Информационные процессы, Том 5, № 2, 2005, стр. 120–131

О сходимости дискретных аппроксимаций в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями[1]

В.В. Дикусар*, **Д.А. Чекарев****

**Вычислительный центр Российской академии наук, Москва, Россия*
E-mail: dikussar@ccas.ru
***Московский физико-технический институт (ГУ), Долгопрудный, М.о., Россия*
E-mail: chekarev@hotmail.com
Поступила в редколлегию 17.03.2005

Аннотация—Рассматривается вопрос слабой сходимости (сходимости по функционалу) решения дискретной задачи оптимального управления к решению непрерывной. Приведена и доказана теорема о сходимости. На примере модельной задачи управления внешним долгом продемонстрирована сходимость функционала. Кратко описан двухэтапный метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями. На первом этапе решается дискретно-аппроксимационная задача, на основе решения которой формулируется гипотеза о геометрии оптимальной траектории, т.е. выделяются промежутки постоянства множества номеров активных ограничений. На втором этапе сформулированная гипотеза проверяется аналитически с использованием принципа максимума Понтрягина и формализма Дубовицкого–Милютина. Применение метода показано на том же модельном примере. Предложенный метод работает при наличии надежного решателя дискретно-аппроксимационной задачи. Библ. 7. Фиг. 7.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается вопрос сходимости дискретных аппроксимаций задачи оптимального управления (ОУ) со смешанными ограничениями типа неравенств. При некоторых условиях на допустимые траектории задачи можно рассмотреть вопрос о существовании решения дискретной задачи и его слабой сходимости к решению непрерывной. При доказательстве теоремы широко используются результаты работ $[1, 2]$. Основное отличие от предыдущих результатов заключается в рассмотрении смешанных ограничений.

2. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

На отрезке $[0, T]$ рассматривается задача оптимального управления (ОУ)

$$J(u(t)) = \alpha^* x(T) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$x(0) = \beta, \qquad Qx(T) \ge c, \tag{3}$$

$$C_1(t)x(t) + D_1(t)u(t) \le b_1(t) \tag{4}$$

со смешанными ограничениями типа неравенства (4). Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C_1(t)$, $D_1(t)$ и вектор $b_1(t)$ имеют кусочно-непрерывные компоненты. Соответствующие матрицы и векторы имеют следующие размеры: $A[n \times n]$, $B[n \times m]$, $C_1[r_1 \times n]$, $D_1[r_1 \times m]$, $Q[q \times n]$, $x[n]$, $u[m]$, $f[n]$, $b_1[r_1]$, $\alpha^*[n]$, $c[q]$. Векторы с символом “*” являются строками, без символа — столбцами.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03-01-00678)

Наряду с ней рассматривается дискретный аналог непрерывной задачи ОУ, получаемый из исходной заменой производной в (2) правым разностным отношением

$$J(u) = \alpha^* x^N \to \min, \qquad u = u^0, \ldots, u^N, \tag{5}$$

$$x^{i+1} = x^i + h\left(A(ih)x^i + B(ih)u^i + f(ih)\right), \qquad i = \overline{0, N-1}, \tag{6}$$

$$x^0 = \beta, \qquad Qx^N \geq c, \tag{7}$$

$$u \in U_N = \{u^i \in \mathbb{R}^m \mid C_1(ih)x^i + D_1(ih)u^i \leq b_1(ih), \;\; i = \overline{0, N}\}. \tag{8}$$

Здесь верхний индекс означает номер узла дискретизации. Правое разностное отношение взято как наиболее простое. Без ограничения общности можно распространить получаемые ниже результаты и на другие разностные отношения (левое, центральное).

Данную задачу будем в дальнейшем называть дискретной задачей ОУ.

Рассмотрим всю совокупность переменных $u^0, x^0, u^1, x^1, \ldots, u^N, x^N$ как набор координат точки w конечномерного пространства $\mathbb{R}^{(m+n)\times(N+1)}$. Тогда (5) переходит в

$$g(w) = (c, w) \to \min, \qquad c = \|0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \alpha^*\|, \tag{9}$$

причем на координаты точки w накладываются условия (6)–(8). Пусть W — множество точек w, удовлетворяющих (6)–(8). Таким образом, дискретную задачу ОУ можно рассматривать как задачу линейного программирования (ЛП) в пространстве $\mathbb{R}^{(m+n)\times(N+1)}$.

Будем говорить, что управление $u(t)$ и порождаемая им посредством (2) фазовая переменная $x(t)$ на отрезке $[0, T]$ принадлежат допустимому множеству G, если на концах отрезка выполнены условия (3), а при каждом $t \in [0, T]$ выполнены (4). Принадлежность $u(t)$, $x(t)$ множеству G можно записать в виде $(u(t), x(t)) \in G = \{(u(t), x(t)) \in G(t) \; \forall t \in [0, T]\}$, где $G(t)$ — заданные множества из $\mathbb{R}^{m+n}$ при каждом $t \in [0, T]$. Если $u(t), x(t)$ принадлежат G, то управление $u(t)$ будем называть допустимым. Также вводится ε-сужение $G^{-\varepsilon}$ допустимого множества G, определяемое так:

$$(u(t), x(t)) \in G^{-\varepsilon} = \{(u(t), x(t)) \in G^{-\varepsilon}(t)\},$$

где

$$G^{-\varepsilon}(t) = \{(u(t), x(t)) \in G(t) \mid \inf_{\xi \in \Gamma p G(t)} \|(u(t), x(t)) - \xi\| \geq \varepsilon \; \forall t \in [0, T]\}, \qquad \varepsilon \geq 0, \tag{10}$$

$\xi \in \mathbb{R}^{m+n}$ — граничная точка множества $G(t)$ при фиксированном $t \in [0, T]$.

Связь между решениями дискретной и непрерывной задач дается теоремой.

Теорема 1. *Пусть все матрицы и столбцы в условии задачи* (1)–(4) *кусочно-непрерывны на отрезке* $[0, T]$, *а функция* $f(t)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* L_f *на* $[0, T]$: $\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq L_f|t_1 - t_2|$. *Пусть* $u(t) \in U \; \forall t \in [0, T]$, *где* U *— ограниченное множество. Пусть существует такое допустимое управление* $\bar{u}(t)$ *задачи* (1)–(4), *что набор управляющих и фазовых переменных* $\bar{u}(t)$, $\bar{x}(t)$ *принадлежит* ε*-сужению* $G^{-\varepsilon}(t)$ *допустимого множества* $G(t)$ *с непустой внутренностью при некотором малом* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует решение дискретной задачи ЛП* (5)– (8) *при всех достаточно больших* N *и* $\lim\limits_{N\to\infty} g(w_*) = J_*$.

Доказательство теоремы приводится в приложении 1.

3. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для иллюстрации теоремы рассмотрим линейную задачу ОУ внешним долгом на модели, являющейся продолжением развития моделей, описанных в [3, 4].

Модель рассматривается на отрезке времени $0 \le t \le T = 100$. Минимизируемый функционал $J(x, u) = x_3(100)$.

Система дифференциальных уравнений и ограничения задачи

$$
\begin{array}{ll}
\dot{x}_1 = u_1 + u_2, & u_{i_{min}} \le u_i \le u_{i_{max}}, \;\; i = \overline{1,7}, \\
\dot{x}_2 = u_3 + u_4, & u_6 \le \alpha_1(x_1 - x_4), \\
\dot{x}_3 = \mu_3 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - k_1 u_6, & u_7 \le \alpha_2(x_2 - x_5), \\
\dot{x}_4 = \beta_1 u_6, & u_2 + u_4 \le u_7, \\
\dot{x}_5 = \beta_2 u_7, & u_2 + u_4 + c \le u_7 + u_5.
\end{array}
$$

Значения коэффициентов задачи, начальных и конечных условий

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1 = 0.03, & x_1(0) = 25, & u_{i_{min}} = 0, \;\; i = \overline{1,7}, \\
\alpha_2 = 0.03, & x_2(0) = 15, & u_{1_{max}} = u_{3_{max}} = 0.1, \\
\beta_1 = 0.18, & x_3(0) = 400, & u_{2_{max}} = 0.5, \\
\beta_2 = 0.18, & x_4(0) = 0, & u_{4_{max}} = u_{5_{max}} = 0.3, \\
k_1 = 0.9, & x_5(0) = 0, & u_{6_{max}} = u_{7_{max}} = 2.0, \\
\mu_3 = 0.002, & x_1(T) - x_4(T) = 25, & c = 0.2, \\
T = 100, & x_2(T) - x_5(T) = 15. &
\end{array}
$$

Данная задача имеет форму (1)–(4) при $n = 5$, $m = 7$. Если отрезок интегрирования при дискретизации разбивается на N равных отрезков и дифференциальные уравнения (2) заменяются конечно-разностными отношениями, то получается дискретная задача ОУ вида (5)–(8), которая эквивалентна задаче ЛП размерности $12 \times (N + 1)$.

При решении этой задачи проводилась дискретизация как с использованием явной схемы Эйлера первого порядка точности, так и с использованием схемы Эйлера второго порядка точности [5]. Получающиеся задачи ЛП решались с помощью системы “БАЛАНС-2” [6]. Решение $w = u^0, x^0, u^1, x^1, \ldots, u^N, x^N$ задачи ЛП позволяет сформировать гипотезу о геометрии оптимальной траектории. Под геометрией понимается тип контакта траектории с ограничениями типа неравенств. Уже при $N = 100$ решение задачи ЛП позволяет сформулировать надежную гипотезу об оптимальной траектории задачи. Однако для подтверждения первоначальных предположений (для устранения возможных неоднозначностей) решалась задача при $N = 700$ (максимально возможное N, при котором задачу ЛП удавалось решить системой “БАЛАНС-2”).

Аналитическое решение задачи ОУ строится уже на основе гипотезы об оптимальной траектории. На рис. 1, 2 представлены предполагаемые поведения управлений задачи, на рис. 3, 4 представлены предполагаемые фазовые траектории системы, полученные после решения дискретной задачи.

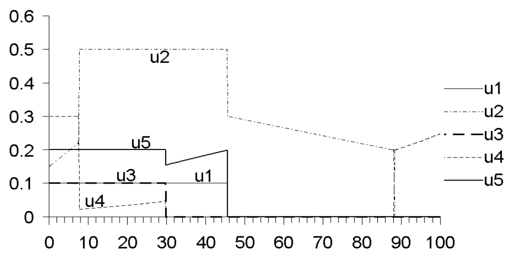

Рис. 1.

На основании полученного решения выдвинем гипотезу: существуют моменты времени t_1, t_2, t_3, t_4 такие, что на промежутках $[0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $(t_2, t_3]$, $(t_3, t_4]$, $(t_4, T]$ индексы активных ограничений не

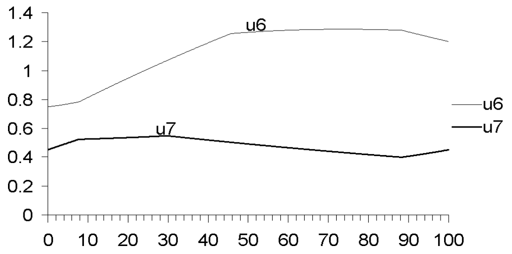

Рис. 2.

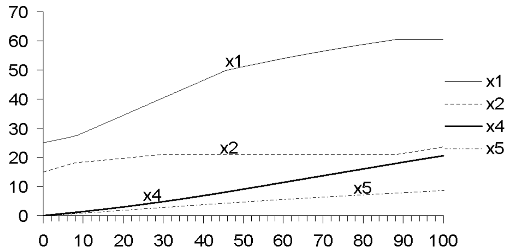

Рис. 3.

меняются. Кроме того, выделим те из ограничений, которые являются активными на всем промежутке интегрирования $[0, T]$ (по выдвинутой гипотезе). Таких ограничений три: $u_6 - \alpha_1(x_1 - x_4) \le 0$, $u_7 - \alpha_2(x_2 - x_5) \le 0$, $c + u_2 + u_4 - u_7 - u_5 \le 0$. Это значит, что для соответствующих им множителей Лагранжа справедливо $\lambda_1(t) \ne 0$, $\lambda_2(t) \ne 0$, $\lambda_4(t) \ne 0$ $\forall t \in [0, T]$. Также предположим, что ограничение $u_2 + u_4 - u_7 \le 0$ активно при $t \in [0, t_2]$ и неактивно при остальных t.

Одновременно на каждом промежутке будем выписывать сопряженную систему. Для этого введем функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H = {} & \psi_1(u_1 + u_2) + \psi_2(u_3 + u_4) + \psi_3(\mu_3 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - k_1 u_6) + \\ & + \psi_4(\beta_1 u_6) + \psi_5(\beta_2 u_7) - \lambda_1(t)[u_6 - \alpha_1(x_1 - x_4)] - \\ & - \lambda_2(t)[u_7 - \alpha_2(x_2 - x_5)] - \lambda_3(t)(u_2 + u_4 - u_7) - \lambda_4(t)(c + u_2 + u_4 - u_7 - u_5) - \\ & - \sum_{i=1}^{7} \lambda_{i0}(t)(u_{i0} - u_i) - \sum_{i=1}^{7} \lambda_{i1}(t)(u_i - u_{i1}). \end{aligned}$$

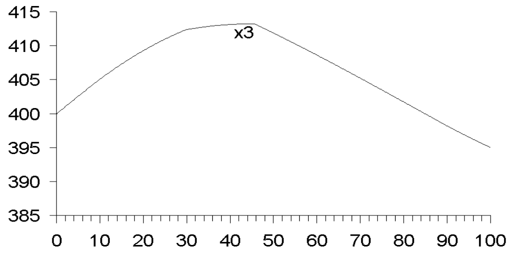

Рис. 4.

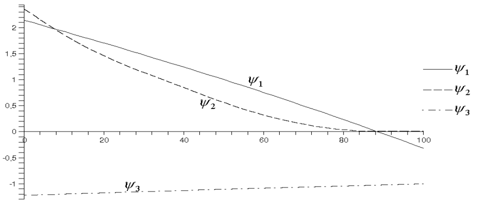

Рис. 5.

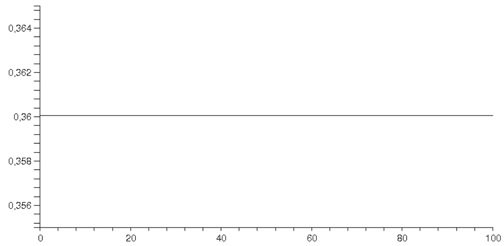

Рис. 6.

Сопряженная система принимает вид

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -(-\lambda_1(t)(-\alpha_1)) = -\alpha_1\lambda_1(t) = -\dot{\psi}_4,$$
$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -(-\lambda_2(t)(-\alpha_2)) = -\alpha_2\lambda_2(t) = -\dot{\psi}_5,$$
$$\dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -(\psi_3\mu_3) = -\mu_3\psi_3$$

с краевыми условиями

$$\begin{array}{lll}
\psi_1(0) = C^{10}, & \psi_1(T) = C^{11}, & \\
\psi_2(0) = C^{20}, & \psi_2(T) = C^{21}, & \\
\psi_3(0) = C^{30}, & \psi_3(T) - \psi_0 \times 1 = 0, & \psi_3(T) = \psi_0 = -1, \\
\psi_4(0) = C^{40}, & \psi_4(T) = -C^{11}, & \\
\psi_5(0) = C^{50}, & \psi_5(T) = -C^{21} &
\end{array}$$

и условиями Блисса $(\partial H)/(\partial u_i) = 0, i = \overline{1,7}$, причем константы $C^{10}, \ldots, C^{50}, C^{11}, C^{21}$ определяются при совместном решении прямой и двойственной систем.

Получив трансцендентные уравнения относительно $t_1, \ldots, t_4$ и решив их в пакете Maple 9, получаем времена переключений: $t_1 = 7.689788139$, $t_2 = 29.73687498$, $t_3 = 45.46140320$, $t_4 = 88.31270799$. После нахождения времен переключения получается полное аналитическое решение задачи. Из-за его громоздкости оно здесь не приводится. В качестве иллюстрации приведем графики сопряженных переменных $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ и функции Понтрягина $H(t)$ (рис. 5 и 6 соответственно).

Сопряженные переменные $\psi_4(t)$ и $\psi_5(t)$ совпадают с $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ с точностью до знака ($\psi_4(t) = -\psi_1(t)$, $\psi_5(t) = -\psi_2(t)$) и поэтому отдельно не приведены. Сравнение аналитического и численного решений показало, что погрешность не превышает 0.3%.

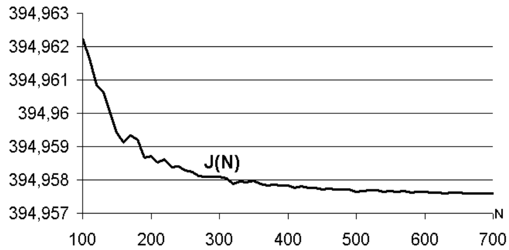

Рис. 7.

4. ФУНКЦИОНАЛ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ

Как указано выше, размерность задачи ЛП (и ее вычислительная сложность) прямо пропорциональна числу точек разбиения отрезка интегрирования. С другой стороны, согласно доказанной теореме, чем больше точек разбиения, тем точнее приближается функционал непрерывной задачи функционалом дискретной. На рис. 7 показана зависимость значений функционала дискретной задачи от числа точек разбиения N. Задачи ЛП решались 61 раз при различных N от 100 до 700 (с шагом 10), что позволило получить достаточно подробную картину зависимости функционала от N.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При исследовании задач оптимального управления со смешанными ограничениями основные трудности возникают при определении геометрии оптимальных траекторий. Использование двухэтапной схемы, на первом этапе которой решается задача ЛП большой размерности, а на втором проверяется сформулированная гипотеза на выполнение условий экстремума, позволяет упростить процесс поиска решений. Кроме того, с развитием вычислительной техники становится возможным решать задачи ЛП все большей размерности за приемлемое время, так что уже сами дискретные решения могут служить приближениями к точному решению. В данной работе была показана слабая сходимость (сходимость по функционалу) управлений дискретной задачи к управлениям непрерывной задачи. Однако уже сейчас во многих случаях можно говорить даже о сильной сходимости управлений (сходимость по норме), которая, однако, теоретически не доказана. Так, например, в рассмотренном примере дискретные управления близки к непрерывным управлениям, полученным аналитически. Следует также заметить, что реализация данной методики оказывается возможной при наличии надежного решателя аппроксимационных задач (в данном случае пакета “БАЛАНС-2”) и современного математического обеспечения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Перед доказательством теоремы 1 приведем две леммы. Первая лемма доказывает равносильность задачи (5)–(8) и задачи ЛП.

Лемма 1. *Дискретная задача ОУ и задача ЛП равносильны, то есть*

1) множества U_N *и* W *оба пусты или оба непусты одновременно;*

2) если $U_N \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$, *то* $J_* = g_*$, *где* $J_* = \inf\limits_{u \in U_N} J(u)$, $g_* = \inf\limits_{w \in W} g(w)$;

3) множества решений $U_{N*} = \{u \in U_N \mid J(u) = J_*\}$, $W_* = \{w \in W \mid g(w) = g_*\}$ *этих задач оба пусты или оба непусты одновременно, причем если* $u_* = u_*^0, u_*^1, \ldots, u_*^N \in U_{N*}$, *то* $w_* = u_*^0, x_*^0, u_*^1 x_*^1, \ldots, u_*^N x_*^N \in W_*$, *где* $x_*^0 = \beta$, *а* x_*^{i+1}, $i = \overline{0, N-1}$, *выражается через* x_*^i *и* u_*^i *при помощи* (6), *и обратно, если* $w_* = u_*^0, x_*^0, u_*^1 x_*^1, \ldots, u_*^N x_*^N \in W_*$, *то* $u_* = u_*^0, u_*^1, \ldots, u_*^N \in U_{N*}$.

Доказательство. Заметим, что между переменными u^i, $i = \overline{0, N-1}$, задачи (5)–(8) и переменными w задачи (9) существует взаимно-однозначное соответствие, задаваемое условиями (6)–(7).

Так, все переменные x^i, $i = \overline{0, N}$, задачи (5)–(8) выражаются через α и u^i, $i = \overline{0, N-1}$, посредством (6)–(7). Кроме того, из допустимого решения задачи (9) однозначно получается допустимое управление задачи (5)–(8) выделением из вектора w координат-управлений $u^0, \ldots, u^N$. Допустимость управления $u^0, \ldots, u^N$ обеспечивается выполнением всех условий (6)–(8). Учитывая связи между переменными дискретной задачи (5)–(8) и координатами вектора задачи (9), а также определения множеств U_N и W в задачах (5)–(8) и (9), заключаем, что если точка $u = u^0, \ldots, u^N \in U_N$, то точка $w = w(u) = u^0, x^0, \ldots, u^N, x^N \in W$, где $x^0, \ldots, x^N$ получаются из (6)–(7). И обратно, если $w = u^0, x^0, \ldots, u^N, x^N \in W$, то $u = u(w) = u^0, \ldots, u^N \in U_N$. Отсюда ясно, что либо оба множества U_N и W пусты, либо оба непусты одновременно. Далее, из определений функций $J(u)$, $g(w)$, $w(u)$, $u(w)$ следуют тождества

$$J(u) \equiv g(w(u)), \qquad g(w) = J(u(w)) \qquad \forall u \in U_N, \quad \forall w \in W. \tag{A1.1}$$

Пусть $U_N \neq \emptyset$. Тогда либо $J_* = -\infty$, либо $J_* > -\infty$. Сначала рассмотрим случай $J_* = -\infty$. Тогда существует такая последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in U_N$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\{J(u_k)\} \to J_* = -\infty$. Положим $w_k = w(u_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Из (A1.1) тогда имеем: $g(w_k) = g(w(u_k)) = J(u_k) \to -\infty$, откуда с учетом включения $w_k \in W$, $k = 1, 2, \ldots$, получим, что $g_* = -\infty$. Рассуждая аналогично, заключаем, что если $g_* = -\infty$, то $J_* = -\infty$.

Пусть теперь $J_* > -\infty$. Тогда из предыдущего рассуждения следует, что $g_* > -\infty$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению нижней грани найдется такая точка $u_\varepsilon \in U_N$, что $J_* \leq J(u_\varepsilon) < J_* + \varepsilon$. Тогда $w_\varepsilon = w(u_\varepsilon) \in W$, и из (A1.1) следует, что $g_* \leq g(w_\varepsilon) = J(u_\varepsilon) < J_* + \varepsilon$, т.е. $g_* < J_* + \varepsilon$. Аналогично, по определению g_* существует точка $v_\varepsilon \in W$, для которой $g_* \leq g(v_\varepsilon) < g_* + \varepsilon$. Тогда $y_\varepsilon = u(v_\varepsilon) \in U_N$ и $J_* \leq J(y_\varepsilon) = J(u(v_\varepsilon)) = g(v_\varepsilon) < g_* + \varepsilon$, т.е. $J_* < g_* + \varepsilon$. Следовательно, $J_* - \varepsilon < g_* < J_* + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что $J_* = g_* > -\infty$.

Наконец, если $u_* \in U_N$, то $w_* = w(u_*) \in W$, и в силу доказанного выше $g(w_*) = g(w(u_*)) = J(u_*) = J_* = g_*$. Это значит, что $w(u_*) \in W_*$ при любом $u_* \in U_{N_*}$. Аналогично доказывается, что если $w_* \in W_*$, то $u_* = u(w_*) \in U_{N_*}$. Отсюда следует, что либо оба множества U_{N_*} и W_* пусты, либо оба непусты одновременно и справедливы равенства $U_{N_*} = \{u = u(w),\ w \in W_*\}$, $W_* = \{w = w(u),\ u \in U_{N_*}\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $a \geq 1$, $b \geq 0$, $c(i) \geq 0$, $\Delta_h(i) \geq 0$, $i = \overline{0, N-1}$. *Если* $\Delta_h(i) \leq \Delta_h(i-1) \times a + b + c(i)$ *для* $1 \leq i \leq N-1$, *а* $\Delta_h(0) \leq b + c(0)$, *то* $\Delta_h(i) \leq b \sum\limits_{k=0}^{i} a^k + \sum\limits_{k=0}^{i} c(k) \times a^{i-k}$. *Если* $\Delta_h = \max\limits_{0 \leq i \leq N-1} \Delta_h(i)$, *то* $\Delta_h \leq b \sum\limits_{k=0}^{N-1} a^k + \sum\limits_{k=0}^{N-1} c(k) \times a^{N-1-k}$.

Доказательство. Рассмотрим неравенства, справедливые для первых трех членов последовательности $\Delta_h(i)$:

$$\begin{aligned}
&\Delta_h(0) \leq b + c(0),\\
&\Delta_h(1) \leq \Delta_h(0) \times a + b + c(1) \leq (b + c(0)) \times a + b + c(1),\\
&\Delta_h(2) \leq ((b + c(0)) \times a + b + c(1)) \times a + b + c(2).
\end{aligned}$$

По аналогии получаем:

$$\Delta_h(i) \leq (\ldots((b + c(0)) \times a + b + c(1)) \ldots) \times a + b + c(i),$$

или

$$\Delta_h(i) \leq b \sum_{k=0}^{i} a^k + \sum_{k=0}^{i} c(k) \times a^{i-k}.$$

Так как

$$b\sum_{k=0}^{i+1} a^k + \sum_{k=0}^{i+1} c(k)\times a^{i+1-k} = b\sum_{k=0}^{i} a^k + a\sum_{k=0}^{i} c(k)\times a^{i-k} + b\times a^{i+1} + c(i+1) \geq$$
$$\geq b\sum_{k=0}^{i} a^k + \sum_{k=0}^{i} c(k)\times a^{i-k},$$

то для $\Delta_h = \max\limits_{0\leq i\leq N-1} \Delta_h(i)$ справедливо $\Delta_h \leq b\sum\limits_{k=0}^{N-1} a^k + \sum\limits_{k=0}^{N-1} c(k)\times a^{N-1-k}$. Лемма доказана.

Теперь можно доказать теорему 1.

Доказательство проводится аналогично доказательству [1, теорема 1 § 3 глава 3] и [2, теорема 1 § 3 глава 1]. Основная идея доказательства состоит в том, что при достаточно больших N траектория (u^i, x^i), $i=\overline{0,N}$, дискретной задачи оптимального управления при управлении

$$u^i = \bar{u}(ih), \qquad i=\overline{0,N}, \tag{$A1.2$}$$

будет мало отличаться от траектории $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$ непрерывной задачи. При этом малое отличие не выведет дискретную траекторию из допустимого множества за счет существования непрерывной траектории из ε-сужения $G^{-\varepsilon}(t)$ допустимого множества $G(t)$.

В условии (10) норма $\|(u(t),x(t))-\xi\|$ означает

$$\|(u(t),x(t))-\xi\| = \max_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \{|u_i(t)-\xi_i|, |x_j(t)-\xi_{r+j}|\}.$$

По u^i из ($A1.2$) получаем x^i, $i=\overline{0,N}$, в соответствии с (6). Построим на основе дискретной траектории x^i, $i=\overline{0,N}$, непрерывную траекторию $z(t)$:

$$z(t) = x^i + \frac{t-ih}{h}(x^{i+1}-x^i), \qquad t\in[ih,(i+1)h], \qquad i=\overline{0,N-1}.$$

Рассмотрим величину $\Delta_h(i) = \max\limits_{ih\leq t\leq (i+1)h} \|x(t)-z(t)\|$, $i=\overline{0,N-1}$, и пусть $\Delta_h = \max\limits_{i=\overline{0,N-1}} \Delta_h(i)$. Проведем оценку сверху величины Δ_h в соответствии с методикой, предложенной в [2]. Можно представить $z(t)$ и $x(t)$ в виде

$$z(t) = x^i + \int\limits_{ih}^{t} [A(ih)x^i + B(ih)u^i + f(ih)]d\tau, \qquad x(t) = x(ih) + \int\limits_{ih}^{t} [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)]d\tau$$

при $t\in[ih,(i+1)h]$, $i=\overline{0,N-1}$. Тогда

$$x(t)-z(t) = x(ih)-x^i+\int\limits_{ih}^{t}[A(\tau)x(\tau)-A(ih)x^i]d\tau+\int\limits_{ih}^{t}[B(\tau)u(\tau)-B(ih)u(ih)]d\tau+\int\limits_{ih}^{t}[f(\tau)-f(ih)]d\tau.$$

Пусть $A=\max\limits_{0\leq t\leq T}\|A(t)\|$, $B=\max\limits_{0\leq t\leq T}\|B(t)\|$, $f=\max\limits_{0\leq t\leq T}\|f(t)\|$. Тогда разность $x(t)-z(t)$ можно оценить по норме как

$$\|x(t)-z(t)\| \leq \|x(ih)-x^i\| + A\int\limits_{ih}^{t}\|x(\tau)-x^i\|d\tau + B\int\limits_{ih}^{t}\|u(\tau)-u(ih)\|d\tau + L_f\int\limits_{ih}^{t}(\tau-ih)d\tau.$$

Подставим в предыдущее выражение следующую оценку: $\|x(\tau)-x^i\| = \|x(\tau)-x(ih)+x(ih)-x^i\| \leq \|x(\tau)-x(ih)\| + \|x(ih)-x^i\|$; получим

$$\|x(t)-z(t)\| \leq \|x(ih)-x^i\|(1+A(t-ih))+A\int\limits_{ih}^{t}\|x(\tau)-x(ih)\|d\tau+B\int\limits_{ih}^{t}\|u(\tau)-u(ih)\|d\tau+L_f\frac{(t-ih)^2}{2}. \tag{A1.3}$$

Так как множество U ограничено, то $\exists R>0 : \forall u \in U \to \|u\| \leq R$. Кроме того, в силу существования начальных условий (3) можно оценить интеграл $\int\limits_{ih}^{t}\|x(\tau)-x(ih)\|d\tau$. Приведем получение этой оценки:

$$x(t) = x(0) + \int\limits_{0}^{t}[A(\tau)x(\tau)+B(\tau)u(\tau)+f(\tau)]d\tau, \qquad \|x(t)\| \leq \|x(0)\| + A\int\limits_{0}^{t}\|x(\tau)\|d\tau + BRt + ft.$$

Получаем $\|x(t)\| \leq \|x(0)\|e^{At} + \dfrac{BR+f}{A}(e^{At}-1)$. Введем $C = \|x(0)\|e^{AT} + \dfrac{BR+f}{A}(e^{AT}-1)$. Тогда $\forall t \in [0,T] \to \|x(t)\| \leq C$, и выражение $\|x(\tau)-x(ih)\|$ можно оценить следующим способом: $\|x(\tau)-x(ih)\| \leq \int\limits_{ih}^{\tau}\|A(s)x(s)+B(s)u(s)+f(s)\|ds \leq (AC+BR+f)(\tau-ih)$. Тогда интеграл $\int\limits_{ih}^{t}\|x(\tau)-x(ih)\|d\tau \leq (AC+BR+f)\dfrac{(t-ih)^2}{2}$, а $(A1.3)$ переходит в выражение

$$\|x(t)-z(t)\| \leq \|x(ih)-x^i\|(1+A(t-ih)) + A(AC+BR+f)\frac{(t-ih)^2}{2} + \\ + B\int\limits_{ih}^{t}\|u(\tau)-u(ih)\|d\tau + L_f\frac{(t-ih)^2}{2}.$$

Тогда для $\Delta_h(i)$ будет справедлива формула

$$\Delta_h(i) \leq \Delta_h(i-1)(1+Ah) + [A(AC+BR+f)+L_f]\frac{h^2}{2} + BI_{u,h}(i),$$

где $I_{u,h}(i) = \int\limits_{ih}^{(i+1)h}\|u(\tau)-u(ih)\|d\tau$. Для $i=0$ выражение $\Delta_h(0)$ принимает вид

$$\Delta_h(0) \leq [A(AC+BR+f)+L_f]\frac{h^2}{2} + BI_{u,h}(0).$$

Из рекуррентных неравенств получаем выражение

$$\Delta_h(i) \leq [A(AC+BR+f)+L_f]\frac{h^2}{2}\frac{(1+Ah)^{i+1}-1}{(1+Ah)-1} + B\sum_{k=0}^{i}I_{u,h}(k)(1+Ah)^{i-k};$$

доказательство этого факта следует из леммы 2, если положить в ней $a=(1+Ah)$, $b=[A(AC+BR+f)+L_f]\dfrac{h^2}{2}$, $c(i)=BI_{u,h}(i)$. Т.к. все константы и интеграл $I_{u,h}(k)$ $\forall k=\overline{0,N-1}$ неотрицательны, то из определения $\Delta_h = \max\limits_{i=\overline{0,N-1}} \Delta_h(i)$ получаем оценку

$$\Delta_h \leq [A(AC+BR+f)+L_f]\frac{h^2}{2}\frac{(1+Ah)^N-1}{A} + B\sum_{k=0}^{N-1} I_{u,h}(k)(1+Ah)^{N-1-k}$$

(максимальное значение достигается при наибольшем возможном $i = N-1$), или

$$\Delta_h \leq \left[(A(AC+BR+f)+\frac{L_f}{A}\right]\frac{e^{AT}-1}{2}h + B\sum_{k=0}^{N-1} I_{u,h}(k)(1+Ah)^{N-1-k}. \qquad (A1.4)$$

В случае кусочно-непрерывного управления $u(t)$ формула $(A1.4)$ принимает вид

$$\Delta_h \leq \left\{\left[(A(AC+BR+f)+\frac{L_f}{A}\right]\frac{h}{2} + \frac{B\varepsilon_u(h)}{A}\right\}(e^{AT}-1) + 2BR\bar{v}e^{AT}h, \qquad (A1.5)$$

где через $\varepsilon_u(h)$ обозначено максимальное из колебаний функции $u(t)$ в смысле выбранной нормы, т.е. $\|u(\tau)-u(ih)\| \leq \varepsilon_u(h)\ \forall\tau \in [ih,(i+1)h]$ на отрезках непрерывности $u(t)$, $\bar{v}$ — оценка сверху числа точек разрыва (первого рода) функции $u(t)$. Приведем вывод этой формулы. Действуем аналогично [2]. Обозначим множество индексов $k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ тех интервалов вида $kh \leq t \leq (k+1)h$, на которых оптимальное управление $u(t)$ непрерывно, через $K(h)$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=0}^{N-1} I_{u,h}(k)(1+Ah)^{N-1-k} = \sum_{k=0}^{N-1}(1+Ah)^{N-1-k}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}\|u(\tau)-h(kh)\|d\tau.$$

Разобьем ее на две суммы: одну — по отрезкам непрерывности $u(t)$, другую — по отрезкам, на которых $u(t)$ претерпевает разрыв

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} I_{u,h}(k)(1+Ah)^{N-1-k} &= \sum_{k\notin K(h)}(1+Ah)^{N-1-k}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}\|u(\tau)-u(kh)\|d\tau+\\ &+\sum_{k\in K(h)}(1+Ah)^{N-1-k}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}\|u(\tau)-u(kh)\|d\tau \leq\\ &\leq 2R\bar{v}(1+Ah)^{N-1}h + \varepsilon_u(h)h\sum_{k\in K(h)}(1+Ah)^{N-1-k} \leq\\ &\leq 2R\bar{v}e^{AT}h + \varepsilon_u(h)h\sum_{k=0}^{N-1}(1+Ah)^{N-1-k} =\\ &= 2R\bar{v}e^{AT}h + \varepsilon_u(h)h\frac{(1+Ah)^N-1}{Ah} \leq\\ &\leq 2R\bar{v}e^{AT}h + \varepsilon_u(h)\frac{e^{AT}-1}{A}.\end{aligned} \qquad (A1.6)$$

После подстановки в $(A1.4)$ получаем $(A1.5)$.

Если управление на отрезках его непрерывности удовлетворяет условию Липшица с константой L_u, т.е. $\|u(\tau)-u(ih)\| \leq L_u|\tau - ih|$, то $(A1.5)$ приводится к виду

$$\Delta_h \leq \left\{\left[(AC+BR+f)+\frac{L_f}{A}+\frac{BL_u}{A}\right]\frac{e^{AT}-1}{2} + 2BR\bar{v}e^{AT}\right\}h. \qquad (A1.7)$$

Действительно, тогда сумму $\sum\limits_{k\in K(h)}(1+Ah)^{N-1-k}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}\|u(\tau)-u(kh)\|d\tau$ в $(A1.6)$ можно оценить как

$$\sum_{k\in K(h)}(1+Ah)^{N-1-k}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}\|u(\tau)-u(kh)\|d\tau\le\sum_{k\in K(h)}(1+Ah)^{N-1-k}L_u\int\limits_{kh}^{(k+1)h}(\tau-kh)d\tau,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{N-1}I_{u,h}(k)(1+Ah)^{N-1-k}\le 2R\bar{v}e^{AT}h+L_u\frac{h}{2}\frac{e^{AT}-1}{A},$$

и получаем $(A1.7)$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ можно указать h_{max} такое, что

$$\Delta_{h_{max}}\le\left\{\left[(AC+BR+f)+\frac{L_f}{A}+\frac{BL_u}{A}\right]\frac{e^{AT}-1}{2}+2BR\bar{v}e^{AT}\right\}h_{max}<\varepsilon.$$

Например, можно взять

$$h_{max}=\frac{\varepsilon}{2\left\{\left[(AC+BR+f)+\frac{L_f}{A}+\frac{BL_u}{A}\right]\frac{e^{AT}-1}{2}+2BR\bar{v}e^{AT}\right\}}.$$

При этом $\forall h\le h_{max}$ траектория дискретной задачи (5)–(8) с управлением $(A1.2)$ лежит внутри допустимого множества G, т.е. является допустимой.

По лемме 1 у задачи ЛП (9) существует допустимый вектор $w=u^0,x^0,\ldots,u^N,x^N\in W$ при любом $N\ge N_{min}=T/h_{max}$. В силу ограниченности всех u^i, $i=\overline{0,N}$, и начального условия (3), согласно [7, теорема 6.1 § 6 глава 2] у задачи ЛП (9) существует решение $w_*=u_*^0,x_*^0,\ldots,u_*^N,x_*^N\in W_*$ при любом $N\ge N_{min}=T/h_{max}$, так как при этом множество W непусто и целевая функция $g(w)$ ограничена снизу (в силу ограниченности множества W). Построим по решению задачи ЛП (9) ступенчатое управление для непрерывной задачи следующим образом: $u(t)=u_*^i$, $t\in[ih,(i+1)h)$, $i=\overline{0,N-1}$. Данное управление порождает траекторию $x(t)$ по правилу (2)–(3). Следует отметить, что данное управление может не являться допустимым, т.е. некоторые из условий (4) могут нарушаться. Покажем, что эти нарушения можно сделать сколь угодно малым уменьшением шага дискретизации h. Если Δ_h оценивается формулой $(A1.7)$, то нарушение условий (4) можно оценить величиной

$$\begin{aligned}\Delta_{cond}\le\max\{\|C_1\|,\|C_2\|\}\Delta_h\le\max\{\|C_1\|,\|C_2\|\}\times\\ \times\left\{\left[(AC+BR+f)+\frac{L_f}{A}+\frac{BL_u}{A}\right]\frac{e^{AT}-1}{2}+2BR\bar{v}e^{AT}\right\}h,\end{aligned}$$

откуда следует, что $(\Delta_{cond})\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$. Следовательно, при $h\to 0$ условия (4) нарушаются мало, и всегда можно подобрать такой шаг h, чтобы нарушение условий было в пределах допустимой ошибки. При данном управлении отличие функционала непрерывной задачи (1) от функционала дискретной задачи (5) можно оценить как

$$\begin{aligned}|J(u(t))-g(w)|=|\alpha^*(x(T)-x^N)|\le\|\alpha^*\|\Delta_h\le\\ \le\|\alpha^*\|\left\{\left[(AC+BR+f)+\frac{L_f}{A}+\frac{BL_u}{A}\right]\frac{e^{AT}-1}{2}+2BR\bar{v}e^{AT}\right\}h\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1981.
2. Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И. *Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления*. Киев: Наукова думка, 1978.
3. Дикусар В.В., Синягин С.Ю. *Качественные и численные методы в задаче оптимального управления внешним долгом*. Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 2000.
4. Чекарев Д.А. Модель экономической системы с эффектом накопления в задаче оптимального управления внешним долгом. В сб.:*Моделирование и обработка информации*. М.: МФТИ, 2003, стр. 39-Ц43.
5. Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*. М.: Наука, 1982.
6. Умнов А.Е. *Система содействия принятию решений “Баланс”*. М.: МФТИ, 1991.
7. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. *Линейное программирование*. М.: Факториал, 1998.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И. Венец