*Информационные процессы, Том 5, № 1, 2005, стр. 1–19.*




# СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $G/MSP/n/r$ С ПОТОКОМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК [1]

**В.В. Чаплыгин**

*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,*
*107005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5,*
*e-mail: VasilyChaplygin@mail.ru*
Поступила в редколлегию 18.12.2004

**Аннотация**—Рассматривается многолинейная система массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, марковским процессом обслуживания, накопителем конечной или бесконечной емкости и потоком отрицательных заявок, убивающих заявки в накопителе. Для этой системы с помощью метода вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных характеристик обслуживания.

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Исследование систем массового обслуживания (СМО) с отрицательными заявками тесно связано с G-сетями [1] и началось практически одновременно с изучением последних. Результаты для отдельных СМО могут быть, например, востребованы как модели функционирования изолированных узлов при приближенном анализе G-сетей [2]. Первая работа, в которой была исследована однолинейная СМО с неограниченным накопителем с отрицательными заявками, принадлежит Е. Геленбе с соавторами [3]. В этой работе в достаточно общих предположениях относительно входящего потока положительных заявок и их длительностей обслуживания рассматривается дополнительный поток отрицательных заявок. Обслуживание положительных заявок производится в соответствии с дисциплиной FCFS, а для отрицательных заявок вводятся две стратегии выбора заявки для удаления из системы RCE (удаляется последняя положительная заявка) и RCH (удаляется заявка, находящаяся на обслуживании). В [3] показано, что условие существования стационарного режима рассматриваемой СМО зависит уже не от интенсивностей потока и обслуживания, как это есть для обычной СМО, а от самих распределений интервалов между поступлениями заявок и длительностей их обслуживания. В [4] для СМО $M/M/1/\infty$ с дисциплинами обслуживания FCFS и LCFS и с отрицательными заявками со стратегиями RCE и RCH получено ПЛС для совместного распределения времени пребывания положительной заявки в системе и вероятности того, что заявка не будет уничтожена. Процесс очереди для системы $M/G/1/\infty$ был рассмотрен этими же авторами в [5] для различных комбинаций дисциплин обслуживания и стратегий удаления. Для всех случаев получены стационарные распределения очереди.

В [6] получено стационарное распределение длины очереди в многолинейной системе вида *MM CPP/GE/c/*$\infty$, в которой потоки положительных и отрицательных заявок являются групповыми пуассоновскими потоками с геометрическим распределением размера группы, управляемыми марковскими процессами с конечным множеством состояний. Для аналогичной системы в [7] изучено

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант No 02-07-90147).

распределение времени пребывания положительной заявки как для RCE, так и для RCH дисциплин удаления положительных заявок, что обобщает результаты работы [4].

Система *M/G/1/*$\infty$ с потоком отрицательных заявок несколько иного типа по сравнению с [3] и другими приведенными выше работами рассмотрена в [8]. В [8] предполагается, что действие отрицательной заявки происходит не мгновенно при поступлении отрицательной заявки, а лишь в моменты окончания обслуживания положительных заявок. Для этой системы в [8] изучается процесс очереди в моменты окончания обслуживания заявок и в произвольные моменты времени.

В [9, 10] рассматривалась система *M/G/1/0* с повторными и отрицательными заявками при дисциплине LCFS/PR, где было получено в терминах производящей функции стационарное распределение вероятностей состояний системы. Обобщение этих результатов на случай нескольких пуассоновских потоков положительных заявок получено в [11].

В работах [12, 13] построен алгоритм расчета стационарных вероятностей для двухфазной экспоненциальной системы массового обслуживания с потерями, обратной связью и отрицательными заявками.

Ранее исследование однолинейных систем с рекуррентным входящим потоком и марковским процессом обслуживания методом построения вложенной цепи Маркова рассматривалось в работах [14], [15], и многолинейных систем — в работе [16]. В этих работах для конечного накопителя методом исключения методом исключения состояний цепи Маркова и бесконечного накопителя, используя результаты Ньютса [17], получено стационарное распределение по вложенной цепи, стационарное распределение по времени, распределения и средние времен ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

В настоящей работе для рассматриваемой СМО с помощью метода вложенной цепи Маркова найдены стационарные распределения основных характеристик обслуживания.

Рассмотрим $n$-линейную систему массового обслуживания *G/MSP/n/r* $(1 \le n < \infty,\ r \le \infty)$ с накопителем емкости $r$.

Входящий в систему поток является рекуррентным, причем время между соседними моментами поступления заявок имеет произвольную функцию распределения $A(x)$. Будем предполагать, что среднее время $a = \int\limits_0^\infty x\,dA(x)$ между поступлениями заявок конечно и, кроме того, там, где речь пойдет о стационарном распределении по времени, будем считать, что время между поступлениями заявок не может принимать только значения $jt$, где $t$ — положительное число, а $j = 0, 1, \ldots$ .

Пусть в случайные моменты времени в систему поступают отрицательные заявки, которые убивают заявки в накопителе. Убитые заявки на обслуживание не принимаются и сразу же покидают систему. Будем считать, что процесс поступления отрицательных заявок является марковским процессом с непрерывным временем и конечным числом $q$ состояний, который можно описать следующим образом.

Определим матрицы $\Gamma_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. За “малое” время $\Delta$ с вероятностью $(\Gamma_0)_{ij}\Delta + o(\Delta)$, $i, j = \overline{1, q}$, фаза процесса изменится на $j$, и ни одной заявки в накопителе убито не будет при условии, что в начальный момент процесс находился на фазе $i$, и с вероятностью $(\Gamma_m)_{ij}\Delta + o(\Delta)$, $i, j = \overline{1, q}$, фаза процесса изменится на $j$, и ровно $m$ заявок в накопителе будут убиты и покинут систему при условии, что в начальный момент процесс находился на фазе $i$ и в накопителе находилось более $m$ заявок.

Введем следующие матрицы:

$$\Gamma_i^* = \sum_{k=i}^{\infty} \Gamma_k,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\Gamma^* = \Gamma_0^*.$$

Если в некоторый момент времени в накопителе находилось $m$, $m > 0$, заявок, то за “малое” время $\Delta$ с вероятностью $(\Gamma^*_m)_{ij}\Delta + o(\Delta)$, $i, j = \overline{1, q}$, фаза процесса изменится на $j$ и все $m$ заявок будут убиты и покинут систему при условии, что в начальный момент процесс находился на фазе $i$.

Предположим, что матрица $\Gamma^*$ является неразложимой, а матрица $\Gamma^*_1$ ненулевой. Будем считать также, что на периоде, когда в накопителе отсутствуют заявки, фаза процесса не меняется. Вектор стационарных вероятностей марковского процесса поступления отрицательных заявок (т.е. марковского процесса с инфинитезимальной матрицей $\Gamma^*$) будем обозначать через $\boldsymbol{\gamma}$. Стационарную интенсивность убийства заявок можно записать в виде $\alpha = \boldsymbol{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, \Gamma_k \mathbf{1}$.

Если в накопителе находятся $k$, $k = \overline{1, r}$, заявок, то будем говорить, что заявка находится на $i$-м месте, $i = \overline{1, k}$, в накопителе, если в накопителе присутствует ровно $i - 1$ заявка, которые попали в накопитель ранее рассматриваемой заявки. Если в некоторый момент в накопителе находится $k$, $k = \overline{1, r}$, заявок и в этот момент в систему поступает ровно $m$, $m = \overline{1, k}$ отрицательных заявок, то будут убиты первые $m$ заявок из накопителя.

Будем считать, что во время отсутствия заявок в накопителе, фаза процесса поступления отрицательных заявок не меняется.

Марковский процесс обслуживания заявок определяется следующим образом. В том случае, когда в системе находится $k$, $0 \le k \le n + r$, заявок, процесс обслуживания может находиться в одном из $l_k$, $l_k < \infty$, состояний (фаз обслуживания). Тогда, если в некоторый момент в системе находится $k$, $k = \overline{1, n + r}$, заявок и фаза обслуживания равна $i$, $i = \overline{1, l_k}$, то за “малое" время $\Delta$ с вероятностью $\lambda^{(k)}_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на $j$, $j = \overline{1, l_k}$, и все заявки будут продолжать обслуживаться, а с вероятностью $n^{(k)}_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на $j$, $j = \overline{1, l_{k-1}}$, но обслуживание одной из заявок закончится, и она покинет систему. Матрицы из элементов $\lambda^{(k)}_{ij}$ и $n^{(k)}_{ij}$ будем обозначать через $\Lambda^{(k)}$ и $N^{(k)}$, $k = \overline{1, n + r}$.

Далее всюду будем предполагать, что $l_k = l$ при $k = \overline{n, n + r}$, матрицы $\Lambda^{(k)} = \Lambda$ совпадают при $k = \overline{n, n + r}$, матрицы $N^{(k)} = N$ совпадают при $k = \overline{n + 1, n + r}$.

Будем считать, что на свободном периоде фаза обслуживания $i$, $i = \overline{1, l_0}$, не изменяется.

Введем матрицу $\Lambda^* = \Lambda + N$. Обозначим через $\boldsymbol{\pi}$ вектор стационарных вероятностей марковского процесса с инфинитезимальной матрицей $\Lambda^*$. Тогда стационарную интенсивность обслуживания заявок можно записать в виде $\mu = \boldsymbol{\pi} N \mathbf{1}$.

Наконец, при $k = \overline{0, n - 1}$ будем предполагать, что если в момент поступления очередной заявки в системе имеется $k$ других заявок и фаза обслуживания равна $i$, $i = \overline{1, l_k}$, то после поступления новой заявки она с вероятностью $\omega^{(k)}_{ij}$ изменится на $j$, $j = \overline{1, l_{k+1}}$. Соответственно, матрицу из элементов $\omega^{(k)}_{ij}$ будем обозначать через $\Omega^{(k)}$.

Заявки обслуживаются в порядке поступления (дисциплина FCFS). Заявка, поступающая в систему, в которой уже находится $n + r$ заявок ($n$ на приборах и $r$ в накопителе), теряется.

Назовем общим процессом ухода заявок из системы процесс, образованный изменениями в системе как в моменты изменения состояний марковского процесса обслуживания заявок, так и в моменты поступления отрицательных заявок в систему.

В том случае, когда в системе находится $k$, $0 \le k \le n + r$, заявок, процесс ухода заявок может находиться в одном из $h_k = q\, l_k$ состояний. Из описания процесса обслуживания заявок следует, что $h_k = h$ при $k = \overline{n, n + r}$.

Определим следующие матрицы

$$\begin{aligned}
&\Theta_0^{(k)} = I_q \otimes \Lambda^{(k)},\ k = \overline{1,n},\\
&\Theta_1^{(k)} = I_q \otimes N^{(k)},\ k = \overline{1,n},\\
&\Theta_0 = \Gamma_0 \otimes I_l + I_q \otimes \Lambda,\\
&\Theta_1^* = \Gamma_1^* \otimes I_l + I_q \otimes N,\\
&\Theta_1 = \Gamma_1 \otimes I_l + I_q \otimes N,\\
&\Theta_m = \Gamma_m \otimes I_l,\ m \geq 2,\\
&\Theta_m^* = \Gamma_m^* \otimes I_l,\ m \geq 2,\\
&\hat{\Theta}_1^* = \Gamma_1^* \otimes I_l,\\
&\hat{\Theta}_m^* = \Theta_m^*,\ m \geq 2,
\end{aligned}$$

где $I_{l_k}$ и $I_q$ — единичные матрицы порядков $l_k$ и $q$ соответственно.

Пусть в некоторый момент в системе находится $k$ заявок, фаза процесса поступления отрицательных заявок в систему равна $i,\ i = \overline{1,q}$, а фаза обслуживания равна $j,\ j = \overline{1,l_k}$. Тогда за “малое" время $\Delta$:

1) если $k = \overline{0,n}$, то с вероятностью $\left(\Theta_0^{(k)}\right)_{uv}\Delta + o(\Delta),\ \ u = i(l_k-1)+j,\ \ v = e(l_k-1)+d,\ \ e = \overline{1,q},\ \ d = \overline{1,l_k}$, фаза процесса поступления отрицательных заявок сменится на $e$, фаза процесса обслуживания заявок сменится $d$ и ни одна заявка не покинет систему [1] и с вероятностью $\left(\Theta_1^{(k)}\right)_{uv}\Delta + o(\Delta)$, процесс ухода заявок из системы перешел на фазу $v$, $v = \overline{1,h_{k-1}}$, и одна заявка покинет систему, при условии, что в начальный момент в системе были заявки и процесс ухода заявок из системы находился на фазе $u$, $u = \overline{1,h_k}$, $k = \overline{1,n}$;

2) если $k = n+1$, то с вероятностью $(\Theta_0)_{uv}\Delta + o(\Delta)$, $u, v = \overline{1,h}$, процесс ухода заявок перейдет на фазу $v$ и ни одна заявка не уйдет из системы при условии, что в начальный момент процесс ухода заявок из системы находился на фазе $u$ и с вероятностью $(\Theta_1^*)_{uv}\Delta + o(\Delta)$, $u, v = \overline{1,h}$, процесс ухода заявок перейдет на фазу $v$ и ровно одна заявка уйдет из системы при условии, что в начальный момент процесс ухода заявок из системы находился на фазе $u$;

3) если $k > n+1$, то, при условии, что в начальный момент процесс ухода заявок из системы находился на фазе $u$, $u = \overline{1,h}$, с вероятностью $(\Theta_0)_{uv}\Delta + o(\Delta)$, $u, v = \overline{1,h}$, процесс ухода заявок перейдет на фазу $v$ и ни одна заявка не уйдет из системы, с вероятностью $(\Theta_m)_{uv}\Delta + o(\Delta)$, $u, v = \overline{1,h}$, $m = \overline{1,k-n-1}$, процесс ухода заявок перейдет на фазу $v$ и ровно $m$ заявок уйдет из системы и с вероятностью $\left(\Theta_{k-n}^*\right)_{uv}\Delta + o(\Delta)$ перейдет на фазу $v$ и ровно $(k-n)$ заявок уйдет из системы.

На свободном периоде фаза процесса ухода заявок не меняется.

В стационарном режиме загрузку системы запишем в виде $\rho = 1/a(\mu+\alpha)$. Предполагается, что такая формула для загрузки системы справедлива при бесконечно заполненном накопителе. Заметим, что условие $\rho < 1$ является необходимым и достаточным для существования стационарного режима для системы с бесконечным накопителем.

## 2. СИСТЕМА $G/BMSP/n/r$ С КОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ

В этом разделе будем предполагать, что $r \geq 2$. В случае $r = 0, 1$ часть из полученных здесь формул требуют определенных изменений, которые в силу их тривиальности не приводятся.

Рассмотрим последовательные моменты $\tau_n,\ n \geq 0$, поступления заявок в систему.

Пусть $\xi(t)$ — фаза процесса поступления отрицательных заявок в момент времени $t$, $\eta(t)$ — фаза обслуживания заявок в момент времени $t$, а $\nu(t)$ — число заявок в системе в этот момент.

[1] В дальнейшем просто будем писать, что процесс ухода заявок из системы перешел с фазы $u$, $u = \overline{1,h_k}$, на фазу $v$, $v = \overline{1,h_k}$, подразумевая при этом, что фаза процесса поступления отрицательных заявок в систему сменится с $i$ на $e$, а фаза процесса обслуживания сменится с $j$ на $d$.

Определим случайные величины $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$, $\eta_n = \eta(\tau_n + 0)$ и $\nu_n = \nu(\tau_n + 0)$, которые задают соответственно фазу процесса поступления отрицательных заявок, фазу обслуживания и число заявок в системе непосредственно после момента поступления $n$-й заявки. Кроме того, положим $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n, \nu_n)$. Тогда последовательность $\{\zeta_n,\ n \geq 0\}$ образует однородную цепь Маркова, которую будем называть вложенной. Очевидно, что множество состояний $\mathcal{X}$ вложенной цепи Маркова имеет вид

$$\mathcal{X} = \{(i,j,k),\ \ i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,l_k},\ \ k = \overline{1,n+r}\},$$

где индексы $i$ и $k$ указывают соответственно фазу процесса поступления отрицательных заявок, фазу обслуживания и число заявок в системе непосредственно после момента поступления заявки.

Выпишем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $\{\zeta_n,\ \ n \geq 0\}$. Для этого сначала определим следующие матрицы:

$F_k(x),\ \ k \geq 0,$ — матрица, элемент $(F_k(x))_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время $x$ ровно $k$ заявок, убитых или обслужившихся, покинут систему и процесс ухода заявок из системы перейдет на фазу $j$, при условии, что в начальный момент в системе (вместе с заявками на приборах) было не менее $k+n+1$ заявок, процесс ухода заявок находился на фазе $i$ и за время $x$ в систему не поступила новая заявка;

$A_k,\ \ k \geq 0,$ — матрица, элемент $(A_k)_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время между поступлениями заявок ровно $k$ заявок, убитых или обслужившихся, покинут систему и процесс ухода заявок из системы перейдет на фазу $j$, при условии, что в начальный момент в системе было не менее $k+n+1$ заявок и процесс ухода заявок находился на фазе $i$.

Матричные функции $F_k(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$F_0(x) = e^{\Theta_0 x}, \tag{1}$$

$$F_k(x) = \int\limits_0^x \sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(y)\,\Theta_m\,F_0(x-y)dy,\ \ k \geq 1, \tag{2}$$

а матрицы $A_k$ определяются формулой

$$A_k = \int\limits_0^\infty F_k(x)\,dA(x),\ \ k \geq 0. \tag{3}$$

Нам понадобятся также матрицы:

$F_{km}(x),\ \ m = \overline{0,n-1},\ \ k \geq m,$ — матрица, элемент $(F_{km}(x))_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время $x$ $k-m$ заявок покинут систему и процесс ухода заявок перейдет на фазу $j$, при условии, что в начальный момент в системе (вместе с заявками на приборах) было $k$ заявок, процесс обслуживания находился на фазе $i$ и за время $x$ в систему не поступила новая заявка;

$A_{km},\ \ m = \overline{0,n},\ \ k \geq m,$ — матрица, элемент $(A_{km})_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что за время между поступлениями заявок $k-m$ заявок покинут систему и процесс ухода заявок после поступления новой заявки перейдет на фазу $j$, при условии, что в начальный момент в системе было $k$ заявок и процесс обслуживания находился на фазе $i$.

Для матриц $F_{km}(x)$ справедливы соотношения

$$F_{00}(x) = I, \tag{4}$$

$$F_{kk}(x) = e^{\Theta_0^{(k)} x},\ \ k = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$$F_{k0}(x)=\int\limits_0^x F_{k,1}(y)\,\Theta_1^{(1)}dy,\ \ k=\overline{1,n}, \tag{6}$$

$$F_{km}(x)=\int\limits_0^x F_{k,m+1}(y)\,\Theta_1^{(m+1)}F_{mm}(x-y)dy,\ \ k=\overline{1,n},\ \ 0<m<k, \tag{7}$$

$$F_{kn}(x)=\int\limits_0^x \sum_{j=1}^{k-n} F_{k-n-j}(y)\,\Theta_j^{*}F_{nn}(x-y)\,dy,\ \ k>n, \tag{8}$$

$$F_{k0}(x)=\int\limits_0^x F_{k,1}(y)\Theta_1^{(1)}\,dy,\ \ k>n, \tag{9}$$

$$F_{km}(x)=\int\limits_0^x F_{k,m+1}(y)\Theta_1^{(m+1)}F_{mm}(x-y)\,dy,\ \ k>n>m>0, \tag{10}$$

а матрицы $A_{km}$ — из соотношения

$$\begin{aligned} A_{km} &= \int\limits_0^\infty F_{km}(x)\,dA(x)\,(I_q\otimes\Omega_m),\ \ m=\overline{0,n-1},\ \ k\geq m.\\ A_{kn} &= \int\limits_0^\infty F_{kn}(x)\,dA(x)\,,\ \ k\geq n. \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь уже нетрудно показать, что матрица $P$ переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, представленная в блочной форме $P=(P_{km})$, $k,m=\overline{1,n+r}$, имеет следующий вид:

$$P=\begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n-1,0} & A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ A_{n0} & A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{n,n-1} & A_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0\\ A_{n+1,0} & A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \dots & A_{n+1,n-1} & A_{n+1,n} & A_0 & 0 & \dots & 0\\ A_{n+2,0} & A_{n+2,1} & A_{n+2,2} & \dots & A_{n+2,n-1} & A_{n+2,n} & A_1 & A_0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n+r-1,0} & A_{n+r-1,1} & A_{n+r-1,2} & \dots & A_{n+r-1,n-1} & A_{n+r-1,n} & A_{r-2} & A_{r-3} & \dots & A_0\\ A_{n+r,0} & A_{n+r,1} & A_{n+r,2} & \dots & A_{n+r,n-1} & A_{n+r,n} & A_{r-1} & A_{r-2} & \dots & A_1+A_0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $p^*_{ik}$, $i=\overline{1,h_k}$, $k=\overline{1,n+r}$, стационарную по вложенной цепи Маркова вероятность того, что в системе имеется $k$ заявок и процесс ухода заявок находился в состоянии $i$, и положим $\boldsymbol{p}^*_k=(p^*_{1k},\dots,p^*_{h_k k})$, $\boldsymbol{p}^*=(\boldsymbol{p}^*_1,\dots,\boldsymbol{p}^*_{n+r})$. Тогда для $\boldsymbol{p}^*$ справедлива система уравнений равновесия (СУР)

$$\boldsymbol{p}^*=\boldsymbol{p}^*P, \tag{12}$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1^* &= \sum_{m=1}^{n+r} \boldsymbol{p}_m^* A_{m0}, \\
\boldsymbol{p}_k^* &= \sum_{m=k-1}^{n+r} \boldsymbol{p}_m^* A_{m,k-1}, \;\; k = \overline{2, n+1}, \\
\boldsymbol{p}_k^* &= \sum_{m=k-1}^{n+r} \boldsymbol{p}_m^* A_{m-k+1}, \;\; k = \overline{n+2, n+r-1}, \\
\boldsymbol{p}_{n+r}^* &= \boldsymbol{p}_{n+r-1}^* A_0 + \boldsymbol{p}_{n+r}^* (A_0 + A_1),
\end{aligned} \tag{13}$$

с условием нормировки

$$p_{\cdot,\cdot}^* = 1. \tag{14}$$

Здесь символ “$\cdot$" означает суммирование по всем значениям соответствующего дискретного аргумента.

Для решения СУР (13) можно использовать методы, изложенные в [15, 18].

Зная стационарное распределение вложенной цепи Маркова, нетрудно определить другие стационарные характеристики обслуживания в рассматриваемой системе.

Векторы $\boldsymbol{p}_k^- = (p_{1k}^-, \ldots, p_{hk}^-),\; k = \overline{0, n+r}$, где $p_{ik}^-$ — стационарная вероятность того, что поступающая в систему заявка застанет в ней $k$ других заявок и марковский процесс обслуживания после ее поступления окажется на фазе $i$, определяются соотношениями

$$\boldsymbol{p}_k^- = \boldsymbol{p}_{k+1}^*, \;\; k = \overline{0, n+r-2},$$

$$\boldsymbol{p}_{n+r-1}^- = \boldsymbol{p}_{n+r-1}^* A_0 + \boldsymbol{p}_{n+r}^* A_1,$$

$$\boldsymbol{p}_{n+r}^- = \boldsymbol{p}_{n+r}^* A_0.$$

В частности, стационарная вероятность $\pi$ потери заявки из-за заполненного накопителя в момент ее прихода в систему определяется формулой

$$\pi = \boldsymbol{p}_{n+r}^- \mathbf{1} = \boldsymbol{p}_{n+r}^* A_0 \mathbf{1}.$$

Для нахождения стационарных вероятностей состояний по времени введем матрицы $T_k,\; k = \overline{0, r}$, и $T_{km},\; k = \overline{1, n+r},\; m = \overline{0, \min\{k, n-1\}}$. Элемент $(T_k)_{ij},\; i, j = \overline{1, l}$, матрицы $T_k$ представляет собой среднее время, проведенное рассматриваемой системой на интервале между соседними моментами поступления заявок в состоянии $(j, n+r-k)$ при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось $n+r$ заявок и фаза обслуживания была $i$. Элемент $(T_{km})_{ij},\;\; i = \overline{1, l_k},\;\; j = \overline{1, l_m}$, матрицы $T_{km}$ представляет собой среднее время, проведенное рассматриваемой системой на интервале между соседними моментами поступления заявок в состоянии $(j, m)$, при условии, что после поступления первой заявки в системе оказалось $k$ заявок и фаза обслуживания была $i$.

Матрицы $T_k$ и $T_{km}$ определяются соотношениями:

$$T_k = \int_0^\infty (1 - A(x)) F_k(x)\, dx, \;\; k = \overline{0, r}; \tag{15}$$

$$T_{km} = \int_0^\infty (1 - A(x)) F_{km}(x)\, dx, \;\; k = \overline{1, n+r},\; m = \overline{0, n},\; k \geq m. \tag{16}$$

Используя результаты теории полумарковских процессов, получаем для векторов $\boldsymbol{p}_k,\ k=\overline{0,n+r}$, стационарных вероятностей состояний по времени формулы:

$$\boldsymbol{p}_0=\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{n+r}\boldsymbol{p}_m^*T_{m0};$$

$$\boldsymbol{p}_k=\frac{1}{T}\sum_{m=k}^{n+r}\boldsymbol{p}_m^*T_{mk},\quad k=\overline{1,n};$$

$$\boldsymbol{p}_k=\frac{1}{T}\sum_{m=k}^{n+r}\boldsymbol{p}_m^*T_{m-k},\quad k=\overline{n+1,n+r},$$

где $T$ — среднее время между изменениями состояний вложенной цепи Маркова, которое для рассматриваемой системы совпадает со средним временем $a$ между поступлениями заявок, т.е. $T=a$.

Выпишем некоторые характеристики, связанные с временем пребывания заявки в системе.

Обозначим через $Q_k,\ k=\overline{1,r}$, условную вероятность того, что заявка, застав в системе в момент своего прихода $(n+k-1)$ заявок и фазу процесса ухода заявок, равную $i$, будет убита и фаза процесса в этот момент станет равной $j$.

$$Q_k=\int\limits_0^\infty\sum_{i=1}^{k}F_{k-i}(x)\hat{\Theta}_i^*dx.$$

Откуда вероятность потери $\delta$ заявки равна

$$\delta=\pi+\sum_{k=n}^{n+r-1}\boldsymbol{p}_k^-Q_{k-n+1}\mathbf{1}$$

Вероятность того, что заявка обслужится, равна

$$\Psi=\sum_{k=0}^{n+r-1}\boldsymbol{p}_k^-\mathbf{1}-\sum_{k=n}^{n+r-1}\boldsymbol{p}_k^-Q_{k-n+1}\mathbf{1}$$

Обозначим через $V_k(x),\ k=\overline{0,r-1}$, матрицу, элементом $(V_k(x))_{ij}$ которой является вероятность того, что заявка за время $x$ попадет на прибор и фаза процесса ухода заявок из системы изменится на $j,\ j=\overline{1,h}$, при условии, в момент прихода эта заявка застала в системе $n+k$ заявок и фаза процесса ухода заявок была $i$, а через $\Phi_k(s)$ — ее преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС). Обозначим также через $f_k(s),\ k\geq 0$, ПЛС матрицы $F_k(s)$, которая введена ранее.

Поскольку вероятность того, что заявка, попавшая в систему и заставшая в системе $n+k$ заявок, попадет на прибор на временном интервале $[x,x+dx)$, определяется матричной формулой $F_k(x)(I\otimes N)dx$, имеем

$$\Phi_k(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}F_k(x)(I\otimes N)dx=f_k(s)(I\otimes N).$$

Заметим также, что при $k\geq 1$

$$f_k(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}F_k(x)\,dx=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\int\limits_0^x\sum_{m=1}^{k}F_{k-m}(y)\Theta_mF_0(x-y)\,dy\,dx=\sum_{m=1}^{k}f_{k-m}(s)\Theta_mf_0(s)$$

и при $k = 0$

$$f_0(s) = \int_0^\infty e^{-sx} F_0(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-sx} e^{\Theta_0 x} dx = \int_0^\infty e^{(-sI+\Theta_0)x} dx = (sI - \Theta_0)^{-1}.$$

Очевидно, что при $k \geq 1$

$$f_k'(s) = \left(\sum_{m=1}^{k} f_{k-m}(s)\Theta_m f_0(s)\right)' = \sum_{m=1}^{k} (f_{k-m}'(s)\Theta_m f_0(s) + f_{k-m}(s)\Theta_m f_0'(s)).$$

Но $f_0(0) = -\Theta_0^{-1}$ и $f_0'(s) = ((sI - \Theta_0)^{-1})' = -((sI - \Theta_0)^{-1})^2$, откуда $f_0'(0) = -(\Theta_0^{-1})^2$.

Подставляя значения для $f_0(0)$ и $f_0'(0)$ в последнюю формулу, получаем выражение

$$f_k'(0) = -\sum_{m=1}^{k} (f_{k-m}'(0)\Theta_m + f_{k-m}(0)\Theta_m\Theta_0^{-1})\Theta_0^{-1},$$

из которого рекуррентно можно найти все $f_k'(0),\ k \geq 1$.

Отсюда уже нетрудно получить ПЛС $\omega(s)$ стационарного распределения $W(x)$ ожидания начала обслуживания произвольной принятой к обслуживанию заявки, которое имеет вид

$$\omega(s) = \frac{1}{1-\delta}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_k^- \mathbf{1} + \sum_{k=n}^{n+r-1} \boldsymbol{p}_k^- \Phi_{k-n}(s)\mathbf{1}\right).$$

В частности, дифференцируя эти формулу в точке $s = 0$, получаем для среднего времени $w$ ожидания начала обслуживания произвольной принятой к обслуживанию заявки для стационарного режима функционирования системы выражения

$$w = -\frac{1}{1-\delta}\sum_{k=n}^{n+r-1} \boldsymbol{p}_k^- \Phi_{k-n}'(0)\mathbf{1}.$$

Функцию распределения времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки при условии того, что заявка попадет на прибор, запишем в виде

$$W(x) = \frac{1}{1-\delta}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_k^- + \sum_{k=n}^{n+r-1} \boldsymbol{p}_k^- D_{k-n}(x)\right),$$

где

$$D_k(x) = \int_0^x F_k(y)(I \otimes N)dy. \tag{17}$$

## 3. СИСТЕМА $G/MSP/n/\infty$ С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ

Обратимся теперь к системе с бесконечным накопителем ($r = \infty$).

Рассмотрим, как и в случае конечного накопителя, вложенную цепь Маркова, множество состояний которой

$$\mathcal{X} = \{(i,j,k),\ \ i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,l_k},\ \ k \geq 1\},$$

теперь будет счетным.

Вводя, как и прежде, векторы $\boldsymbol{p}_k^*,\ k \geq 1$, и $\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*, \ldots)$ стационарных вероятностей состояний вложенной цепи Маркова, получаем для $\boldsymbol{p}^*$ СУР (12), в которой матрица $P$ переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A_{n-1,0} & A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \ldots & A_{n-1,n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ A_{n0} & A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{n,n-1} & A_{n,n} & 0 & 0 & \ldots \\ A_{n+1,0} & A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \ldots & A_{n+1,n-1} & A_{n+1,n} & A_0 & 0 & \ldots \\ A_{n+2,0} & A_{n+2,1} & A_{n+2,2} & \ldots & A_{n+2,n-1} & A_{n+2,n} & A_1 & A_0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Приведем также развернутую запись СУР (12):

$$\boldsymbol{p}_1^* = \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_m^* A_{m0}; \tag{18}$$

$$\boldsymbol{p}_k^* = \sum_{m=k-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_m^* A_{m,k-1}, \quad k = \overline{2, n+1}; \tag{19}$$

$$\boldsymbol{p}_k^* = \sum_{m=k-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_m^* A_{m-k+1}, \quad k > n+1. \tag{20}$$

При $k > n+1$ стационарные вероятности $\boldsymbol{p}_k^*$ будем искать в виде

$$\boldsymbol{p}_k^* = \boldsymbol{p}_{n+1}^* G^{k-n-1}, \quad k \geq n+1, \tag{21}$$

где $G$ — решение уравнения

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} G^k A_k. \tag{22}$$

Известно (см., например, [15, 17]), что уравнение (22) при $\rho < 1$ имеет единственное решение в классе матриц, все собственные значения которых по модулю меньше единицы (отсюда, в частности, следует, что матрица $I - G$ имеет обратную). Это решение является матрицей, все элементы которой положительны.

То, что при любом $\boldsymbol{p}_{n+1}^*$ векторы $\boldsymbol{p}_k^*,\ k \geq n+1$, определяемые формулой (21), удовлетворяют всем уравнениям (20), проверяется непосредственной подстановкой.

Оставшиеся неизвестными векторы $\boldsymbol{p}_k^*,\ k = \overline{1, n+1}$, найдем из уравнений (17) и (18), подставляя в эти уравнения вместо $\boldsymbol{p}_k^*,\ k > n+1$, их выражения по формуле (21). Тогда

$$\boldsymbol{p}_1^* = \sum_{m=1}^{n} \boldsymbol{p}_m^* A_{m0} + \boldsymbol{p}_{n+1}^* A_0^*, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{p}_k^* = \sum_{m=k-1}^{n} \boldsymbol{p}_m^* A_{m,k-1} + \boldsymbol{p}_{n+1}^* A_{k-1}^*, \quad k = \overline{2, n+1}, \tag{24}$$

где

$$A_k^* = \sum_{m=n+1}^{\infty} G^{m-n-1} A_{mk}, \quad k = \overline{0, n}. \tag{25}$$

Очевидно, что все элементы матриц $A_k^*$ являются неотрицательными.

Запишем систему уравнений (23), (24) в виде

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \tilde{\boldsymbol{p}} \tilde{P},$$

где

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1,0} & A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} & 0 \\ A_{n,0} & A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \\ A_0^* & A_1^* & A_2^* & \dots & A_{n-1}^* & A_n^* \end{pmatrix},$$

а $\tilde{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{p}_1^*, \dots, \boldsymbol{p}_{n+1}^*)$. Теперь для того, чтобы показать, что система уравнений (23), (24) имеет решение, достаточно показать, что матрица $\tilde{P}$ является стохастической. Поскольку первые $n$ строк матриц $\tilde{P}$ и $P$ совпадают, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы матрица $\tilde{P}$ была стохастической, является выполнение равенства

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^* \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Докажем это равенство.

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^* \mathbf{1} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=n+1}^{\infty} G^{m-n-1} A_{mk} \mathbf{1} = \sum_{m=n+1}^{\infty} G^{m-n-1} \sum_{k=0}^{n} A_{mk} \mathbf{1}$$

$$= \sum_{m=n+1}^{\infty} G^{m-n-1} \left( I - \sum_{k=0}^{m-n-1} A_k \right) \mathbf{1} = \left( (I-G)^{-1} - \sum_{m=0}^{\infty} G^m \sum_{k=0}^{m} A_k \right) \mathbf{1}$$

$$= \left( (I-G)^{-1} - (I-G)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} G^i A_i \right) \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Таким образом, в силу теоремы Фостера формула (21) определяет (единственное) решение СУР (18)–(20), где матрица $G$ и векторы $\boldsymbol{p}_k^*$, $k = \overline{1, n}$, находятся из уравнений (22)–(24) и условия нормировки (14), которое легко приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k^* \mathbf{1} + \boldsymbol{p}_{n+1}^* (I-G)^{-1} \mathbf{1} = 1.$$

Дальнейшее исследование СМО *G/MSP/n/*$\infty$ ничем не отличается от исследования СМО с накопителем конечной емкости.

Так, справедливы следующие формулы:

для вектора $\boldsymbol{p}_k^-$, $k \geq 0$, стационарных вероятностей того, что в момент поступления заявка застанет в системе $k$ других заявок (и после поступления новой заявки процесс обслуживания будет находиться на соответствующей фазе),

$$\boldsymbol{p}_k^- = \boldsymbol{p}_{k+1}^*;$$

для векторов $\boldsymbol{p}_k$, $k \geq 0$, стационарных вероятностей состояний по времени

$$\boldsymbol{p}_0 = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_m^* T_{m0},$$

$$\boldsymbol{p}_k = \frac{1}{T} \sum_{m=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_m^* T_{mk}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\boldsymbol{p}_k = \frac{1}{T} \sum_{m=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_m^* T_{m-k}, \quad k > n,$$

где матрицы $T_k$ и $T_{mk}$ определяются формулами (15), (16);

для вероятности потери $\delta$ заявки

$$\delta = \sum_{k=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_k^- Q_{k-n+1} \mathbf{1}.$$

для ПЛС $\omega(s)$ стационарного распределения $W(x)$ времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки при условии, что она попадет на прибор

$$\omega(s) = \frac{1}{1-\delta} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_k^- \mathbf{1} + \boldsymbol{p}_n^- \sum_{k=0}^{\infty} G^k \Phi_k(s) \mathbf{1} \right).$$

для среднего времени $w$ ожидания начала обслуживания произвольной заявки для стационарного режима функционирования системы

$$w = -\frac{1}{1-\delta}\, \boldsymbol{p}_n^- \sum_{k=0}^{\infty} G^k \Phi_k'(0) \mathbf{1}.$$

Функция распределения $W(x)$ для системы с бесконечным накопителем может быть записана в виде

$$W(x) = \frac{1}{1-\delta} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_k^- \mathbf{1} + \sum_{k=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_k^- D_{k-n}(x) \mathbf{1} \right) = \frac{1}{1-\delta} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_k^{-T} \mathbf{1} + \boldsymbol{p}_n^{-T} \sum_{k=0}^{\infty} G^k D_k(x) \mathbf{1} \right),$$

или, полагая

$$D(x) = \int\limits_0^x R(y)(I \otimes N) dy,$$

где

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} G^i F_i(x),$$

в виде

$$W(x) = \frac{1}{1-\delta}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_k^- \mathbf{1} + \boldsymbol{p}_n^- D(x)\mathbf{1}\right).$$

## 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Обозначим через $a$ модуль минимального диагонального элемента всех матриц $\Theta_0^{(k)}$ и $\Theta_0$. Положим $Q_0 = I,\ Q_k = I + \Theta_0^{(k)}/a,\ k = \overline{1,n}$, и $Q = I + \Theta_0/a$.

Матрицы $F_k(x)$ будем искать в виде

$$F_k(x) = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} F_{ki}, \quad k \geq 0.$$

Воспользовавшись (1) и (2), а также представлением матриц $\Theta_k,\ k = \overline{1,n}$, через матрицы $Q_k$, получим

$$F_k(x) = \int_0^x \sum_{m=1}^{k} F_{k-m}(y)\,\Theta_m\,F_0(x-y)dy =$$

$$= \int_0^x \sum_{m=1}^{k}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-ay}\frac{(ay)^i}{i!}F_{k-m,i}\,\Theta_m\,e^{-a(x-y)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a(x-y))^j}{j!}Q^j dy$$

$$= e^{-ax}\sum_{m=1}^{k}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} F_{k-m,i}\,\Theta_m\,Q^j\frac{a^{i+j}}{i!j!}\int_0^x y^i(x-y)^j dy$$

$$= \frac{1}{a}\,e^{-ax}\sum_{m=1}^{k}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} F_{k-m,i}\,\Theta_m\,Q^j\frac{(ax)^{i+j+1}}{(i+j+1)!}$$

$$= e^{-ax}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}\left(\frac{1}{a}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{m=1}^{k} F_{k-m,j}\,\Theta_m\,Q^{i-j-1}\right), \quad k \geq 1.$$

Тогда

$$F_{0i} = Q^i,\ i \geq 0,$$

$$F_{k0} = 0, \quad k \geq 1,$$

$$F_{ki} = F_{k,i-1}Q + \frac{1}{a}\sum_{m=1}^{k} F_{k-m,i-1}\,\Theta_m, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1.$$

Матрицы $F_{kn}(x)$, $k > n$, ищем в виде

$$F_{kn}(x) = e^{-ax}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}F_{kni}.$$

Аналогично из формулы (8) получаем для коэффициентов $F_{kni}$, $k > n$, рекуррентные формулы

$$F_{kn0} = 0, \ k > n,$$

$$F_{kn1} = \frac{1}{a}\,\Theta^*_m, \ k > n,$$

$$F_{kni} = F_{k,n,i-1}Q_n + \frac{1}{a}\sum_{m=1}^{k-n} F_{k-n-m,i-1}\Theta^*_m, \ k > n, \ i \geq 2.$$

Матрицы $F_{kk}(x)$, $0 < k < n$, ищем в виде

$$F_{kk}(x) = e^{-ax}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}F_{kki}.$$

Из формул (4), (5) имеем

$$F_{kki} = Q_k^i, \ i \geq 0.$$

Матрицы $F_{km}(x), \ k > m, \ n > m > 0$, представим в виде

$$F_{km}(x) = e^{-ax}\sum_{i=k-m}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}F_{kmi}.$$

Из (7), (10) получаем

$$F_{k,m,k-m} = \frac{1}{a}F_{k,m+1,k-m-1}\Theta_1^{(m+1)},$$

$$F_{kmi} = F_{k,m,i-1}Q^{(m)} + \frac{1}{a}F_{k,m+1,i-1}\Theta_1^{(m+1)}, \ i \geq k-m+1.$$

Матрицы $F_{k0}$, $k \geq 1$, запишем в виде

$$F_{k0}(x) = e^{-ax}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}F_{k0i}.$$

Из (6) и (9) получаем

$$F_{k0k} = \frac{1}{a}F_{k1,k-1}\Theta_1^{(1)},$$

$$F_{k0i} = F_{k0,i-1} + \frac{1}{a} F_{k1,i-1} \Theta_1^{(1)}, \ i > k.$$

Теперь уже для матриц $A_k$ и $A_{km}$ нетрудно получить следующие разложения:

$$A_k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \alpha_i F_{ki},$$

$$A_{km} = \left( \sum_{i=k-m}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \alpha_i F_{kmi} \right) (I_q \otimes \Omega_m), \ k \geq m, \ n > m > 0,$$

$$A_{kn} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \alpha_i F_{kmi}, \ k \geq n,$$

где

$$\alpha_i = \int_0^{\infty} x^i e^{-ax} dA(x).$$

Функции $D_k(x)$, $k \geq 0$, можно найти в виде

$$D_k(x) = e^{-ax} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} D_{ki}, \ k \geq 0,$$

где матрицы $D_{ki}$ определяются рекуррентными формулами

$$D_{k1} = \frac{1}{a} F_{k0} (I \otimes N),$$

$$D_{ki} = D_{k,i-1} + \frac{1}{a} F_{k,i-1} (I \otimes N), \ \ i \geq 2.$$

Матричную функцию $R(x)$ можно найти в виде [19]

$$R(x) = e^{-ax} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} R_i,$$

где

$$R_0 = I, \quad R_i = R_{i-1} Q + \frac{1}{a} J_{i-1}, \ \ i \geq 1,$$

$$J_i = \sum_{k=1}^{\infty} G^k R_i \Theta_k, \ \ i \geq 0,$$

а функцию $D(x)$ в виде

$$D(x) = e^{-ax} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} D_i,$$

где

$$D_1 = \frac{1}{a} R_0 (I \otimes N),$$

$$D_i = D_{i-1} + \frac{1}{a} R_{i-1} (I \otimes N), \ \ i \geq 2.$$

Для вычисления $A_k^*$ положим

$$A_k^*(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} G^{m-n-1} F_{mk}(x) (I_q \otimes \Omega_k), \ \ k = \overline{0, n-1},$$

$$A_n^*(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} G^{m-n-1} F_{mn}(x).$$

Представляя $A_k^*(x)$ в виде

$$A_k^*(x) = e^{-ax} \sum_{i=n+1-k}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} A_{ki}^* (I_q \otimes \Omega_k), \ \ k = \overline{0, n-1},$$

$$A_n^*(x) = e^{-ax} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} A_{ni}^*,$$

с учетом (3) получаем

$$A_{n,1}^* = \frac{1}{a} R_0 J_0^*,$$

$$A_{n,i}^* = A_{n,i-1}^* Q + \frac{1}{a} J_{i-1}^*, \ \ i \geq 2,$$

где

$$J_i^* = \sum_{k=1}^{\infty} G^{k-1} R_i \Theta_k^*, \ \ i \geq 0.$$

$$A_{k,n+1-k}^* = \frac{1}{a} A_{k+1,n-k}^* \Theta_1^{(k+1)}, \ \ k = \overline{1, n-1},$$

$$A_{ki}^* = A_{k,i-1}^* Q_k + \frac{1}{a} A_{k+1,i-1}^* \Theta_1^{(k+1)}, \ \ k = \overline{1, n-1}, \ \ i > n+1-k,$$

$$A_{0,n+1}^* = \frac{1}{a} A_{1,n}^* \Theta_1^{(1)},$$

$$A_{0i}^* = A_{0,i-1}^* + \frac{1}{a} A_{1,i-1}^* \Theta_1^{(1)}, \ \ i > n+1,$$

где матрицы $R_i$ определены выше. Тогда из (11) получаем

$$A_k^* = \Bigg( \sum_{i=n+1-k}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \alpha_i A_{ki}^* \Bigg) (I_q \otimes \Omega_k), \;\; k = \overline{0, n-1},$$

$$A_n^* = \sum_{i=n+1-k}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \alpha_i A_{ki}^*.$$

Рассмотрим теперь систему *G*/*PH*/*n*/*r* и покажем, каким образом можно выбрать параметры общей СМО *G*/*MSP*/*n*/*r*, чтобы получить систему *G*/*PH*/*n*/*r*.

Обслуживание каждым прибором имеет фазовый тип с параметрами:

$M$ — квадратной матрицей порядка $s$ с элементами $\mu_{ij}$;

$\boldsymbol{b}$ — вектором размерности $s$ с координатами $b_i$.

Положим также

$$\mu_i = -\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij}.$$

Состояние марковского процесса обслуживания при $k$ заявках характеризуется мультииндексом $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_s)$, где $i_j$ — число заявок на приборах, обслуживаемых на фазе $j$. Очевидно, что $|\boldsymbol{i}| = i_1 + \ldots + i_s = k$.

Для любого вектора $\boldsymbol{i}$ с координатой $i_j \geq 1$ положим:

$\boldsymbol{i}_j$ — вектор, все координаты которого, кроме $j$-й, совпадают с координатами вектора $\boldsymbol{i}$, а $j$-я координата равна $i_j - 1$;

$\boldsymbol{i}_j^m$ — вектор, все координаты которого, кроме $j$-й и $m$-й, совпадают с координатами вектора $\boldsymbol{i}$, а $j$-я и $m$-я координаты равны $i_j - 1$ и $i_m + 1$ соответственно.

Кроме того, для любого вектора $\boldsymbol{i}$ обозначим через $\boldsymbol{i}^m$ — вектор, все координаты которого, кроме $m$-й, совпадают с координатами вектора $\boldsymbol{i}$, а $m$-я координата равна $i_m + 1$.

Теперь матрицы $\Lambda_k$, $\Lambda$, $N_k$, $N$ и $\Omega_k$ общей СМО *G*/*MSP*/*n*/*r* определим следующим образом:

$$\lambda_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}_j^m}^{(k)} = i_j \mu_{jm}, \;\; i_j \geq 1, \;\; j \neq m, \;\; k = \overline{1, n-1};$$

$$\lambda_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}}^{(k)} = \sum_{j=1}^{s} i_j \mu_{jj}, \;\; k = \overline{1, n-1};$$

$$n_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}_j}^{(k)} = i_j \mu_j, \;\; i_j \geq 1, \;\; k = \overline{1, n-1};$$

$$\omega_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^m}^{(k)} = b_m, \;\; k = \overline{1, n-1};$$

$$\lambda_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}_j^m} = i_j \mu_{jm}, \;\; i_j \geq 1, \;\; j \neq m;$$

$$\lambda_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}} = \sum_{j=1}^{s} i_j \mu_{jj};$$

$$n_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}_j^m} = i_j \mu_j b_m, \;\; i_j \geq 1.$$

Остальные элементы матриц $\Lambda_k$, $\Lambda$, $N_k$, $N$ и $\Omega_k$ равны нулю.

Для численных расчетов необходимо произвести линейную нумерацию состояний. Это можно сделать следующим образом.

Состоянием с номером 1 при $k$ обслуживаемых на приборах заявках является состояние, при котором все заявки на приборе обслуживаются на первой фазе.

Следующие $C_{s-1}^{s-2}$ состояний представляют собой все состояния, при которых $k-1$ заявок обслуживаются на первой фазе, а еще одна заявка — на какой-то из остальных $s-1$ фаз.

Еще $C_s^{s-2}$ состояний представляют собой все состояния, при которых $k-2$ заявок обслуживаются на первой фазе, а еще две заявки — на каких-то из остальных $s-1$ фаз и т.д.

Нумерация заявок на остальных $s-1$ фазах производится по аналогичному принципу.

Таким образом, при числе заявок на приборах $k$ состоянию, характеризуемому мультииндексом $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_s)$, соответствует состояние с линейным номером

$$u = \sum_{m=1}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-i_1-\ldots-i_m-1} C_{s+j-m-1}^{s-m-1} + 1.$$

В заключение этого раздела отметим, что для системы *G*/*PH*/*n*/*r* нетрудно найти стационарное распределение $V(x)$ времени пребывания заявки в системе, которое в терминах ПЛС $\varphi(s)$ имеет вид

$$\varphi(s) = \omega(s)\alpha(s),$$

где $\alpha(s) = \boldsymbol{b}(sI - M)^{-1}\boldsymbol{\mu}$ — ПЛС времени обслуживания заявки, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)^T$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бочаров П.П., Вишневский В. М. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей. // *Автоматика и телемеханика*. 2003. № 5. С. 46–74.
2. Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган А. Я. *Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета*. М.: Наука, 1989.
3. Gelenbe E., Glynn P., Sigman K. Queues with negative arrivals. // *J. Appl. Prob*. 1991. V.28, P.245-250.
4. Harrison P. G., Pitel E. Sojourn times in single server queues with negative customers // *Queueing systems*. 2002. V41. P. 943–963.
5. Harrison P. G., Pitel E. The *M/G/1* queue with negative customers // *Adv. Appl. Prob*. 1996. V. 28. P. 540–566.
6. Chakka R., Harrison P. G. A Markov modulated multi-server queue with negative customers — The MM CPP/GE/c/L G-queue // *Acta Informatika*. 2001. V. 37. P. 881–919.
7. Harrison P. G. The *MM CPP/GE/c* G-queue: sojourn time distribution // *Queueing Systems*. 2002. V. 41. P. 271–298.
8. Bayer N., Boxma O. J. Wiener-Hopf analysys of an M/G/1 queue with negative customers and of related class of random walk // *Queueing Systems*. 1996. V. 23. P. 301–316.
9. *Atencia I., Aguillera G., Bocharov P. P.* On the M/G/1/0 queueing system under LCFS PR discipline with repeated and negative customers with batch arrivals // Proc. Oper. Res. 42 Annual Conf. University of Swamsea. 2000. P. 30–34.
10. *Atencia I., Bocharov P. P.* On the queueing system under LCFS PR discipline with repeated and negative customers with batch arrivals // Proc. 3-rd Europ. Cong. Math. Barcelona, 2000.

11. *Atencia I., D'Apiche C., Manzo R., Salerno S.* Retrial queueing system with several input flows and negative customers and LCFS PR discipline // Proc. Fourth Int. Workshop on Queueing Networks with Finite Capacity. Ilkley, U. K. 2000.

12. *Albores J.F., Bocharov P.P., Luybin D.Yu.* Two-stage exponential queueing system with internal losses, feedback and negative arrivals // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. "Прикладная математика и информатика". 2003. № 1. С.70-84.

13. *Albores J.F., Bocharov P.P., Luybin D.Yu.* On two-stage exponential system with losses, feedback and negative customers // Proc. of Internat. Conference "Distributed Computer and Communication Networks. Stochastic Modelling and Optimization", Moscow, June 29 - July 4, 2003, Moscow: ЗАО "РИЦ "Техносфера", 2003. С. 100-105.

14. Бочаров П.П. Стационарное распределение конечной очереди с рекуррентным потоком и марковским обслуживанием // *Автоматика и телемеханика*. 1996. № 9. С. 66–78.

15. Бочаров П.П., Д'Апиче Ч., Печинкин А.В., Салерно С. Стационарные характеристики системы массового обслуживания *G*/MSP/1/r // *Автоматика и телемеханика*. — 2003. — № 2. — С. 127–143.

16. Печинкин А.В., Чаплыгин В. В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания *G/MSP/n/r* // *Вестник РУДН, сер. Прикладная математика и информатика*, 2002. — № 1. — С. 119–143.

17. Neuts M.F. *Matrix-geometric solutions in stochastic models. An algorithmic approach*. — Baltimore and London: The Johns Hopkins Univ. Press, 1981.

18. Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания*. — М.: Изд-во РУДН, 1995. — 529 С.

19. Чаплыгин В. В. Система массового обслуживания *G/BMSP/1/r* / *Информационные процессы*. — 2003. — № 3. — С. 97–108.