Информационные процессы, Том 5, № 3, 2005, стр. 213–226

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Динамическая маршрутизация в системе с заявками, имеющими степенной закон распределения времени обслуживания

А.В. Аленичев*, **Н.Б. Лиханов****

**Московский Физико-Технический Институт, Долгопрудный, Россия*

***Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия*

Поступило в редколлегию 1.08.2005

Аннотация—Рассматривается модель дискретного времени системы обслуживания с N серверами, у каждого из которых имеется входной буфер длины z; $(z \to \infty)$. В систему поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью $N\lambda$ и временем обслуживания τ. Время обслуживания τ имеет степенной закон распределения вероятности. Рассматриваются следующая модель системы. При поступлении в систему заявки в момент времени t, случайно выбираются K серверов из N, и заявка становится в очередь сервера с минимальной длинной. Изучается поведение вероятности переполнения системы в приближении бесконечного входного буфера, в смысле вероятности попадания новой заявки в очередь с временем обслуживания находящихся в ней заявок большим уровня z_0, $(z_0 \to \infty)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современных сетях передачи данных, с их все более расширяющейся топологией и возрастающим количеством рабочих станций, актуальной проблемой является выбор маршрута прохождения данных, т.е. маршрутизация. Протоколы маршрутизации могут быть построены на основе разных алгоритмов, отличающихся способами построения таблиц маршрутизации, способами выбора наилучшего маршрута и другими особенностями своей работы. Одним из видов маршрутизации является динамическая маршрутизация, т.е. маршрутизация которая зависит от текущего состояния системы и относится к семейству протоколов балансирующих нагрузку в сети(load-balance protocol). В статье рассматривается следующая модель маршрутизации. При поступлении в систему заявки в момент времени t, случайно выбираются K серверов из N, и заявка становится в очередь сервера с минимальной длинной.

Модель входного трафика а также методы подсчета вероятности переполнения системы выбраны исходя из нижеследующих соображений и основываются на модели предложенной в [17]. Современные исследования сетевого трафика показали, что нагрузку в сети наиболее полно можно описать используя самоподобные процессы. С их помощью можно показать не только пакетный характер передачи данных, но и сеансовые зависимости трафика в сети. Последние приводят к значительной корреляции параметров трафика в течении длительного промежутка времени(времени сеанса).

Основными параметрами качества обслуживания в сети являются вероятность потери и время распространения пакета. Существуют два главных подхода к оценке параметров качества обслуживания, это так называемое, приближение большого количества источников и приближение большого буфера.

Приближение большого буфера используется в случае, когда один или несколько источников, занимающих значительную часть полосы пропускания,поступают на сервер. Это приближение было исследовано при различных предположения о вероятностных характеристиках источников рядом авторов, см. ([7]) для случая "легких"источников со степенным законом распределения вероятностей длинны сеанса.

Приближение многих источников используется когда большое количество источников, занимающих незначительную часть полосы пропускания, поступают на скоростной сервер обслуживания. Многие авторы исследовали поведение системы в этом случае,например см. [10], [11],[8]. Эмпирические исследования трафика сетей проведенные в [5],[6] показали наличие так называемых "тяжелых"источников со степенным законом распределения вероятностей длины сеанса. Такие источники, включившись, продолжают свою активность в течении длительного промежутка времени. Поведение системы с источниками такого рода в приближении большого буфера исследовалось многими авторами с различными предположениями о входном потоке, см. [15], [12], [16], [13], [14].

Работа организована следующим образом: в части 2 мы опишем модель и сформулируем предварительные результаты, в части 3 получим формулу для вероятности переполнения системы, а в заключении обсудим основные результаты.

2. МОДЕЛЬ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривается модель дискретного времени системы из N серверов с входными буферами длины z,($z \to \infty$), и поступающим на них пуассоновским потоком запросов с интенсивностью $N\lambda$ и временем обслуживания τ, имеющим степенной закон распределения. Обозначим θ_t – количество заявок поступивших в систему в момент времени t. Тогда,

$$Pr(\theta_t = n) = \frac{(\lambda N)^n}{n!} e^{-\lambda N}, \lambda > 0.$$

Время обслуживания j-й заявки, пришедшей в систему в момент времени t, $\tau_{t,j}$, имеет следующий асимптотический вид распределения вероятностей:

$$Pr(\tau_{t,j} > x) \sim \alpha x^{-1-\beta}, \text{ при } x \to \infty,$$

где $\alpha, \beta > 0$, а под знаком $A(x) \sim B(x)$ понимается

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

Рассматривается следующий способ маршрутизации заявок. При поступлении в систему заявки, выбираются K случайных серверов из N и заявка становится в очередь сервера минимальной длинны.

Определим случайный вектор $\overrightarrow{\chi}_{t,j}$, соответствующую множеству номеров очередей случайно выбранных при маршрутизации j заявки пришедшей в момент времени t.

$$\overrightarrow{\chi}_{t,j} = (k_1, k_2, ..., k_K),$$

где $k_1, k_2, ..., k_K \in \{1, ..., N\}$ - случайные целочисленные величины равномерно распределенные на отрезке $\{1, ..., N\}$. Понятно, что $\forall i_1, i_2 \in \{1, ..., K\}, i_1 \neq i_2$ верно, что $k_{i_1} \neq k_{i_2}$.

Определим $W_{t,i}$ - время, необходимое для обслуживания всех заявок находящихся в i очереди в момент времени t, как:

$$W_{t,i} = (W_{t-1,i} + Y_{t,i} - C)^+,$$

$x^+ = max(0, x)$, C– скорость сервера, а $Y_{t,i}$ – случайная величина, соответствующая суммарному времени обслуживания заявок поступивших в i очередь в момент времени t:

$$Y_{t,i} = \sum_{j=1}^{\theta_t} \tau_{t,j} I(\chi_{t,j} = i),$$

где $I(A)$ -функция индикатор события A, а случайная величина $\chi_{t,j}$ соответствует номеру очереди в которую поступит j-ая заявка пришедшая в момент времени t, и задается следующим выражением:

$$\chi_{t,j} = arg \min_{\overrightarrow{\chi}_{t,j}[0], \overrightarrow{\chi}_{t,j}[1], ..., \overrightarrow{\chi}_{t,j}[K]} \{W_{t-1, \overrightarrow{\chi}_{t,j}[0]}, W_{t-1, \overrightarrow{\chi}_{t,j}[1]}, ..., W_{t-1, \overrightarrow{\chi}_{t,j}[K]}\}.$$

Средняя нагрузка на систему:

$$\rho = N\lambda E[\tau_{0,1}].$$

В дальнейшем полагаем что $\rho < N$, следовательно система стационарна.
Будем считать также, что скорость обслуживания всех очередей одинакова и равна $C = 1$.

При доказательстве теорем будут использоваться также следующие величины:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N} Y_{t,i} \quad ,$$

$$Y_{t,i}^h = \sum_{j=1}^{\theta_t} \tau_{t,j} I(\chi_{t,j} = i, \tau_{t,j} > \varepsilon z) \quad ,$$

$$Y_{t,i}^l = \sum_{j=1}^{\theta_t} \tau_{t,j} I(\chi_{t,j} = i, \tau_{t,j} \le \varepsilon z) \quad ,$$

$$\overline{X}_{k,i} = \sum_{n=t-k}^{t} Y_{n,i} = \sum_{n=t-k}^{t} \sum_{j=1}^{\theta_n} \tau_{n,j} I(\chi_{n,j} = i) \quad ,$$

$$X_{k,i} = \sum_{n=t-k-\varepsilon z}^{t-k} (\tau_{n,j} - ((t-k) - n))^+ I(\chi_{n,j} = i) + \sum_{n=t-k}^{t-\varepsilon z} Y_{n,i} +$$

$$\sum_{n=t-\varepsilon z}^{t} \sum_{j=1}^{\theta_n} min(\tau_{n,j}, t-n) I(\chi_{n,j} = i) \quad .$$

Исходя из построения $Y_{t,i}^l$ и $Y_{t,i}^h$ независимы и

$$Y_t = Y_t^l + Y_t^h.$$

Остаточное время обслуживания заявок находящихся в очереди выбранной при маршрутизации виртуальной заявки в момент времени t, обозначим как D_t и определим как

$$D_t = W_{t-1, \chi_{t,1}}.$$

В дальнейшем, под переполнением системы будет подразумеваться попадание виртуальной заявки при маршрутизации в очередь сервера с остаточным временем обслуживания находящихся в нем заявок превышающим уровень z_0, т.е. $D_t > z_0$, для больших z_0, без учета времени обслуживания поступившей заявки.
Нас будет интересовать поведение стационарной вероятности преполнения системы,

$$Pr(D > z_0) = Pr(W_{t-1, \chi_{t,1}} > z_0).$$

Основные результаты сформулируем в виде 2-х теорем.

Теорема 1. *В условиях сформулированной модели при* $\rho < N - K$

$$Pr(D > z_0) \sim \frac{(N-K)!}{N!} \left(\frac{N\lambda\alpha}{\beta}\right)^K z_0^{-K\beta} \text{ при } z_0 \to \infty. \tag{1}$$

Теорема 2. *В условиях сформулированной модели при условии что* $\exists n_1 < K : \rho > N - n_1$

$$Pr(D > z_0) \sim \frac{K!(N-K)!}{n!N!} \left(\frac{N\lambda\alpha}{\beta}\right)^n \left(1 + \frac{N-n}{\rho - (N-n)}\right)^{-n\beta} z_0^{-n\beta}, \text{ при } z_0 \to \infty, \tag{2}$$

где

$$n = \min_{n_i \in \{1,\ldots,K-1\}} (n_i : \rho > N - n_i).$$

Дадим интерпретацию полученных результатов.

В теореме 1 рассматривает случай, когда нагрузка в системе невелика, а именно $\rho < N - K$. В этом случае вероятность переполнения в системе сильно зависит от количества случайно выбираемых при маршрутизации очередей, т.к. их количество K стоит в показателе экспоненты z_0. Поэтому, увеличивая количество выбираемых при маршрутизации очередей можно существенно уменьшить вероятность переполнения системы. Этим надо руководствоваться при построении системы с требуемым QoS рассчитывая необходимые параметры маршрутизации по формуле (1).

Теорема 2 применима в случае когда на систему поступает существенная нагрузка, а именно $\exists n_1 < K : \rho > N - n_1$. В этом случае вероятность переполнения системы имеет другой вид зависимости от количества выбираемых при маршрутизации очередей. А именно, при увеличении количества выбираемых очередей, начиная с определенного значения

$$n = \min_{n_i \in \{1,\ldots,K-1\}} (n_i : \rho > N - n_i),$$

вероятность переполнения перестает существенно уменьшаться, т.к. зависимость по K переходит из показателя экспоненты в константу перед ней. Поэтому при выборе параметров маршрутизации, обеспечивающих максимальные параметры QoS для данной системы, не стоит увеличивать количество выбираемых при маршрутизации очередей больше n, определяемого в теореме 2, - это не приведет к значительному уменьшению вероятности переполнения в системе.

Сформулируем основные идеи доказательства полученных теорем. Доказательство теорем будет произведено методом граничных оценок вероятности переполнения системы и оформлено в виде лемм. Для оценки нижней границы вероятности переполнения системы(Леммы 1 и 2) будет найдено определенное событие вызывающее переполнение, и получена его вероятность. Верхняя граница оценивается значительно сложней и базируется на разбиении входного потока в систему на короткие($\tau < \varepsilon z$) и длинные заявки($\tau > \varepsilon z$) и рассмотрении процессов переполнения вызванных отдельно либо короткими либо длинными заявками.

Полученные асимптотические оценки снизу и сверху совпадают, что и является доказательством теорем.

Перейдем к формулировке леммы 1 определяющей нижнюю границу вероятности переполнения системы для случая рассматриваемого в Теореме 1.

Лемма 1. *В условиях сформулированной модели при* $\rho < N - K$

$$Pr(D > z_0) \succeq \frac{(N-K)!}{N!} \left(\frac{N\lambda\alpha}{\beta}\right)^K z_0^{-K\beta},\ z_0 \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим что в системе в K очередях в момент времени t находятся одиночные заявки с остаточным временем обслуживания превышающим уровень z_0, $z_0 \to \infty$. Понятно, что это является достаточным условием переполнения. Оценим вероятность этого события.

Легко увидеть, что

$$Pr(D > z_0) \succeq Pr(\exists n_1, n_2, ..., n_K \in [1, N], n_l \neq n_m, \forall l \neq m : W_{t,n_1} > z_0, W_{t,n_2} > z_0, ..., W_{t,n_K} > z_0)$$
$$\cdot Pr(\overrightarrow{\chi}_t^K = (n_1, n_2, ..., n_K)).$$

В соответствии с выбранным способом маршрутизации:

$$Pr(\overrightarrow{\chi}_t^K = (n_1, n_2, ..., n_K)) = \frac{K!(N-K)!}{N!}.$$

Определим через событие $A_t(n, z_0)$, событие состоящее в том что в системе в момент времени t находятся хотя бы n заявок таких, что

$$(\tau_{t_j} - (t - t_j)) > z_0 \text{ для } \forall j = \{1, ..., n\} \quad (1.1),$$

где t_j время поступления j-ой заявки в систему.

Докажем, что если в системе имеет место событие $A_t(n, z_0)$, то в момент времени t найдется хотя бы n серверов с длиной очереди

$$W_{t,m_i} > z_0 \text{ для } \forall i \in \{1, ..., n\}, m_1 < m_2 < ...m_n. \quad (1.2)$$

Понятно, что если все заявки формирующие событие $A_t(n, z_0)$ при маршрутизации поступили в разные очереди то из условия (1.1) следует существование (1.2).

Допустим, что какая то заявка j_l поступила в очередь, в которой уже стоит заявка из события $A_t(n, z_0)$, тогда в момент времени t_{j_l}–поступления этой заявки, из условий маршрутизации следует, что есть хотя бы n очередей таких, что

$$W_{t,k_i} > z_0 + (t - t_{j_l}) \text{ для } \forall i \in \{1, ..., n\}, k_1 < k_2 < ...k_n$$

откуда и следует (1.2).

Поэтому

$$Pr(\exists n_1, n_2, ..., n_K \in [1, N],$$
$$n_1 \neq n_2 ... \neq n_K : W_{t-1,n_1} > z_0, W_{t-1,n_2} > z_0, ..., W_{t-1,n_K} > z_0) \geq Pr(A_t(K, z_0)).$$

Далее, в условиях сформулированной модели, исходя из структуры входного потока и свойств распределения Пуассона, следует, что количество заявок $\theta_t^{z_0}$, находящихся в системе в момент времени t и удовлетворяющих условию (1.1),– также пуассоновская случайная величина с интенсивностью Λ:

$$Pr(\theta_t^{z_0} = n) = \frac{\Lambda^n}{n!} e^{-\Lambda},$$

$$\Lambda = \int_{z_0}^{\infty} N\lambda\alpha x^{-1-\beta} dx = \left(\frac{N\lambda\alpha}{\beta}\right) z_0^{-\beta},$$

откуда следует, что

$$Pr(A_t(K, z_0)) \sim \frac{\Lambda^K}{K!} . \blacktriangleleft$$

Перейдем к формулировке леммы 2, определяющей нижнюю границу вероятности переполнения системы для случая рассматриваемого в Теореме 2.

Лемма 2. *В условиях сформулированной модели при* $C = 1$ *и если* $\exists n < K : \rho > N - n$ *то верно*

$$Pr(D > z_0) \succeq \frac{K!(N-K)!}{n!N!}\left(\frac{N\lambda\alpha}{\beta}\right)^n \left(1 + \frac{N-n}{\rho-(N-n)}\right)^{-n\beta} z_0^{-n\beta}, z_0 \to \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим что в системе в n очередях в момент времени t находятся одиночные заявки с остаточным временем обслуживания превышающим уровень $z_0, z_0 \to \infty$. Все они пришли не позднее чем $t - z_1$. В систему, находящуюся в этом состоянии, поступают только заявки с длиной $\tau < \varepsilon z$. Понятно, что находящаяся в данном состоянии система будет переполняться, найдем вероятность переполнения.

Определим через событие $A_t(z_1, n, z_0)$, событие состоящее в том, что в системе в момент времени t находятся хотя бы n заявок удовлетворяющих условию (1.1) и таких, что

$$\min_{j=\overline{1..n}}(t - t_j) = z_1, \tag{2.1}$$

$$z_1 = \left(\frac{N-n}{\rho-(N-n)} + \delta\right) z_0,\ \delta > 0.$$

Положим, что в системе имеет место событие $A_t(z_1, n, z_0)$ и в систему поступают только заявки из входного процесса Y_t^l.

Понятно, что после маршрутизации заявок формирующих событие $A_t(z_1, n, z_0)$, найдется хотя бы n разных очередей в которых будут стоять заявки удовлетворяющие(1.1) и (2.1)(см. Лемма 1). Множество номеров этих очередей обозначим через B_1.
Из $N - n$ неперегруженных очередей, множество номеров которых обозначим $B_2 = B_0/B_1$, выберем $K - n$ с максимальной длинной в момент времени t, множество B_3. Через B_0 здесь обозначено множество номеров всех очередей.
Из определений $W_{t,i}$ и $\overline{X}_{k,i}$ следует, что

$$\sum_{i\in B_2} W_{t,i} \geq \sum_{i\in B_2}\left(\overline{X}^l_{z_1,i} - z_1\right). \tag{2.2}$$

Замечая что средняя длина всех неперегруженных очередей (множество B_2)меньше чем средняя длина очередей из множества B_3 и используя соотношение (2.2), имеем

$$\sum_{i\in B_3} W_{t,i} \geq \frac{K-n}{N-n}\sum_{i\in B_2}\left(\overline{X}^l_{z_1,i} - z_1\right). \tag{2.3}$$

Заметим также, что из условий маршрутизации следует соотношение

$$\min_{i\in B_3} W_{t,i} + \varepsilon z \geq \max_{i\in B_3} W_{t,i}. \tag{2.4}$$

Объединяя (2.3) и (2.4) получаем

$$\min_{i\in B_3} W_{t,i} \geq \frac{1}{N-n}\sum_{i\in B_2}\left(\overline{X}^l_{z_1,i} - z_1\right) - \varepsilon z$$

и учитывая

$$\sum_{i \in B_2} \overline{X}^l_{z_1,i} \geq X^l_{z_1-\varepsilon z}$$

получаем

$$Pr\left(\min_{i \in B_3} W_{t,i} > z_0\right) \geq 1 - Pr\left(\left(X^l_{z_1-\varepsilon z} - (z_1 - \varepsilon z)(N-n)\right) \leq (1+2\varepsilon)(N-n)z_0\right). \quad (2.5)$$

Замечая, что при условии

$$\delta \geq \frac{(2\varepsilon + \delta_2)(N-n)\rho}{(\rho - \delta_1) - (N-n)}$$

верно неравенство

$$\left(X^l_{z_1-\varepsilon z} - (z_1 - \varepsilon z)(N-n)\right) - (1+2\varepsilon)(N-n)z_0 \leq \left(X^l_{z_1-\varepsilon z} - (\rho - \delta_1)(z_1 - \varepsilon z)\right) + \delta_2 z_0$$

можно применить лемму 3.4 из [17]:

Лемма. *Если* $E\left[Y^l_t\right] > \rho - \delta_1$, *то для любых* $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, *и достаточно малого* ε, *при* $z \to \infty$

$$Pr\left(\inf_{k \geq 0}\left(X^l_k - (\rho - \delta_1)k\right) < -\delta_2 z\right) \leq e^{-O(z)}.$$

Из леммы и из (2.5) следует, что

$$Pr(\min_{i \in B_3} W_{t,i} > z) \geq \left(1 - e^{-O(z)}\right).$$

Окончательно получаем, что

$$Pr(D > z_0) \geq Pr(A_t(n, z_0 + z_1)) \cdot Pr(\min_{i \in B_3} W_{t,i} > z_0) \cdot Pr(\chi^K_t = B_1 \cup B_3). \blacktriangleleft$$

Перейдем к доказательству верхних границ. Для этого сформулируем и докажем две вспомогательные леммы характеризующие групповое поведение очередей на промежутке времени γz $(1 > \gamma = const \gg \varepsilon)$ при условии что в систему поступают заявки с длиной $\tau < \varepsilon z$.

Лемма 3. $\forall \delta_1 > 0, \forall \delta^0_2 > 0, \forall \xi > 0, \exists z_1, \exists \varepsilon_0$ *такие, что* $\forall z > z_1, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$, *если на отрезке* $[t_1, t_2]$ *для некоторого* $i_0 \in \{1, ..., N\}$ *верно, что*

$$W^l_{t_1,i_0} > (t_2 - t_1)$$

и $\forall i_j = \{1, ..., N\}, i_j \neq i_0$ *выполняются условия, что*

$$\text{либо } \forall t \in [t_1, t_2] \text{ верно } W^l_{t,i_j} > \left(W^l_{t_1,i_0} + (t - t_1)(\rho_{i_0} - 1 + \delta_1) + z\delta_2\right),$$

$$\text{либо } \forall t \in [t_1, t_2] \text{ верно } W^l_{t,i_j} < \left(W^l_{t_1,i_0} + (t - t_1)(\rho_{i_0} - 1 - \delta_1) - z\delta_2\right),$$

то справедливо, что

$$Pr\left\{\bigcap_{t=t_1}^{t_2}\left\{\left|W^l_{t,i_0} - \left(W^l_{t_1,i_0} + (t - t_1)(\rho_{i_0} - 1)\right)\right| < \delta_2 z + \delta_1(t - t_1)\right\}\right\} \geq 1 - z^{-\xi}(t_2 - t_1), \quad (5)$$

где

$$\delta_2 \triangleq (\delta^0_2 + (\rho_{i_0} + \delta_1)\varepsilon),$$

$$\rho_i = \rho \frac{C_{n_i}^{K-1}}{C_{N-1}^{K-1}},$$

$$n_i = \|\{k_j : W_{t_1,k_j}^l > W_{t_1,k_i}^l\}\|.$$

Доказательство. Рассмотрим систему обслуживания с одной очередью, входным потоком $Y^l : E[Y^l] = \rho_1$ и скоростью обслуживания $C = 1$. Исследуем поведение очереди на некотором отрезке $[t_1, t_2]$. Пускай выполнено условие, что $W_{t_1}^l > (t_2 - t_1)$.

Заметим, что т.к. очередь не простаивает на отрезке $[t_1, t_2]$, то верно, что

$$\forall t \in [t_1, t_2] : W_t^l = W_{t_1}^l + (X^l(t_1, t) - (t - t_1)). \tag{3.0}$$

Кроме того в каждой точке отрезка $t \in [t_1, t_2]$ для $X^l(t_1, t)$ применимы леммы 3.3 и 3.4 из [17]. Лемма 3.3 из [17]:

Лемма. *Если $E\left[Y_t^l\right] < \rho + \delta_1$, то для любых $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \xi > 0$, и достаточно малого ε, при $z \to \infty$*

$$Pr\left(\sup_{k\geq 0}\left(X_k^l - (\rho + \delta_1)k\right) > \delta_2 z\right) \leq z^{-\xi}$$

Лемма 3.4 из [17]:

Лемма. *Если $E\left[Y_t^l\right] > \rho - \delta_1$, то для любых $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, и достаточно малого ε, при $z \to \infty$*

$$Pr\left(\inf_{k\geq 0}\left(X_k^l - (\rho - \delta_1)k\right) < -\delta_2 z\right) \leq e^{-O(z)}$$

Принимая во внимание, что $\overline{X}_k^l \geq X_{k-\varepsilon z}^l$ из (3.4)[17] следует

$$Pr\left(\left(\overline{X}^l(t_1, t) - (\rho_1 - \delta_1)(t - t_1)\right) < -(\delta_2 + (\rho_1 - \delta_1)\varepsilon)z\right) \leq e^{-O(z)}$$

откуда с учетом (3.0):

$$Pr\left(W_t^l < W_{t_1}^l + (\rho_1 - \delta_1 - 1)(t - t_1) - (\delta_2 + (\rho_1 - \delta_1)\varepsilon)z\right) \leq e^{-O(z)} \tag{3.1}$$

Аналогично, замечая что $X_k^l \geq \overline{X}_{k-\varepsilon z}^l$ из (3.3)[17] следует

$$Pr\left(\left(\overline{X}^l(t_1, t) - (\rho_1 + \delta_1)(t - t_1)\right) > (\delta_2 + (\rho_1 + \delta_1)\varepsilon)z\right) \leq z^{-\xi}$$

и используя (3.0) получаем:

$$Pr\left(W_t^l > W_{t_1}^l + (\rho_1 + \delta_1 - 1)(t - t_1) + (\delta_2 + (\rho_1 + \delta_1)\varepsilon)z\right) \leq z^{-\xi} \tag{3.2}$$

Теперь оценим вероятность того что на всем отрезке $[t_1, t_2]$ траектория очереди будет проходить между двух ограничивающих прямых задаваемых в формулах (3.1)(3.2), т.е. $\forall t \in [t_1, t_2]$ верно, что

$$W_{t_1}^l + (\rho_1 - \delta_1 - 1)(t - t_1) - (\delta_2 + (\rho_1 - \delta_1)\varepsilon)z \leq W_t^l \leq W_{t_1}^l + (\rho_1 + \delta_1 - 1)(t - t_1) - (\delta_2 + (\rho_1 + \delta_1)\varepsilon)z$$

Обозначим через A_t событие, состоящее в том что в момент времени t у очереди было следующее значение

$$A_t = \left\{ \left| W_t^l - \left(W_{t_1}^l + (t - t_1)(\rho_1 - 1) \right) \right| > (\delta_2 + (\rho_1 + \delta_1)\varepsilon)z + \delta_1(t - t_1) \right\}$$

Тогда вероятность искомого события можно оценить следующим образом

$$Pr\left\{ \bigcap_{t=t_1}^{t_2} \overline{A}_t \right\} = 1 - Pr\left\{ \bigcup_{t=t_1}^{t_2} A_t \right\} \geq 1 - \sum_{t=t_1}^{t_2} Pr(A_t)$$

откуда, с учетом (3.1) и (3.2)

$$Pr\left\{ \bigcap_{t=t_1}^{t_2} \left\{ \left| W_t^l - \left(W_{t_1}^l + (t - t_1)(\rho_1 - 1) \right) \right| < (\delta_2 + (\rho_1 + \delta_1)\varepsilon)z + \delta_1(t - t_1) \right\} \right\} \geq 1 - z^{-\xi}(t_2 - t_1) \tag{3.3}$$

Рассмотрим реализацию одиночной очереди и реализацию очереди i_0 на одном вероятностном пространстве. В этом случае, если для одиночной очереди $\forall t \in [t_1, t_2]$ будет верно, что

$$W_{t_1}^l + (\rho_{i_0} - \delta_1 - 1)(t - t_1) - (\delta_2 + (\rho_{i_0} - \delta_1)\varepsilon)z \leq W_t^l \leq W_{t_1}^l + (\rho_{i_0} + \delta_1 - 1)(t - t_1) - (\delta_2 + (\rho_{i_0} + \delta_1)\varepsilon)z$$

то реализации входного процесса в обеих очередях совпадут в следствии условий леммы и с учетом способа маршрутизации. Откуда с учетом (3.3) следует (5).

Лемма 4. *$\forall c_2 > 0, \forall \xi > 0$ достаточно малых $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \varepsilon > 0$ и достаточно большом z,на отрезке $[t_1, t_2]$ для множества $G \subset B_0$ такого, что для всех $i, j \in G$ верно, что*

$$\mid W_{t_1,i}^l - W_{t_1,j}^l \mid < c_2 z$$

$$\min_{i \in G} W_{t_1,i}^l > t_2 - t_1$$

и $\forall k \in B_0/G$ выполняются условия, что

$$\text{либо } \forall t \in [t_1, t_2] \text{ верно } W_{t,k}^l > \left(\overline{W}_{t_1}^l + (t - t_1)(\overline{\rho} - 1 + \delta_1) + z\delta_2 + c_2 z \right)$$

$$\text{либо } \forall t \in [t_1, t_2] \text{ верно } W_{t,k}^l < \left(\overline{W}_{t_1}^l + (t - t_1)(\overline{\rho} - 1 - \delta_1) - z\delta_2 - c_2 z \right)$$

справедливо, что

$$Pr\left\{ \bigcap_{i \in G} \bigcap_{t=t_1}^{t_2} \left\{ \left| W_{t,i}^l - \left(\overline{W}_{t_1}^l + (t - t_1)(\overline{\rho} - 1) \right) \right| < \delta_2 z + \delta_1(t - t_1) + c_2 z \right\} \right\} \geq 1 - \|G\| z^{-\xi}(t_2 - t_1) \tag{6}$$

где

$$\overline{W}_{t_1}^l = \frac{\sum_{i \in G} W_{t_1,i}^l}{\|G\|}$$

$$\overline{\rho} = \frac{\rho}{\|G\|} \frac{C_{\|G\| + min_{i \in G} n_i}^K - C_{min_{i \in G} n_i}^K}{C_N^K}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала поведение некоторых двух очередей $G = \{i, j\}$ на отрезке $[t_1, t_2]$, на которые поступает суммарный поток $E[Y_t^l] = \rho_2$, скорости обслуживания равны $C_j = C_i = 1$.

Разобъем отрезок $[t_1, t_2]$ на M частей, таким образом чтобы было верно:

$$\Delta = \frac{t_2 - t_1}{M}$$

$$\Delta < \frac{(c_1 - 2\delta_2)z}{(\min\limits_{i,j \in G; i \neq j} |\rho_i - \rho_j| + 2\delta_1)} \tag{4.0}$$

$$\Delta > \frac{2\delta_2 z}{\min\limits_{i,j \in G; i \neq j} |\rho_i - \rho_j| - 2\delta_1} \tag{4.1}$$

Докажем, что если начальный момент верно

$$\forall i, j \in G : |W_{t_1,i}^l - W_{t_1,j}^l| < (\|G\| - 1)c_1 z + ((\rho_2 + \delta_1)\Delta + \delta_2 z)$$

то справедливо, что

$$\forall i, j \in G : Pr\left\{\bigcap_{t=t_1}^{t_2} \{|W_{t,i}^l - W_{t,j}^l| < (\|G\| - 1)c_1 z + ((\rho_2 + \delta_1)\Delta + \delta_2 z)\}\right\} \geq 1 - \|G\| z^{-\xi}(t_2 - t_1) \tag{4.2}$$

Доказательство проведем по индукции по $t_k = t_1 + \Delta k$.
1) На первом шаге $k = 0$,- верно по условию.
2) Предположим, что имеет место событие

$$|W_{t_{k-1},i}^l - W_{t_{k-1},j}^l| < (c_1 + \delta_2)z + (\rho_2 + \delta_1)\Delta$$

покажем, тогда что

$$Pr\{|W_{t_k,i}^l - W_{t_k,j}^l| < (c_1 + \delta_2)z + (\rho_2 + \delta_1)\Delta\} \geq 1 - \|G\| z^{-\xi}\Delta$$

3) Если на $k - 1$ шаге, имело место событие

$$|W_{t_{k-1},i}^l - W_{t_{k-1},j}^l| < c_1 z$$

То оценим максимальное расстояние на которое могут разойтись траектории. Понятно что если весь поток Y_t^l попадает в одну очередь, а вторая очередь только обслуживается, то расстояние между траекториями будет максимально возможным.
Используя лемму 3 легко получить оценку

$$Pr\{|W_{t_k,i}^l - W_{t_k,j}^l| < (c_1 + \delta_2)z + (\rho_2 + \delta_1)\Delta\} \geq 1 - z^{-\xi}\Delta$$

Если же на $k - 1$ шаге, имело место событие

$$|W_{t_{k-1},i}^l - W_{t_{k-1},j}^l| > c_1 z$$

тогда, в силу условия (4.0) можно применять лемму 3 для достаточно большого z отдельно для каждой очереди, откуда легко получить

$$Pr\{|W_{t_k,i}^l - W_{t_k,j}^l| < (c_1 + \delta_2)z + (\rho_2 + \delta_1)\Delta - |\rho_i - \rho_j|\Delta + 2\delta_2 z + 2\delta_1\Delta\} \geq 1 - \|G\| z^{-\xi}\Delta$$

откуда с учетом условия (4.1) следует (4.2).

Покажем теперь что из (4.2) следует (6). Для этого рассмотрим поведение некоторой одиночной очереди $W^l_{t,(i,j)}$ со скоростью обслуживания $C_{(i,j)} = 2$ и входным потоком совпадающим с общим потоком на очереди из множества G, при одной реализации входного потока.

Из того, что очереди не простаивают на всем отрезке следует, что

$$\forall t \in [t_1, t_2] W^l_{t,(i,j)} = W^l_{t,i} + W^l_{t,j}$$

откуда с учетом (4.2) следует, что

$$Pr\left\{\bigcap_{t=t_1}^{t_2}\{|\frac{W^l_{t,(i,j)}}{2} - W^l_{t,j}| < (c_1+\delta_2)z + (\rho_2+\delta_1)\Delta\}\right\} \geq 1 - \|G\|z^{-\xi}(t_2-t_1) \tag{4.3}$$

Применяя для одиночной очереди лемму 3, получаем

$$Pr\left\{\bigcap_{t=t_1}^{t_2}\left\{\left|W^l_{t,(i,j)} - \left(W^l_{t_1,(i,j)} + (t-t_1)(\rho_2 - \|G\|)\right)\right| < \delta_2 z + \delta_1(t-t_1)\right\}\right\} \geq 1 - z^{-\xi}(t_2-t_1)$$

используя полученное неравенство и результат (4.3), окончательно получаем

$$Pr\left\{\bigcap_{i\in G}\bigcap_{t=t_1}^{t_2}\left\{\left|W^l_{t,i} - \left(\overline{W}^l_{t_1} + (t-t_1)(\overline{\rho}-1)\right)\right| < \delta_2 z + \delta_1(t-t_1) + c_2 z\right\}\right\} \geq 1 - \|G\|z^{-\xi}(t_2-t_1)$$

Перейдем к доказательству леммы для произвольного множества очередей G.

Докажем что верна формула (4.2) откуда(аналогично случаю $\|G\| = 2$) будет следовать выполнение (6). Доказательство проведем по индукции по $\|G\|$.

Для $\|G\| = 2$–верно.

Положим для множества $\|G\| = n$ верна формула (6).

Докажем тогда, что для множества $\|G\| = n+1$ выполняется (4.2). Разобъем отрезок $[t_1, t_2]$ на M частей, таким образом чтобы было верно (4.0) и (4.1). Доказательство проведем по индукции по $t_k = t_1 + \Delta k$.

1) На первом шаге $k = 0$,- верно по условию.

2) Предположим, что имеет место событие

$$\forall i,j \in G : |W^l_{t_{k-1},i} - W^l_{t_{k-1},j}| < (\|G\|-1)c_1 z + ((\rho_2+\delta_1)\Delta + \delta_2 z)$$

покажем, тогда что

$$\forall i,j \in G : Pr\{|W^l_{t_k,i} - W^l_{t_k,j}| < (\|G\|-1)c_1 z + ((\rho_2+\delta_1)\Delta + \delta_2 z)\} \geq 1 - \|G\|z^{-\xi}\Delta$$

3) Если на $k-1$ шаге, имело место событие

$$\forall i,j \in G : |W^l_{t_{k-1},i} - W^l_{t_{k-1},j}| < (\|G\|-1)c_1 z$$

То оценим максимальное расстояние на которое могут разойтись траектории. Понятно что если весь поток Y^l_t попадает в одну очередь, а остальные очереди только обслуживаются, то расстояние между траекториями будет максимально возможным.

Используя лемму 3 легко получить оценку

$$\forall i,j \in G : Pr\{|W^l_{t_k,i} - W^l_{t_k,j}| < (\|G\|-1)c_1 z + ((\rho_2+\delta_1)\Delta + \delta_2 z)\} \geq 1 - z^{-\xi}\Delta$$

Если же на $k-1$ шаге, имело место событие

$$\exists i,j \in G : |W^l_{t_{k-1},i} - W^l_{t_{k-1},j}| > (\|G\|-1)c_1 z$$

тогда существует несколько групп траекторий (по крайней мере две) $\{G_1,...,G_r\}$ таких, что

$$\forall r_1,r_2 \in \{1,...,r\}\ ,\ r_1 \neq r_2\ ,\ \forall i \in G_{r_1}, j \in G_{r_2} : |W_{t_{k-1},i} - W_{t_{k-1},j}| > c_1 z$$

$$\forall r_1 \in \{1,...,r\} : \|G_{r_1}\| \le n$$

тогда, в силу условия (4.0) и по предположению индукции на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ можно применять лемму 4 отдельно для каждой группы очередей. Откуда с учетом (4.1) будет следовать выполнение (4.2).

Замечание. Для доказательства этого достаточно рассмотреть нижнюю и верхнюю группы и выбрать для них

$$c_2 z = \max_{i,j\in G} |W_{t_{k-1},i} - W_{t_{k-1},j}|$$

Рассмотрим реализацию множества очередей G и реализацию множества очередей G_1 нашей системы на одном вероятностном пространстве. В этом случае, если для $\forall i \in G$ и для $\forall t \in [t_1,t_2]$ будет верно, что

$$\min_{i\in G} W^l_{t_1,i} + (t-t_1)(\min_{i\in G}\rho_i - 1 - \delta_1) - z\delta_2 - c_2 z \le W^l_{t,i} \le \max_{i\in G} W^l_{t_1,i} + (t-t_1)(\max_{i\in G}\rho_i - 1 + \delta_1) + z\delta_2 + c_2 z$$

то реализации входного процесса в обеих множествах совпадут в следствии условий леммы и с учетом способа маршрутизации. Откуда с учетом (4.2) следует (6).

Доказав вспомогательные леммы 3 и 4, перейдем к получению верхней границы вероятности переполнения для теорем 1 и 2.

В лемме 5 определяется верхняя граница вероятности переполнения для случая рассматриваемого теоремой 1.

Лемма 5. *В условиях сформулированной модели при* $\rho < N-K$

$$Pr(D > z_0) \preceq \frac{(N-K)!}{N!}\left(\frac{N\lambda\alpha}{\beta}\right)^K z_0^{-K\beta}\ ,\ z_0 \to \infty \tag{7}$$

Доказательство. Допустим в $n_1 \le K$ очередях стоят заявки, формирующие событие $A_t(n_1, z_0)$,- множество номеров этих очередей обозначим B_1, и в систему поступают только заявки с $\tau < \varepsilon z_0$, тогда для $\forall i \in B_0/B_1$ верно

$$Pr\{W_{t,i} < c_1 z_0\} \ge 1 - z_0^{-\xi} \qquad 5.1$$

Действительно, если в момент времени $t_1 < t$ существует одна или группа очередей $G \subseteq B_0/B_1$ таких что

$$W_{t_1,i} > c_1 z_0,\ \text{для} \forall i \in G$$

для них применимы леммы 3 и 4. Из которых, учитывая что $\rho < N-K$, следует (5.1). Т.е. необходимым условием накопления в очередях из множества G, является наличие в системе в разных очередях хотя бы $K+1$ заявок с длиной $\tau > \varepsilon z_0$. Вероятноять, чего

$$Pr(A_t(K+1, \varepsilon z_0)) \sim z_0^{-(K+1)\beta}$$

является $o(Pr(A_t(K,z_0)))$. Следовательно единственное условие переполнения, это наличие в системе заявок формирующих событие $A_t(K,z_0)$.

В лемме 6 определяется верхняя граница вероятности переполнения для случая рассматриваемого теоремой 2.

Лемма 6. *В условиях сформулированной модели при $C = 1$ и если $\exists n < K : \rho > N - n$ то верно*

$$Pr(D > z_0) \preceq \frac{K!(N-K)!}{n!N!} \left(\frac{N\lambda\alpha}{\beta}\right)^n \left(1 + \frac{N-n}{\rho - (N-n)}\right)^{-n\beta} z_0^{-n\beta}, z_0 \to \infty \tag{8}$$

где

$$n = \min_{n_i \in \{1,\dots,K-1\}} (n_i : \rho > N - n_i)$$

Доказательство. Допустим в $n_1 < n$ очередях стоят заявки, формирующие событие $A_t(z_1, n_1, z_0)$ – множество номеров этих очередей обозначим B_1, и в систему поступают только заявки с $\tau < \varepsilon z_0$, тогда для $\forall i \in B_0/B_1$ верно

$$Pr\{W_{t,i} < c_1 z_0\} \geq 1 - z_0^{-\xi} \tag{6.1}$$

Действительно, если в момент времени $t_1 < t$ существует одна или группа очередей $G \subseteq B_0/B_1$ таких что

$$W_{t_1,i} > c_1 z_0, \text{ для} \forall i \in G$$

для них применимы леммы 3 и 4. Из которых, учитывая что $\rho < N-(n-1)$, следует (6.1). Т.е. необходимым условием накопления в очередях из множества G, является наличие в системе в разных очередях хотя бы n заявок с длиной $\tau > \varepsilon z_0$. Учитывая, что

$$Pr(A_t(z_1, n+1, z_0) = o(Pr(A_t(z_1, n, z_0))$$

и применяя лемму 2, получаем (8).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы получили асимптотически верные формулы для оценки вероятности переполнения в системе с динамической маршрутизацией, которые позволяют проанализировать зависимость вероятности от параметров маршрутизации.

В случае, когда нагрузка в системе невелика, а именно $\rho < N - K$, вероятность переполнения сильно зависит от количества выбираемых при маршрутизации очередей, т.к. их количество K стоит в показателе экспоненты z_0. Поэтому, увеличивая количество выбираемых при маршрутизации очередей можно существенно уменьшить вероятность переполнения системы.

В случае же когда в систему поступает существенная нагрузка, а именно $\exists n_1 < K : \rho > N - n_1$, вероятность переполнения имеет другой вид зависимости от количества выбираемых при маршрутизации очередей. При увеличении количества выбираемых очередей до некоторого значения n, зависящего от нагрузки в системе

$$n = \min_{n_i \in \{1,\dots,K-1\}} (n_i : \rho > N - n_i)$$

вероятность переполнения убывает по степенному закону, как и в случае $\rho < N - K$. Дальнейшее же увеличение их количества не влияет на показатель экспоненты z_0, а лишь изменяет константу перед ней. Т.е. целесообразно увеличивать количество выбираемых при маршрутизации очередей лишь до некоторого значения n,- это дает существенное уменьшение вероятности переполнения, дальнейшее увеличение на вероятность влияет несущественно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин, Ф.И. Карпелевич, *Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей - асимптотический подход*, Пробл. передачи информ., **32**, No 1, стр. 15-27, 1996.

2. P. Jacquet, N.D. Vvedenskaya, *ON/OFF Sources in an Interconnection Network: Performance Analysis when Packets are Routed to the Shortest Queue of two Randomly Selected Nodes*, Rapport de Recherche No 3570, INRIA, pp 1-35, December 1998.

3. J.B. Martin, Yu. M. Suhov, *Fast Jackson networks*, J. Appl. Prob., **9**, pp 854-870, 1999.

4. S. N. Ethier, T. G. Kurtz, *Markov Processes Characterization and Convergence*, N.Y. etc: John Willey and Stons ,1986.

5. W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger and D. V. Wilson, On the self-similar nature of Ethernet traffic(extended version),*IEEE/ACM Trans. on Networking*, 1994, no.2, pp.1–15.

6. V. Paxon, S. Floyd, Wide area traffic: the failure of Poisson modeling, *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 1993, no.3, pp.226–244.

7. N. G. Duffied and N. O'Connel, Large deviation and overflow probabilities for the general single-server queue with applications,*Math. Proc. Camb. Phil. Soc*, 1995, no.118(1), pp.363–374.

8. A. Botvich and N. G. Duffied, Large deviation, economies of scale and the shape of the loss curve in large multiplexers,*Queueing Systems*, 1995, no.20, pp.293–320.

9. C. Courcoubeties and R. Weber,Buffer overflow asymptotics for a switch handling many traffic soutces,*J. Appl. Prob.*, 1996, vol.33, no.3, pp.886–903.

10. N. Likhanov and R. Mazumdar,Cell loss asymptotics in buffers fed with a large number of independent stationary sources,*J. Appl. Prob.*, 1999, no.36, pp.86–96.

11. A. Simonian and J. Guibert, Large deviations approximation for fluid queues fed by a large number of ON/OFF sources,*IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 1995, vol. 13, no.6, pp.1017–1027.

12. I. Norros, A storage model with self-similar input,*Queueing Systems*, 1994, no.16, pp.387–396.

13. J. Choe and N. B. Shroff, On the supremum distribution of integrated stationary Gaussian processes with negative linear drift,*Advances in Applied Probability*, 1999, no.31, pp.135–157.

14. M. Parulekar and A. M. Makowski, Tail probabilities for $M/G/\infty$ input processes,*Queueing Systems*, 1994, no.27, pp.271–296.

15. N. Likhanov, Bounds on the buffer occupancy with self-similar input traffic,in *Self-similar network traffic and performance evaluation*, K. Park and W. Willinger eds., Wiley, 2000, pp.193–214.

16. Z. Liu,P.Nain, D.Towsley and Z-L. Zhang, Asymptotics behavior of a multiplexer fed by long-range dependent process, *Journal of Applied Probability*, , 1999, no.36, pp.105–118.

17. N. Likhanov and R. Mazumdar,Loss asymptotics in large buffers fed by heterogeneous long-tailed sources, *Advances in Applied Probability*, 2000, no.32, pp.1168–1189.