как это было сделано ранее для внутреннего состояния, для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ определим множество $\tilde{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{z})$ предшествующих состояний.

Для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ первого типа множество $\tilde{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{z})$ состоит всего из одного состояния

$$\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{s-1}, \boldsymbol{z}_s^*, \boldsymbol{z}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_m),$$

где

$$\boldsymbol{z}_s^* = (k_s - 1, \boldsymbol{z}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,i-1}, \boldsymbol{z}_{s,i+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,k_s}).$$

Для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ второго типа множество $\tilde{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{z})$ состоит из состояний $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, j, x)$, имеющих вид

$$\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, j, x) = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{s'-1}, \boldsymbol{z}_{s'}^*, \boldsymbol{z}_{s'+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s-1}, \boldsymbol{z}_s^*, \boldsymbol{z}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_m),$$

где $s' = r_{s,i,n_{si}-1}$,

$$\boldsymbol{z}^*_{s'} = (k_{s'} + 1, \boldsymbol{z}^*_{s'1}, \ldots, \boldsymbol{z}^*_{s',k_{s'}+1}),$$

$$\boldsymbol{z}^*_{s't} = \begin{cases} \boldsymbol{z}_{s't}, & t < j, \\ (l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, n_{si} - 1, x, 0), & t = j, \\ \boldsymbol{z}_{s',t-1}, & t > j, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{z}^*_s = (k_s - 1, \boldsymbol{z}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,i-1}, \boldsymbol{z}_{s,i+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,k_s}).$$

Наконец, для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ третьего типа множество $\tilde{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{z})$ состоит из одного состояния $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z})$, имеющего вид

$$\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{s-1}, \boldsymbol{z}^*_s, \boldsymbol{z}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_m),$$

где

$$\boldsymbol{z}^*_s = (k_s - 1, \boldsymbol{z}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,i-1}, \boldsymbol{z}^*_{si}, \boldsymbol{z}_{s,i+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{s,k_s}),$$

$$\boldsymbol{z}^*_{si} = (l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, n_{si}, 0, 0).$$

Выпишем теперь уравнения равновесия для граничных состояний $\boldsymbol{z}$ разных типов, у которых $x_{si} = 0$.

Поскольку переход в граничное состояние $\boldsymbol{z}$ первого типа происходит только из состояния $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z})$, причем интенсивность такого перехода равна $\lambda g(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})\, u_{si}(k_s)$, то уравнение равновесия в этом случае с учетом скорости обслуживания $v_{si}(\boldsymbol{z})$ вновь поступающей, i-й, заявки в s-м узле имеет вид

$$v_{si}(\boldsymbol{z})\, p(\boldsymbol{z}) = \lambda p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}))\, g(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})\, u_{si}(k_s). \qquad (27)$$

Переход в граничное состояние $\boldsymbol{z}$ второго типа происходит из состояний $\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, j, x)$ с интенсивностями $\mu^+_{r_{s,i,n_{si}-1}j}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, j, x))\, u_{si}(k_s)$. Уравнение равновесия в этом случае имеет вид

$$v_{si}(\boldsymbol{z})\, p(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{k_{r_{s,i,n_{si}-1}}+1} u_{si}(k_s) \int_0^\infty \mu^+_{r_{s,i,n_{si}-1}j}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, j, x))\, p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}, j, x))\, dx. \qquad (28)$$

Наконец, как нетрудно видеть, переход в граничное состояние $\boldsymbol{z}$ третьего типа происходит только тогда, когда на i-е место в s-й узел поступает не “убитая” заявка и одновременно происходит ее “убийство”, что может осуществиться только с вероятностью 0. Поэтому для граничных состояний третьего типа уравнение равновесия принимает вид

$$p(\boldsymbol{z}) = 0. \qquad (29)$$

То, что функция $p(\boldsymbol{z})$, определяемая формулами (15)-(17), в граничных точках $\boldsymbol{z}$ удовлетворяет СУР (27)–(29), вытекает из следующей леммы 2.

Лемма 2. *Функция $p(\boldsymbol{z})$, задаваемая формулами (15)-(17), для всех граничных состояний $\boldsymbol{z}$ сети удовлетворяет следующим соотношениям:*

1. Для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ первого типа

$$v_{si}(\boldsymbol{z})\, p(\boldsymbol{z}) = \lambda p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z}))\, g(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})\, u_{si}(k_s).$$

2. Для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ второго типа

$$v_{si}(\boldsymbol{z})\,p(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{k_{r_{s,i,n_{si}-1}}+1} u_{si}(k_s) \int\limits_0^\infty \mu^+_{r_{s,i,n_{si}-1}j}(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},j,x))\,p(\boldsymbol{z}^-(\boldsymbol{z},j,x))\,dx.$$

3. Для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ третьего типа

$$p(\boldsymbol{z}) = 0.$$

Доказательство леммы 2. При $s \in \mathcal{M}_1$ из формул (15), (16), (21) и (18) с учетом соотношений $B_1^*(0 \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, 0) = \overline{B}_1^+(0 \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}) = 1$, а также формул (3), (6) и (8) получаем для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ первого типа

$$v_{si}(\boldsymbol{z})\,p_s(\boldsymbol{z}) = \lambda g_1^*(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})\,B_1^*(0 \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, 0)\times$$

$$\times e^{-\rho_s}\frac{\lambda^{k_s-1}}{(k_s-1)!}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k_s} B^*_{n_{sj}}(x_{sj} \mid l_{sj}, \boldsymbol{r}_{sj}, \boldsymbol{y}_{sj}, w_{sj})\,g^*_{n_{sj}}(l_{sj}, \boldsymbol{r}_{sj}, \boldsymbol{y}_{sj}) =$$

$$= \lambda u_{si}(k_s)\,g(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})\,e^{-\rho_s}\frac{\lambda^{k_s-1}}{(k_s-1)!}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k_s} B^*_{n_{sj}}(x_{sj} \mid l_{sj}, \boldsymbol{r}_{sj}, \boldsymbol{y}_{sj}, w_{sj})\,g^*_{n_{sj}}(l_{sj}, \boldsymbol{r}_{sj}, \boldsymbol{y}_{sj}).$$

Если же $s \in \mathcal{M}_2$ или $s \in \mathcal{M}_3$, то, используя вместо формулы (16) формулу (17), имеем для граничного состояния $\boldsymbol{z}$ первого типа

$$v_{si}(\boldsymbol{z})\,p_s(\boldsymbol{z}) =$$

$$= \lambda u_{si}(k_s)\,g(l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si})\,(1-\rho_s)\lambda^{k_s-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k_s} B^*_{n_{sj}}(x_{sj} \mid l_{sj}, \boldsymbol{r}_{sj}, \boldsymbol{y}_{sj}, w_{sj})\,g^*_{n_{sj}}(l_{sj}, \boldsymbol{r}_{sj}, \boldsymbol{y}_{sj}).$$

Полученные соотношения показывают справедливость первого утверждения леммы.

Остальные два утверждения леммы 2 доказываются аналогично, если дополнительно воспользоваться формулами (1) и (3), а при доказательстве третьего утверждения соотношением $B^*_{n_{si}}(0 \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}, 1) = B^-_{n_{si}}(0 \mid l_{si}, \boldsymbol{r}_{si}, \boldsymbol{y}_{si}) = 0$.

Для окончания доказательства теоремы осталось проверить, что функция $p(\boldsymbol{z})$ удовлетворяет условию нормировки. Для этого мы сейчас докажем, что каждая из функций $p_s(\boldsymbol{z}_s),\ s = \overline{1, M}$, удовлетворяет условию нормировки.

Действительно, обозначим через $p_s(k),\ s = \overline{1, M},\ k \geq 0$, стационарную вероятность того, что в узле s находится k заявок (без учета их параметров). Тогда в силу формул (16), (17), (3), (4), (7) и (9) для узлов типа 1

$$\sum_{k=0}^\infty p_s(k) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\rho_s}\frac{\lambda^k}{k!}\prod_{i=1}^k\Biggl(\sum_{w_i=1}^2\sum_{l_i=1}^\infty\sum_{1\leq r_{i1},\ldots,r_{il_i}\leq M}\int\limits_{\mathbb{R}^{l_i}} d\boldsymbol{y}_i\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\sum_{n_i=1}^{l_i} B^*_{n_i}(x_i \mid l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i, w_i)\,g^*_{n_i}(l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i)\,\delta_{s-r_{in_i}}dx_i\Biggr) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty e^{-\rho_s}\frac{\lambda^k}{k!}\prod_{i=1}^k\Biggl(\sum_{l_i=1}^\infty\sum_{1\leq r_{i1},\ldots,r_{il_i}\leq M}\int\limits_{\mathbb{R}^{l_i}} d\boldsymbol{y}_i\times$$

$$\times \int_0^\infty \sum_{n_i=1}^{l_i} \overline{B}_{n_i}(x_i \mid l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i)\, g^*_{n_i}(l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i)\, \delta_{s-r_{in_i}} dx_i \Bigg) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\rho_s} \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{l_i=1}^{\infty} \sum_{1 \le r_{i1},\dots,r_{il_i} \le M} \int_{\mathbb{R}^{l_i}} \sum_{n_i=1}^{l_i} m_{n_i}(l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i)\, g^*_{n_i}(l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i)\, \delta_{s-r_{in_i}}\, d\boldsymbol{y}_i \right) =$$

$$= e^{-\rho_s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^{k} \rho_s = e^{-\rho_s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_s^k}{k!} = 1,$$

а для узлов типов 2 и 3

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_s(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho_s)\lambda^k \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{w_i=1}^{2} \sum_{l_i=1}^{\infty} \sum_{1 \le r_{i1},\dots,r_{il_i} \le M} \int_{\mathbb{R}^{l_i}} d\boldsymbol{y}_i \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty \sum_{n_i=1}^{l_i} B^*_{n_i}(x_i \mid l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i, w_i)\, g^*_{n_i}(l_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{y}_i)\, \delta_{s-r_{in_i}} dx_i \right) = (1-\rho_s) \sum_{k=0}^{\infty} \rho_s^k = 1.$$

Таким образом, теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. *Маргинальная стационарная плотность распределения процесса $\boldsymbol{Z}_s(t)$ определяется формулами (16), (17). Стационарное распределение вероятностей состояний процесса $\boldsymbol{Z}(t)$ имеет мультипликативную форму, т.е. представляется в виде произведения стационарных распределений вероятностей процессов $\boldsymbol{Z}_s(t)$.*

Следствие 2. *Стационарное распределение числа заявок в узле (без учета их параметров) имеет вид:*

для узла s типа 1

$$p_s(k) = e^{-\rho_s} \frac{\rho_s^k}{k!}\,;$$

для узла s типов 2 или 3

$$p_s(k) = (1-\rho_s)\rho^k.$$

Следствие 3. *Стационарные вероятности того, что заявка с параметрами $(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ не будет "убита" до n-го этапа и не будет "убита" на n-м этапе, равны $\omega^*_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ и $\omega_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, где $\omega^*_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ и $\omega_n(l, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ определяются формулами (1), (2), (5).*

Следствие 4. *Стационарная интенсивность λ_s входящего в узел s потока определяется формулой (12).*

Замечание к следствию 4.

Мы предположили в силу формулы (12), что суммарная стационарная интенсивность входящего в s-й узел потока $\lambda_s < \infty$. Это условие для неэкспоненциальных узлов не вытекает из условия конечности загрузки, но оно естественно для технических приложений. Однако от него можно отказаться. Тогда можно прийти к следующей ситуации. Несмотря на то, что поступающий в неэкспоненциальный узел поток имеет бесконечную интенсивность, число заявок в этом узле конечно, поскольку большинство заявок имеет чрезвычайно малую длительность обслуживания.

Следствие 5. *Стационарное распределение числа “не убитых” заявок в узле (без учета их параметров) имеет вид:*

для узла s типа 1

$$p_s^+(k) = e^{-\rho_s^+}\frac{(\rho_s^+)^k}{k!};$$

для узла s типов 2 или 3

$$p_s^+(k) = \frac{1-\rho_s}{1-\rho_s^-}\Big(\frac{\rho_s^+}{1-\rho_s^-}\Big)^k,$$

где ρ_s^+ и ρ_s^- определены формулами (10) и (11).

Следствие 6. *Стационарное распределение числа “убитых” (но продолжающих обслуживаться) заявок в узле (без учета их параметров) имеет вид:*

для узла s типа 1

$$p_s^-(k) = e^{-\rho_s^-}\frac{(\rho_s^-)^k}{k!};$$

для узла s типов 2 или 3

$$p_s^-(k) = \frac{1-\rho_s}{1-\rho_s^+}\Big(\frac{\rho_s^-}{1-\rho_s^+}\Big)^k.$$

Следствие 7. *Совместное стационарное распределение чисел “не убитых” и “убитых” заявок в узле (без учета их параметров) имеет вид:*

для узла s типа 1

$$p_s(k^+,k^-) = e^{-\rho_s}\frac{C_{k^++k^-}^{k^+}(\rho_s^+)^{k^+}(\rho_s^-)^{k^-}}{(k^++k^-)!};$$

для узла s типов 2 или 3

$$p_s(k^+,k^-) = (1-\rho_s)C_{k^++k^-}^{k^+}(\rho_s^+)^{k^+}(\rho_s^-)^{k^-}.$$

Доказательства этих следствий не представляют затруднений и здесь опускаются.

Из приведенных следствий очевидным образом следует, что величины ρ_s, ρ_s^+ и ρ_s^- соответственно определяют общую загрузку s-го узла, загрузку s-го узла, создаваемую “неубитыми” заявками и загрузку s-го узла, создаваемую “убитыми”, но еще обслуживаемыми заявками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelenbe E., Queueing networks with negative and positive customers, *J. Appl. Prob.*, 1991, vol. 28, pp. 656–653.
2. Gelenbe E., Glynn P., Sigman K., Queues with negative arrivals, *J. Appl. Prob.*, 1991, vol. 28, pp. 245–250.
3. Gelenbe E., Schassberger R., Stability of G-networks, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, 1992, vol. 6, pp. 271–276.
4. Gelenbe E., G-networks with instantaneous customer movement, *J. Appl. Prob.*, 1993, vol. 30,. no. 3, pp. 742–748.
5. Gelenbe E., G-networks with signals and batch removal, *Prob. Eng. Inf. Sci.*, 1993, vol. 7, pp. 335–342.
6. Gelenbe E., G-networks: a unifying model for neural and queueing networks, *Ann. Oper. Res.*, 1994, vol. 48, pp. 433–461.
7. Fourneau J.N., Gelenbe E., Suros R., G-networks with multiple classes of negative and positive customers, *Theoret. Comput. Sci.*, 1996, vol. 155, pp. 141–156.

8. Gelenbe E., Labed A., G-networks with multiple class of signals and positive customers, *Eur. J. Oper. Res.*, 1998, vol. 108, pp. 293–305.

9. Gelenbe E., Shachnai H., On G-networks and resource allocation in multimedia systems, *Eur. J. Oper. Res.*, 2000, vol. 126, pp. 308–318.

10. Gelenbe E., Fourneau J.N., G-networks with resets, *Performance Evaluation*, 2002, vol. 49, pp. 179–192.

11. Gelenbe E., Pujolle G., *Introduction to queueing networks*. New York: Wiley, 1998.

12. Artalejo J.R., G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks, *Eur. J. Oper. Res.*, 2000, vol. 126, pp. 233–249.

13. Бочаров П.П., Вишневский В.М., G-сети: развитие теории мультипликативных сетей, *AuT*, 2003, № 5, стр. 46–74.

14. Bocharov P.P., Gavrilov E.V., D'Apice C., Pechinkin A.V., Product form solution for G-networks with dependent service, *Proc. of Internat. Conference on Heterogeneous Networks, HETNET'03*, 21-23 July, 2003, Ilkley, pp. 28/1–28/11.

15. Бочаров П.П., Гаврилов Е.В., Д'Апиче Ч., Печинкин А.В., О декомпозиции сетей массового обслуживания с зависимым обслуживанием и отрицательными заявками, *AuT*, 2004, № 1.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И. Венец