Информационные процессы, Том 5, № 3, 2005, стр. 227–235

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Вероятность переполнения буфера в системе с большим числом независимых источников.

Н.Б. Лиханов*, Р. Мазумда, М.Н. Накаряков*****

**Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*
***Университет Ватерлоо, Канада*
****Московский физико-технический институт(Государственный университет), Долгопрудный, Россия*
Поступила в редколлегию 8.08.2005

Аннотация—Рассматривается система массового обслуживания с N независимыми стационарными ВКЛ./ВЫКЛ. источниками, с пропускной способностью $O(N)$ и размером буфера $O(N)$ при $N \to \infty$ в случае непрерывного времени. Для этой системы с помощью методов теории больших отклонений и других математических приемов найдена асимптотически верная формула для вероятности переполнения буфера системы.

1. ВВЕДЕНИЕ.

В современных скоростных сетях передачи данных остается актуальной задача обеспечения требуемых параметров качества обслуживания (QoS). Для этого кроме выбора надлежащей пропускной способности необходимо выделить буфер определенного размера. Объем буфера нужно выбирать таким образом, чтобы переполнения происходили приемлемо редко, то есть, чтобы вероятность потери пакета (один из основных параметров качества обслуживания современных систем передачи данных) была достаточно мала. В сетях MPLS этот параметр задается в пределах $10^{-7} - 10^{-9}$.

Существует два основных подхода к изучению явления переполнения буфера. Первый заключается в исследовании асимптотики распределения длины очереди в очень больших или бесконечных буферах, когда конечное число источников используют значительную часть пропускной способности системы (так называемое приближение большого буфера). Этот подход исследован в следующих работах: [1], [2], [3]. Однако такой подход не всегда удачен, так как реальные буферы конечны и их размер задается требованиями к максимальной задержке пакета в сети. Последняя имеет важное значение в сетях передачи данных реального времени. Второй подход состоит в изучении системы с размером буфера порядка пропускной способности, но полагается, что количество источников велико (приближение большого числа источников). Результаты для этой модели имеют важное значение в контексте статистического уплотнения. Случай дискретного времени для таких систем был рассмотрен в работах: [4], [5], непрерывного в [6], [7]. Авторы рассматривали систему с пропускной способностью $O(N)$ и размером буфера $O(N)$ на входе которой N источников, при $N \to \infty$. Параметр N имеет смысл масштаба системы, а общий подход называется масштабированием.

Для модели с дискретным временем в работе [4] получена логарифмическая асимптотика, а в работе [5] выведены асимптотически точные формулы для вероятности переполнения буфера и вероятности потери пакета. Оказалось, что пренебрежение коэффициентом перед экспонентой в формуле для вероятности переполнения буфера при $N \sim 100$ приводит к расхождению значений на два порядка. В случае непрерывного времени в [7] получена верхняя граница при

$N \to \infty$ для вероятности переполнения буфера. Важным свойством всех результатов является то, что переполнение буфера происходит в определенном временном масштабе.

В этой работе мы рассмотрим модель с непрерывным временем в приближении большого числа источников, выведем асимптотически точную формулу для вероятности переполнения буфера и увидим как качественно влияет переход от системы с дискретным временем к ситеме с непрерывным временем на конечный результат.

Работа построена следующим образом: в разделе 2 мы опишем математическую модель и получим вспомогательные результаты, в разделе 3 выведем формулу для вероятности переполнения буфера, в заключении проведем сравнительный анализ результатов для моделей с непрерывным и дискретным временем.

2. МОДЕЛЬ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассмотрим бесконечный буфер с N независимыми, идентичными, стационарными Вкл./Выкл. источниками с мгновенными скоростями $r_i(t) \in \{0,1\},\ i \in \{1,N\},\ t \in (-\infty,\infty)$. Скорость обслуживания постоянна и равна NC. N — масштабирующий параметр системы, определяющий ее размер.

Количество пакетов, пришедших в буфер за интервал времени $[0,t]$ от i-го источника будет равно

$$X_{t,i} = \int\limits_0^t r_i(\alpha)\, d\alpha\,.$$

Общее количество пакетов, пришедших от N источников за временной интервал $[0,t]$, мы обозначим как

$$X_t^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} X_{t,i}\,.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\forall t > 0$ существует функция плотности вероятности случайной величины $X_{t,1}$.

При этом для заданных типов источников $\forall \tau > 0$ существует производящая функция моментов $\varphi_t(\tau) = \mathbb{E}[e^{\tau X_{t,1}}]$ случайной величины $X_{t,1}$.

Перед непосредственным нахождением распределения длины очереди в нашей системе, мы вычислим вероятности переключения определенного источника в условиях большого отклонения $X^{(N)} > Nz$. Представим этот результат в виде леммы.

Но сначала дадим ряд определений:

Определение. Для любого заданного N, κ есть множество чисел:

$$\kappa = \{j_1,\ldots,j_n\}, j_1,\ldots,j_n - \text{различны}, j_i \in \{1,\ldots,N\}, n = |\kappa|\,.$$

Определение. Для любых N и t, D_κ есть событие:

$$D_\kappa = \{X_{\alpha,i_j} = X^*_{\alpha,i_j}, \forall\alpha \in [0,t], \forall i_j \in \kappa\},$$

где X^*_{α,i_j} некоторые неслучайные функции α.

Определение. Случайная величина $\delta_{t,i}$, определяемая как:

$$\delta_{t,i} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lim\limits_{\alpha \to t-0} \lambda_{\alpha,i} = 0 \quad \text{и} \quad \lim\limits_{\alpha \to t+0} \lambda_{\alpha,i} = 1 \\ -1, & \text{если } \lim\limits_{\alpha \to t-0} \lambda_{\alpha,i} = 1 \quad \text{и} \quad \lim\limits_{\alpha \to t+0} \lambda_{\alpha,i} = 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

называется индикатором переключения источника i в момент времени t.

Далее будем предполагать, что существует предел

$$\rho(\delta_{t_1,i} = j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{P}r\{\exists t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] : \delta_{t,i} = j\}}{\varepsilon}.$$

Лемма. *При $N \to \infty$, для любых $\kappa : |\kappa| = O(\sqrt{N}),\ i \notin \kappa,\ j \in \{-1, 1\}$, и для любых заданных $t > 0,\ t_1 > 0,\ z > \mathbb{E}X_{t,1},\ D_\kappa \neq \emptyset$, выполняется*

$$\begin{gathered} \rho\left(\delta_{t_1,i} = j \mid X_t^{(N)} > Nz, D_\kappa\right) \\ = \rho(\delta_{t_1,i} = j) \frac{\int_0^t e^{\tau x} \rho(X_{t,1} = x \mid \delta_{t_1,i} = j)\, dx}{\int_0^t e^{\tau x} \rho(X_{t,1} = x)\, dx} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где τ — единственное решение уравнения:

$$\frac{\varphi_t'(\tau)}{\varphi_t(\tau)} = z.$$

Лемма дает простой способ подсчета вероятности переключения заданного источника при условии, что общее количество пакетов, пришедших в буфер за интервал времени $[0, t]$, превышает уровень Nz. Лемма также утверждает, что эта вероятность переключения не зависит от D_κ — поведения любых $O(\sqrt{N})$ источников на интервале времени $[0, t]$.

Заметим, что $t,\ t_1$ и z — некоторые константы, независящие от N, а множество κ и событие D_κ могут быть выбраны произвольными и различными для каждого значения N. Требуется только, чтобы $|\kappa| = O(\sqrt{N})$.

Доказательство. Определим неслучайную величину

$$m_\kappa = \sum_{k \in \kappa} X_{t,k}^*.$$

Заметим, что для событий $\{X_t^{(N)} > Nz\}$ и $\{D_\kappa\}$ выполняется:

$$\left\{X_t^{(N)} > Nz, D_\kappa\right\} = \left\{X_t^{(N)\kappa} > Nz - m_\kappa, D_\kappa\right\}, \tag{2.2}$$

где

$$X_t^{(N)\kappa} = \sum_{k=1,\ k \notin \kappa}^{N} X_{t,k}.$$

Из того, что источники независимы и справедливо (2.2) следует, что

$$\begin{gathered} \rho\left(\delta_{t_1,i} = j \mid X_t^{(N)} > Nz,\ D_\kappa\right) \\ = \frac{\rho\left(\delta_{t_1,i} = j,\ X_t^{(N)\kappa} > Nz - m_\kappa \mid D_\kappa\right)}{\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\kappa} > Nz - m_\kappa \mid D_\kappa\right\}} = \frac{\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\kappa} > Nz - m_\kappa \mid \delta_{t_1,i} = j\right\}}{\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\kappa} > Nz - m_\kappa\right\}} \rho(\delta_{t_1,i} = j). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Вероятности из последней формулы соответственно удовлетворяют равенствам

$$\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\kappa} > Nz - m_\kappa\right\} = \int\limits_0^t \mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\bar\kappa} > Nz - m_\kappa - y\right\}\rho(X_{t,i} = y)\,dy. \qquad (2.4)$$

$$\begin{gathered}\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\kappa} > Nz - m_\kappa \mid \delta_{t_1,i} = j\right\} \\ = \int\limits_0^t \mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\bar\kappa} > Nz - m_\kappa - y\right\}\rho(X_{t,i} = y \mid \delta_{t_1,i} = j)\,dy,\end{gathered} \qquad (2.5)$$

где $X_t^{(N)\bar\kappa} = X_t^{(N)\kappa} - X_{t,i}$.

Таким образом необходимо выяснить зависимость вероятности $\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\bar\kappa} > Nz - m_\kappa - y\right\}$ от y, но мы предварительно получим выражение для $\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)} > Nz - y\right\}$ и покажем, что при $N \to \infty$ интересующие нас зависимости совпадают с точностью до $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

Воспользуемся результатами теории больших отклонений. Обозначим через $\widetilde{X}_{t,k}$ случайные величины с $\mathbb{E}\left(\widetilde{X}_{t,k}\right) = z$ и связанные с $X_{t,k}$ следующим сдвигом

$$\rho\left(\widetilde{X}_{t,k} = x\right) = \rho(X_{t,k} = x)\frac{e^{\tau x}}{\varphi_t(\tau)}.$$

где τ — единственное решение уравнения $\varphi_t'(\tau)/\varphi_t(\tau) = z$.
Легко показать, что для $\widetilde{X}_t^{(N)} = \sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{X}_{t,k}$ справедливо следующее равенство

$$\rho\left(\widetilde{X}_t^{(N)} = x\right) = \frac{e^{\tau x}}{\varphi_t^N(\tau)}\,\rho(X_t^{(N)} = x).$$

И $\forall u > 0$ выполняется

$$\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)} > u\right\} = \varphi_t^N(\tau)\int\limits_u^\infty e^{-\tau x}\rho\left(\widetilde{X}_t^{(N)} = x\right)\,dx. \qquad (2.6)$$

Сформулируем здесь следующую потребующуюся нам предельную теорему (см. [8] стр. 254).

Теорема. *Пусть* $\{Y_n\}$ *— последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с* $\mathbb{E}(Y_1) = 0$*, дисперсией* σ^2 *и конечным абсолютным моментом* $\mathbb{E}|Y_1|^k$ *порядка* $k \geqslant 3$*. Пусть случайная величина* $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ *при некотором* $n = M$ *имеет ограниченную плотность распределения* $\rho_M(x)$*, тогда*

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{x^2/2} + \sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{q_\nu(x)}{n^{\nu/2}} + o\left(\frac{1}{n^{(k-2)/2}}\right) \qquad (2.7)$$

равномерно по x.

Применив эту теорему к последовательности $\left\{\widetilde{X}_{t,k} - \mathbb{E}\widetilde{X}_{t,k}\right\}$ для $k = 3$ и $n = N$ и подставив результат в формулу (2.7) для $u = Nz - y$ мы получим следующий результат:

$$\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)} > Nz - y\right\} = Be^{\tau y}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \qquad (2.8)$$

где B не зависит от y.

Теперь покажем независимость конечного результата от поведения $O(\sqrt{N})$ источников:

$$\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\bar{\kappa}} > Nz - m_\kappa - y\right\} = \mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\bar{\kappa}} > N_{\bar{\kappa}} z_1 - y\right\} = Be^{\tau_1 y}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \qquad (2.9)$$

где $z_1 = (Nz - m_\kappa)/N_{\bar{\kappa}} = z(1 + O(1/\sqrt{N}))$, а τ_1 — единственное решение $\varphi_t'(\tau)/\varphi_t(\tau) = z_1$.

Легко показать, что $\tau_1 = \tau(1 + O(1/\sqrt{N}))$ и, таким образом,

$$\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)\bar{\kappa}} > Nz - m_\kappa - y\right\} = Be^{\tau y}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right). \qquad (2.10)$$

Подставив (2.10) в (2.4) и (2.5), из (2.3) окончательно получаем формулу (2.1).

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕПОЛНЕНИЯ БУФЕРА.

Обозначим через $W_t^{(N)}$ количество пакетов, находящихся в буфере в момент времени t. Загрузка буфера в момент времени $t = 0$ определяется равенством

$$W_0^{(N)} = \sup_{t>0}\left(X_{-t}^{(N)} - NCt\right), \qquad (3.1)$$

где $X_{-t}^{(N)}$ — количество пакетов, пришедших в буфер за интервал времени $[-t, 0]$. Нас будет интересовать вероятность того, что содержимое буфера превысит некоторое значение Nu. В силу (3.1) это эквивалентно вероятности того, что процесс $X_t^{(N)}$ превысит уровень $(Ct + u)N$ (NC — постоянная скорость обслуживания) хотя бы в некоторый момент времени t.

Для анализа поведения процесса $X_t^{(N)}$ при больших значениях N мы введем функцию

$$I_t = \tau_t(Ct + u) - \ln\varphi_t(\tau_t),$$

где τ_t — единственное решение уравнения $\varphi_t'(\tau)/\varphi_t(\tau) = Ct + u$. В дальнейшем мы как и в [5] будем предполагать, что существует и единственно

$$t_0 = \arg\min I_t,\ t_0 < \infty.$$

Из теории больших отклонений и из того, что t_0 единственно следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}r\left\{X_t^{(N)} > (Ct + u)N\right\}}{\mathbb{P}r\left\{X_{t_0}^{(N)} > (Ct_0 + u)N\right\}} = 0,\ \text{для } \forall t \neq t_0,$$

то есть вероятность превышения процессом $X_t^{(N)}$ уровня $(Ct+u)N$ сконцентрирована в точке t_0. Используя результаты из [5] можно получить асимптотическую оценку для $\mathbb{P}r\left\{X_{t_0}^{(N)} > (Ct_0 + u)N\right\}$ при $N \to \infty$. Но это не даст нам правильного ответа, так как

$$\mathbb{P}r\left\{W^{(N)} > Nu\right\} = \mathbb{P}r\left\{\sup_t\left(X_{-t}^{(N)} - NCt\right) > Nu\right\} = \mathbb{P}r\left\{\exists t > 0 : X_t^{(N)} > (Ct + u)N\right\},$$

и, в отличие от дискретного времени,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{P}r\left\{\exists t>0 : X_t^{(N)} > (Ct+u)N\right\}}{\mathbb{P}r\left\{X_{t_0}^{(N)} > (Ct_0+u)N\right\}} \neq 1.$$

Но, между тем, справедливо следующее равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{P}r\left\{\exists t>0 : X_t^{(N)} > (Ct+u)N\right\}}{\mathbb{P}r\left\{\exists t,\ |t-t_0|<\varepsilon : X_t^{(N)} > (Ct+u)N\right\}} = 1, \text{ для } \forall\varepsilon>0.$$

Поэтому нам следует более детально рассмотреть процесс $X_t^{(N)}$ в точке t_0. Другими словами, нам нужно изменить временной масштаб в точке t_0 таким образом, чтобы траектория процесса $X_t^{(N)}$ (часть, которая превышает уровень $(Ct+u)N$) имела форму, отличающуюся от δ-функции или от константы. Для этого, мы введем случайный процесс

$$\xi_\chi^{(N)} = X^{(N)}_{\frac{\chi}{\sqrt{N}}+t_0} - \left(C\left(\frac{\chi}{\sqrt{N}}+t_0\right)+u\right)N,$$

где $\chi=\sqrt{N}(t-t_0)$. Процесс $\xi_\chi^{(N)}$ можно рассматривать как масштабирование процесса $X_t^{(N)}$ в точке t_0 в $\sqrt{N}$ раз по оси времени.

Для каждой реализации $\xi_\chi^{(N)}$ мы можем определить $\chi_0^{(N)}$ и $C_0^{(N)}$ как

$$\chi_0^{(N)} = \arg\max_\chi \xi_\chi^{(N)} \qquad \text{и} \qquad C_0^{(N)} = \xi_{\chi_0}^{(N)}.$$

$\chi_0^{(N)}$ и $C_0^{(N)}$ могут быть рассмотрены как некоторые случайные величины, и функция плотности вероятности $\rho_{C_0^{(N)}}(y)$ даст нам простой способ подсчета вероятности $\mathbb{P}r\left\{W^{(N)}>Nu\right\}$. Действительно

$$\mathbb{P}r\left\{W^{(N)}>Nu\right\} = \int\limits_0^{+\infty} \rho_{C_0^{(N)}}(y)\,dy = \mathbb{P}r\left\{C_0^{(N)}>0\right\}. \tag{3.2}$$

Для того чтобы найти распределение $\chi_0^{(N)}$ мы исследуем характерную траекторию процесса $\xi_\chi^{(N)}$ при условии, что $C_0^{(N)}>0$.

Пусть $q^{on}_{\Delta\chi}$ - количество включившихся источников на интервале $\Delta\chi$,

и $q^{off}_{\Delta\chi}$ - количество выключившихся источников на интервале $\Delta\chi$,

тогда, используя результаты леммы, можно показать, что в масштабе времени χ для любого фиксированого $\Delta\chi$ и $\forall k>2$ при $N\to\infty$ выполняется:

$$\mathbb{P}r\left\{\left|q^{on}_{\Delta\chi} - \sqrt{N}a^{on}\Delta\chi\right| > k\sqrt{\sqrt{N}a^{on}\Delta\chi(1-a^{on}\Delta\chi)}\right\} < e^{-k^2/2},$$

$$\mathbb{P}r\left\{\left|q^{off}_{\Delta\chi} - \sqrt{N}a^{off}\Delta\chi\right| > k\sqrt{\sqrt{N}a^{off}\Delta\chi(1-a^{off}\Delta\chi)}\right\} < e^{-k^2/2},$$

где $a^{on} = \rho\left(\delta_{t_0,1} = 1 \mid X_{t_0}^{(N)} > N(Ct_0 + u)\right)$ и $a^{off} = \rho\left(\delta_{t_0,1} = -1 \mid X_{t_0}^{(N)} > N(Ct_0 + u)\right)$. Отсюда следует, что $\forall\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}r\left\{\forall\chi \in (\chi_0 - B, \chi_0 + B) : \left|\xi_\chi^{(N)} - \left(C_0^{(N)} - \frac{a}{2}\left(\chi - \chi_0^{(N)}\right)^2\right)\right| < \varepsilon \left| C_0^{(N)} > 0\right.\right\} \\ = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{N}}\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

где константа $a = a^{off} - a^{on}$, B - константа.

Используя теорему Бахадура-Рао, можно получить, что при $N \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > y\right\} d\chi = Ae^{-\tau_{t_0} y}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \tag{3.4}$$

где A - некоторый коэффициент, не зависящий от y.

С другой стороны, по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > y\right\} d\chi = \int_0^{\infty} \rho_{C_0^{(N)}}(y_1)dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > y \mid \chi_0^{(N)} = x, C_0^{(N)} = y_1\right\} d\chi \\ = \mathbb{P}r\left\{C_0^{(N)} > 0\right\} \int_0^{\infty} \rho_{C_0^{(N)}}(y_1 \mid C_0^{(N)} > 0)dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > y \mid \chi_0^{(N)} = x, C_0^{(N)} = y_1\right\} d\chi,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где в силу (3.3) $\forall\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$ с вероятностью $1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{N}}\right)$

$$2\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{y_1 - y - \varepsilon} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > y \mid \chi_0^{(N)} = x, C_0^{(N)} = y_1\right\} d\chi \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{y_1 - y + \varepsilon}.$$

Из (3.4) и (3.5) $\forall\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$ мы получаем интегральное неравенство для $\rho_{C_0^{(N)}}(y)$:

$$2\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^{\infty} \rho_{C_0^{(N)}}(y_1 + y)\sqrt{y_1 - \varepsilon}\, dy_1 \leqslant Ae^{-\tau_{t_0} y}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right) \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^{\infty} \rho_{C_0^{(N)}}(y_1 + y)\sqrt{y_1 + \varepsilon}\, dy_1.$$

Единственным решением этого неравенства является

$$\rho_{C_0^{(N)}}(y) = Be^{-\tau_{t_0} y}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right),$$

где B не зависит от y.

Следовательно

$$\rho_{C_0^{(N)}}(y \mid C_0^{(N)} > 0) = \tau_{t0} e^{-\tau_{t_0} y}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{N}}\right)\right). \tag{3.6}$$

Далее, применив еще раз теорему Бахадура-Рао к $\xi_\chi^{(N)}$, мы можем получить другое уравнение для $\mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > 0\right\}$:

$$\mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > 0\right\} = \frac{1}{\tau_t\sqrt{2\pi\sigma_t^2 N}}\, e^{-NI_t}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \tag{3.7}$$

где $t = \chi/\sqrt{N} + t_0, \sigma^2 = \varphi_t''(\tau_t)/\varphi_t'(\tau_t) - (Ct+u)^2$.

Так как $t_0 = \arg\min I_t$ и, следовательно, $I_{t_0}' = 0$, то для $\chi \sim O(1)$

$$I_t = I_{t_0} + \frac{I_{t_0}''}{2}\frac{\chi^2}{N} + O\left(N^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$\tau_t = \tau_{t_0} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \sigma_t^2 = \sigma_{t_0}^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

и тогда (3.7) преобразуется в

$$\mathbb{P}r\left\{\xi_\chi^{(N)} > 0\right\} = \frac{1}{\tau_{t_0}\sqrt{2\pi\sigma_{t_0}^2 N}}\, e^{-\frac{\chi^2 I_{t_0}''}{2}} e^{-NI_{t_0}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right). \tag{3.8}$$

Окончательно, подставив (3.6) и (3.8) в (3.5) для $y = 0$ мы получим выражение для $\mathbb{P}r\left\{W^{(N)} > Nu\right\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}r\left\{W^{(N)} > Nu\right\} &= \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau_{t_0}\sqrt{2\pi\sigma_{t_0}^2 N}}\, e^{-\frac{\chi^2 I_{t_0}''}{2}} e^{-NI_{t_0}} d\chi}{\int\limits_0^{\infty} \sqrt{\frac{8\tau_{t_0}^2}{a}} \sqrt{y_1} e^{-\tau_{t_0} y_1} dy_1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{N}}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{a}{2\pi\tau_{t_0} I_{t_0}'' N \sigma_{t_0}^2}}\, e^{-NI_{t_0}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{N}}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\tau_{t_0} a}{I_{t_0}''}}\, \mathbb{P}r\left\{X_{t_0}^{(N)} > N(Ct_0 + u)\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{N}}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Итак, мы получили асимптотически точную формулу для вероятности превышения длиной очереди уровня Nu в случае непрерывного времени. Заметим, что значение отличается от результата для модели с дискретным временем на коэффициент $\sqrt{\frac{\tau_{t_0} a}{I_{t_0}''}}$, зависящий только от параметров источников.

В случае дискретного времени, при $N \to \infty$, в [5], было показано, что переполнение происходит в единственной точке, то есть, если в точке t_0 $W^{(N)} > Nu$, то в точках $\forall t_i \neq t_0$ $W^{(N)} < Nu$. В случае непрерывного времени будет существовать некоторая окрестность точки t_0, в которой процесс превышает уровень Nu. В данной работе мы более детально исследовали поведение процесса образования очереди, выяснив его характерную траекторию, при условии большого отклонения. Расчет модели с непрерывным временем оказался гораздо сложнее, но, так как эта модель подробнее описывает поведение реальной очереди, мы получили более точную асимтоту. Формула (3.9) для вероятноти переполнения буфера может быть использована как для оценки, так и для получения асимптоты вероятности потери пакета. Так же по ней можно оценить плотность вероятности задержки пакета в системе. Результаты расчетов играют важную роль для понимания процессов протекающих в узлах коммутации, и могут быть использованы для управления потоками данных в сетях передачи пакетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffield N.G., O'Connell N., Large Deviations and Overflow Probabilities for the General Single-server Queue with Applications. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1995, no.118, pp. 367-374.

2. Boxma O.J., Dumas V., Fluid queues with long-tailed activity period distribution, *Computer Communications*, 1998, vol. 21, pp. 1509-1529.

3. Likhanov N. Mazumdar R., Loss Asymptotics in Large Buffers Fed by Heterogeneous Long-tailed Sources. *Journal of Applied Probability*, 2000, vol.32, pp. 1168-1189.

4. Courcoubetis C., Weber R., Buffer Overflow Asymptotics for a Switch Handling Many Traffic Sources. *Journal of Applied Probability*, 1996, vol. 33, no. 3 pp. 886-903.

5. Likhanov N., Mazumdar R., Cell Loss Asymptotics for Buffers Fed With a Large Number of Independent Stationary Souces. *Journal of Applied Probability*, 1999, vol. 36, pp. 86-96.

6. Botvich A., Duffield N.G., Large Deviations, Economies of Scale and the Shape of the Loss Curve in Large Multiplexers. *Queueing Systems*, 1995, vol. 20, pp. 293-320.

7. Simonian A., Guibert J., Large Deviation Approximation for a Fluid Queues Fed by a Large Number of ON/OFF Sources. *IEEE J.Sel.Areas Commun.*, 1995, vol. 13, no. 6, pp. 1017-1027.

8. Петров В.В. *Суммы независимых случайных величин.* М.: Наука, 1972.