Информационные процессы, Том 5, № 4, 2005, стр. 271–282.

Штурмовы последовательности, генерируемые сохраняющими ориентацию отображениями окружности

В. С. Козякин[1]

Институт проблем передачи информации РАН
Поступила в редколлегию 24.08.2005

Аннотация—Известно, что гомеоморфизмы окружности обладают множеством нетривиальных и сильных свойств. В то же время требование непрерывности отображения окружности в ряде приложений может оказаться ограничительным. В связи с этим актуальность приобретает вопрос о выделении такого класса отображений окружности, который с одной стороны был бы достаточно широким и содержал бы не только непрерывные отображения, а с другой — унаследовал бы как можно большее число принципиальных свойств гомеоморфизмов окружности. Ясно, что отказ от требования непрерывности отображения окружности неизбежно приводит к потере ряда свойств, присущих гомеоморфизмам окружности. Тем не менее, как оказывается, разрывные отображения окружности, сохраняющие ориентацию, обладают многими «символическими» свойствами, присущими гомеоморфизмам окружности.

УДК: 511.216, 517.938.5

MSC 2000: 11B83, 37B10, 37E05, 37E10, 37E45, 68R15

Ключевые слова: Штурмовы последовательности, разрывные отображения, сохраняющие ориентацию отображения, отображения окружности

1. ВВЕДЕНИЕ

Сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы окружности обладают множеством интересных и нетривиальных свойств [2, 5] и играют важную роль в различных областях математики. Наиболее известным и важным является свойство *числа вращения* гомеоморфизма f быть иррациональным в том и только том случае, когда f имеет периодические точки [2, 5]. Другое, возможно менее известное свойство связано с так называемыми *штурмовыми символическими последовательностями* (см. [11] и препринт подготавливаемой к печати книги [13]), связанными с траекториями

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Такие символические последовательности оказываются полезными при анализе свойств различных систем (см., например, [1, 3, 4, 6, 8, 12]).

В различных приложениях (см., например, [1, гл. VIII] или [6]) требование непрерывности отображения окружности может быть ограничительным. В связи с этим желательно выделить такие классы отображений окружности, которые сохраняли бы как можно большее количество «хороших и нетривиальных» свойств гомеоморфизмов окружности, будучи в то же время достаточно широкими и содержащими не только непрерывные отображения. Один такой класс отображений

[1] Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 03-01-00258, а также грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ № 1532.2003.1. Английский вариант настоящей работы [9] был написан во время визита автора в марте–мае 2003г. в Исследовательский центр по информатике им. Буля и факультет прикладной математики университета г. Корк, Ирландия (Boole Centre for Research in Informatics and Department of Applied Mathematics, University College Cork).

рассматривается ниже — это класс сохраняющих ориентацию отображений окружности, которые, вообще говоря, не предполагаются непрерывными.

Естественно, если не требовать от отображения окружности такого сильного свойства как непрерывность, то это неизбежно приведет к потере отображением ряда сильных свойств, присущих гомеоморфизмам окружности. Тем не менее, как показывается ниже траектории разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию, так же как и траектории гомеоморфизмов окружности, в некотором естественном смысле могут быть описаны штурмовыми символическими последовательностями.

Структура работы следующая. В разделе 2 приводятся основные определения и свойства штурмовых последовательностей. В разделе 3 обсуждаются основные свойства отображений окружности; основное внимание при этом уделяется вопросу о том, что произойдет при отказе от требования непрерывности отображения и чем такие отображения можно заменить. В качестве такой замены предлагаются в общем случае разрывные отображения окружности, сохраняющие ориентацию, и их поднятия — неубывающие отображения прямой степени один. В разделе 4 показывается, что штурмовы последовательности естественным образом возникают при символическом описании траекторий сохраняющих ориентацию отображений окружности и их поднятий. В этом разделе анализируются также свойства локально возрастающего релаксационного отображения интервала $[0, 1)$ в себя, связанные с «штурмовым кодированием» его траекторий. Релаксационными отображениями описываются различные явления в приложениях. В разделе 5 обсуждаются альтернативные возможности исследования символических свойств разрывных отображений окружности.

2. ШТУРМОВЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Двоичная символическая последовательность[1] $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0\sigma_1\ldots$ называется *штурмовой*, если при каждом $n = 1, 2, \ldots$ число $p_{\boldsymbol{\sigma}}(n)$ различных слов длины n в этой последовательности равно $n + 1$. Функция $p_{\boldsymbol{\sigma}}(n)$ называется *функцией сложности* последовательности $\boldsymbol{\sigma}$.

Штурмовы последовательности играют важную роль при описании различных явлений. Известны различные эквивалентные определения штурмовых последовательностей (см., например, [11, 13]), некоторые из которых приводятся ниже, поскольку они подчеркивают различные и часто неочевидные свойства штурмовых последовательностей.

Вырезающая последовательность (cutting sequence). Рассмотрим целочисленную решетку на плоскости и прямую линию с иррациональным углом наклона (см. рис. 1) и построим последовательность $\boldsymbol{\sigma}$, выписывая 0 или 1 каждый раз, когда прямая пересекает вертикальную или горизонтальную линию решетки, соответственно. В случае, когда прямая пересекает узел решетки, мы будет выписывать 0 или 1 по нашему выбору. Полученная последовательность называется *вырезающей (cutting)* последовательностью. Например, для прямой линии и решетки, изображенным на рис. 1 соответствующая вырезающая последовательность имеет вид: $\boldsymbol{\sigma} = 0010010100100\ldots$. Известно, что *последовательность $\boldsymbol{\sigma}$ является вырезающей в том и только том случае, когда она штурмова.*

Последовательность вращения (rotation sequence). Последовательность $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0\sigma_1\ldots$ называется *последовательностью вращения*, если существует иррациональное число $\alpha \in [0, 1]$ и вещественное число x такие, что

$$\sigma_n = [(n + 1)\alpha + x] - [n\alpha + x], \tag{2}$$

где $[t]$ обозначает *целую часть* вещественного числа t, т.е. наибольшее целое, не превосходящее t.

Последовательности вращения встречаются в ряде естественных ситуаций (см., например, [1, 3, 4, 12]). Одна из них связана с кодированием траекторий отображения вращения окружности:

$$S : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \qquad x \mapsto \{x + \alpha\},$$

[1] Последовательность называется *двоичной*, если она состоит из нулей и единиц.

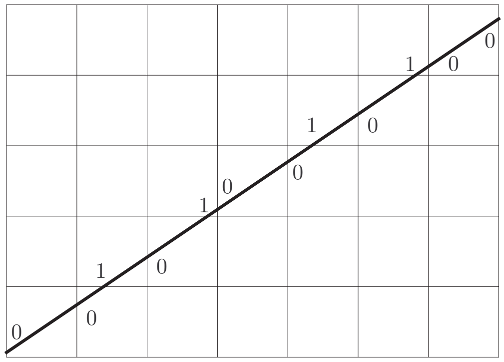

Рис. 1. Вырезающая последовательность

где $\{t\} := t - [t] \equiv t \mod 1$ обозначает *дробную часть* t; очевидно $\{t\} \in [0, 1)$ для любого t.

Разобьем $\mathbb{S}^1$ на два непересекающихся интервала $I_0 = [0, 1 - \alpha)$ и $I_1 = [1 - \alpha, 1)$, и обозначим через ν *кодирующую функцию*, определяемую соотношениями:

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in I_0, \\ 1, & \text{если } x \in I_1. \end{cases} \tag{3}$$

В этом случае последовательность вращения $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0\sigma_1 \ldots$, определяемая числами α и x, в точности совпадает с последовательностью $\sigma_n = \nu(S^n(x))$ (см. рис. 2). Известно, что *последовательность* $\boldsymbol{\sigma}$ *является последовательностью вращения в том и только том случае, когда она штурмова.*

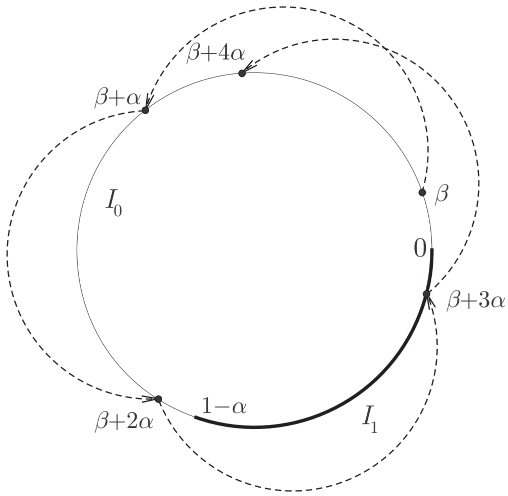

Рис. 2. Последовательность вращения

Сбалансированная последовательность (balanced sequence). Рассмотрим произвольную последовательность $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0\sigma_1 \ldots$ с элементами $\sigma_n = 0, 1$, и обозначим через $|\boldsymbol{w}|_0$ или $|\boldsymbol{w}|_1$ количество нулей или единиц соответственно в слове $\boldsymbol{w}$ последовательности $\boldsymbol{\sigma}$. Тогда последовательность $\boldsymbol{\sigma}$ называется *сбалансированной*, если для любых двух ее слов одинаковой длины $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$ справедливы соотношения:

$$\big||\boldsymbol{w}|_0 - |\boldsymbol{v}|_0\big| \le 1 \quad \text{или, что то же самое,} \quad \big||\boldsymbol{w}|_1 - |\boldsymbol{v}|_1\big| \le 1.$$

Известно, что *последовательность* $\boldsymbol{\sigma}$ *является сбалансированной в том и только том случае, когда она штурмова.*

Несмотря на простоту определения структура штурмовых последовательностей оказывается сложной. Упомянем некоторые основные свойства таких последовательностей (см., например, [11, 13]):

– *каждая штурмова последовательность* $\boldsymbol{\sigma}$ *предельно непериодична (т.е. каждый ее «хвост»* $\sigma_k\sigma_{k+1}\ldots$ *непериодичен);*
– *частота встречи единиц в штурмовой последовательности* $\boldsymbol{\sigma}$*, определяемая соотношением*

$$\tau(\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}|_1}{n}$$

определяется этим соотношением корректно и является иррациональной;
– *штурмова последовательность* рекуррентна*, т.е. каждое слово* $\boldsymbol{w}$*, которое встречается в последовательности хотя бы один раз, встречается в ней бесконечное число раз с корректно определенной частотой* $\tau(\boldsymbol{w})$.

Некоторые другие свойства штурмовых последовательностей могу быть найдены в [1, 3, 4, 11, 12, 13].

Замечание 1. Понятия штурмовой и вырезающей последовательностей, а также последовательности вращения в том виде, как они определены выше, относятся только к предельно непериодическим последовательностям. В то же время иногда полезно рассмотреть более широкие классы последовательностей со свойствами, близкими к свойствам штурмовых последовательностей, за исключением требования предельной непериодичности.

Например, в определении штурмовой последовательности можно рассмотреть последовательности, функция сложности удовлетворяет соотношению $p_{\boldsymbol{\sigma}}(n) \le n{+}1$ вместо соотношения $p_{\boldsymbol{\sigma}}(n) \equiv n{+}1$. В определении вырезающей последовательности можно рассмотреть все последовательности, порождаемые прямыми линиями с произвольным углом наклона (а не только иррациональным)[2]. В определении последовательности вращения также можно рассмотреть все последовательности, порождаемые отображениями вращения окружности с произвольным углом вращения α (а не только иррациональным).

3. СОХРАНЯЮЩИЕ ОРИЕНТАЦИЮ ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ИХ ПОДНЯТИЯ

Обозначим через $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ окружность, которую удобно трактовать как интервал $[0, 1)$ с топологически отождествленными точками 0 и 1.

Говорят, что попарно различные точки x, y, z окружности $\mathbb{S}^1 = [0, 1)$ имеют *естественный (прямой) циклический порядок*, если $(x - y)(y - z)(x - z) > 0$ и имеют *обратный циклический порядок*, если $(x - y)(y - z)(x - z) < 0$ (см. подробное обсуждение понятия циклического порядка в [7]). Будем говорить, что отображение окружности $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *сохраняет порядок (ориентацию)*, если циклический порядок точек $f(x), f(y), f(z)$ совпадает с циклическим порядком точек x, y, z, т.е.

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \cdot \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \cdot \frac{f(y) - f(z)}{y - z} > 0, \tag{4}$$

всякий раз, когда точки $x, y, z \in [0, 1)$ попарно различны. Следующая лемма дает геометрическое описание отображений окружности, сохраняющих ориентацию.

[2] Конечно, чтобы в этом случае понятие вырезающей последовательности было определено корректно, необходимо указать, как определять элементы последовательности в тех случаях, когда прямая пересекает узлы решетки. В этих случаях необходимо систематически выписывать либо нули, либо единицы — важно лишь каждый раз выписывать одно и то же.

Лемма 1. *Отображение окружности $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ сохраняет ориентацию, если и только если найдутся такие подынтервалы $I_+(f), I_-(f) \subseteq [0, 1)$ (один из которых может быть пустым), что (см. рис. 3)*

(i) $0 \in I_+(f)$, $I_+(f) \cap I_-(f) = \emptyset$, $I_+(f) \cup I_-(f) = [0, 1)$;

(ii) $f(x)$ взаимно однозначное возрастающее отображение на каждом из интервалов $I_+(f)$ и $I_-(f)$;

(iii) $f(x) > f(y)$ для любых $x \in I_+(f)$, $y \in I_-(f)$.

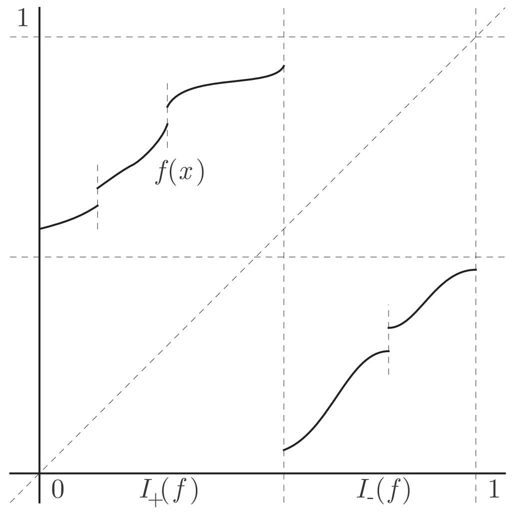

Рис. 3. Сохраняющее ориентацию отображение окружности

Доказательство. Заметим сначала, что в силу (4) отображение f взаимно однозначно со своим образом. Определим множества $I_+(f)$ и $I_-(f)$, полагая

$$I_+(f) := \{x \in [0, 1) : \ f(x) \geq f(0)\}, \quad I_-(f) := \{x \in [0, 1) : \ f(x) < f(0)\}.$$

Тогда, выбрав $z = 0$ в (4), получим

$$f(x) < f(y), \quad \text{если} \quad x < y \quad \text{и} \quad x, y \in I_+(f) \quad \text{или} \quad x, y \in I_-(f). \tag{5}$$

Покажем теперь, что множества $I_+(f)$, $I_-(f)$ являются интервалами. Как легко видеть, $I_+(f) \cup I_-(f) = [0, 1)$ и $0 \in I_+(f)$, и потому достаточно показать лишь, что множество $I_+(f)$ является интервалом. Предполагая противное, можно указать $x, y, z \in [0, 1)$, такие, что $x < y < z$ и в то же время $x, z \in I_+(f)$, $y \in I_-(f)$. Тогда $(x - y)(y - z)(x - z) < 0$, в то время как из (5) вытекают соотношения

$$f(x) - f(y) > 0, \quad f(x) - f(z) < 0, \quad f(y) - f(z) < 0,$$

противоречащие (4). Таким образом, оба множества $I_+(f)$, $I_-(f)$ являются интервалами, и свойства (i)–(iii) доказаны.

Наконец, любое отображение $\mathbb{S}^1$ в себя, удовлетворяющее условиям (i)–(iii), очевидно сохраняет ориентацию. Лемма доказана. □

Удобным и общепринятым инструментом исследования свойств отображений окружности являются так называемые поднятия отображений. Отображение $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *поднятием* отображения окружности $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, если $f = \{F\}$. Как легко видеть, для каждого поднятия отображения окружности разность $F(x+1) - F(x)$ является целым числом. Если поднятие отображения окружности непрерывно, то $F(x+1) - F(x) \equiv k$ с некоторым целым k; в этом случае число k называется *степенью* отображения F и обозначается $\deg(f)$ (см., например, [2]). Ясно, что поднятия сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности имеют степень 1. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться, в основном, поднятиями отображений окружности степени 1.

Заметим, что поднятие отображения окружности определено не единственным образом, и потому, для того чтобы сделать это понятие работоспособным, необходимо наложить дополнительные требования на F. Например, при рассмотрении поднятий гомеоморфизмов окружности обычно требуют непрерывности отображения F. При рассмотрении в общем случае разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию, будем интересоваться только их строго монотонными (возрастающими) поднятиями $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ степени 1, т.е. поднятиями, удовлетворяющими соотношениям

$$F(x+1) \equiv F(x) + 1, \qquad F(x) < F(y) \quad \text{при} \quad x < y. \tag{6}$$

Очевидно, если отображение F степени 1 строго монотонно, то его ограничение $f(x) = \{F(x)\}$ на окружность $\mathbb{S}^1$ является сохраняющим ориентацию взаимно однозначным со своим образом $f(\mathbb{S}^1)$ отображением окружности. Стоит отметить также, что условие (6) влечет выполнение условия

$$0 < F(y) - F(x) < 1 \quad \text{при} \quad 0 < y - x < 1. \tag{7}$$

Лемма 2. *Для любого сохраняющего ориентацию отображения окружности f существует строго монотонное поднятие степени* 1. *При этом любые два строго монотонных поднятия отображения f отличаются друг от друга на целочисленную константу.*

Доказательство. Пусть $I_+(f)$ и $I_-(f)$ — интервалы, существование которых утверждается в лемме 1. Определим функцию $F(x)$ для $x \in [0, 1)$ следующим образом:

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in I_+(f), \\ f(x) + 1, & \text{если} \quad x \in I_-(f). \end{cases}$$

и распространим ее на множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ с сохранением свойства «быть отображением степени 1». Ясно, что определенная таким образом функция F будет монотонной степени 1.

Теперь заметим, что для любой строго монотонной степени 1 функции F функция $f(x) = F(x) \mod 1 \equiv \{F(x)\}$, $x \in [0, 1)$ имеет вид, изображенный на рис. 3. Тогда по лемме 1 $f(x)$ является сохраняющим ориентацию отображением окружности.

Наконец, пусть $F(x)$ и $G(x)$ — поднятия одного и того же отображения окружности $f(x)$, сохраняющего ориентацию, т.е.

$$\{F(x)\} = \{G(x)\} = f(x).$$

Тогда $F(x)$ и $G(x)$ могут быть представлены в виде

$$F(x) = m(x) + \{F(x)\}, \quad G(x) = n(x) + \{G(x)\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

где $m(x)$ и $n(x)$ — функции с целочисленными значениями. Следовательно,

$$(m(x) - n(x)) - (m(y) - n(y)) = (F(x) - F(y)) - (G(x) - G(y)). \tag{8}$$

Поскольку здесь F и G являются отображениями степени 1, то

$$(F(x) - F(y)) - (G(x) - G(y)) = (F(s) - F(t)) - (G(s) - G(t))$$

где $s = \{x\} \in [0, 1)$, $t = \{y\} \in [0, 1)$. Тогда, применяя (7) к обоим отображениям F и G, получаем:

$$|(F(s) - F(t)) - (G(s) - G(t))| < 1. \tag{9}$$

Таким образом, соотношения (8), (9) влекут соотношение

$$|(m(x) - n(x)) - (m(y) - n(y))| < 1.$$

Для функции $m(x) - n(x)$ с целочисленными значениями последнее неравенство может выполняться только в том случае, когда $m(x) - n(x) = \text{const}$, откуда следует, что $F(x) - G(x) = m(x) - n(x) \equiv \text{const}$. Лемма доказана. □

В дальнейшем понадобится следующая

Лемма 3. *Любая итерация строго монотонного отображения* F *степени* 1 *в свою очередь является строго монотонным отображением степени* 1. *При этом отображение* $F_*(x) = F(x) - x$ *периодично с периодом* 1 *и удовлетворяет соотношению*

$$|F_*(x) - F_*(y)| < 1, \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Доказательство. Тот факт, что n-я итерация отображения F является строго монотонным отображением степени 1, немедленно следует по индукции из аналогичного свойства отображения F.

Отображение $F_*(x) = F(x) - x$ периодично с периодом 1 как разность двух отображений степени 1, $F(x)$ и x. Чтобы доказать (10), заметим, что строгая монотонность отображения $F(x)$ влечет соотношения

$$0 < F_*(x) - F_*(y) + (x - y) < 1, \qquad 0 < x - y < 1.$$

Тогда $|F_*(x) - F_*(y)| < 1$ при $0 < x - y < 1$, откуда в силу уже доказанной периодичности $F_*(x)$ с периодом 1 следует неравенство (10). □

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе будет сформулировано и доказано утверждение, обобщающее свойство «штурмового кодирования» траекторий отображения вращения окружности на траектории произвольного строго монотонного (в общем случае разрывного) отображения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ степени 1.

Положим $\alpha = \{F(0)\}$ и рассмотри интервалы $I_1 = [0, \alpha)$, $I_0 = [\alpha, 1)$.[3]

Теорема 1. *Пусть* I_0, I_1 *— интервалы, определенные выше, и пусть* ν *— кодирующая функция (3). Тогда последовательность* $\boldsymbol{\sigma}(F, x) = \sigma_0(F, x)\sigma_1(F, x)\ldots$, *в которой* $\sigma_n(F, x) := \nu(\{F^n(x)\})$, $n = 0, 1, \ldots$, *сбалансирована при любом* $x \in [0, 1)$.

Доказательство. Заметим сначала, что последовательность $\boldsymbol{\sigma}(f, x) = \sigma_0(F, x)\sigma_1(F, x)\ldots$ при любом $x \in [0, 1)$ может быть определена с помощью соотношения, аналогичного (2):

$$\sigma_n(F, x) = [F^{n+1}(x) - F(0)] - [F^n(x) - F(0)].$$

Следовательно, для любых двух слов

$$\boldsymbol{w} = \sigma_0(F, x)\sigma_1(F, x)\ldots\sigma_n(F, x), \qquad \boldsymbol{w'} = \sigma_0(F, x')\sigma_1(F, x')\ldots\sigma_n(F, x')$$

[3] Заметим, что в случае, когда $F(0)$ — целое число, интервал I_1 пуст в то время как I_0 совпадает с $[0, 1)$.

можно написать:

$$|\boldsymbol{w}|_1 = \sum_{k=0}^{n} \Big([F^{k+1}(x) - F(0)] - [F^k(x) - F(0)] \Big) = \\ = [F^{n+1}(x) - F(0)] - [x - F(0)], \tag{11}$$

и аналогично:

$$|\boldsymbol{w}'|_1 = \sum_{k=0}^{n} \Big([F^{k+1}(x') - F(0)] - [F^k(x') - F(0)] \Big) = \\ = [F^{n+1}(x') - F(0)] - [x' - F(0)]. \tag{12}$$

Так как функция F монотонно возрастает и имеет степень 1, то без ограничения общности можно считать, что $0 \le x \le x' < 1$. Тогда

$$0 \le (x' - F(0)) - (x - F(0)) = x' - x < 1 \tag{13}$$

и по лемме 3

$$0 \le \Big(F^{n+1}(x') - F(0)\Big) - \Big(F^{n+1}(x) - F(0)\Big) = F^{n+1}(x') - F^{n+1}(x) < 1. \tag{14}$$

Из (13) и (14) немедленно получаем, что

$$0 \le [x' - F(0)] - [x - F(0)] \le 1$$

и

$$0 \le [F^{n+1}(x') - F(0)] - [F^{n+1}(x) - F(0)] \le 1,$$

и, таким образом,

$$\Big| |\boldsymbol{w}'|_1 - |\boldsymbol{w}|_1 \Big| \le 1.$$

Теорема доказана. □

При анализе свойств поднятий гомеоморфизмов окружности большую роль играет (см., например, [2,5]) такая их характеристика, как *число вращения* $\tau(F)$ отображения F (или соответствующего гомеоморфизма):

$$\tau(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Известно, что функция $\tau(F)$ корректно определена, т.е соответствующий предел всегда существует и не зависит от x. Распространение понятия числа вращения на случай разрывных строго монотонных отображений степени 1 можно найти в [10].

Из теоремы 1 немедленно вытекает следствие, устанавливающее связь между числом вращения отображения F и частотой соответствующей штурмовой последовательности.

Следствие 1. $\tau(\boldsymbol{\sigma}(F, x)) \equiv \tau(F)$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in [0, 1)$ и положим $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(F, x)$. Тогда из (11) следует, что

$$\tau(\boldsymbol{\sigma}(F, x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_{n+1}|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{[F^{n+1}(x) - F(0)] - [x - F(0)]}{n+1}.$$

С другой стороны очевидно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[F^{n+1}(x) - F(0)] - [x - F(0)]}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n+1}(x) - x}{n+1} = \tau(F),$$

что и завершает доказательство. □

Теперь результаты, полученные выше, могут быть использованы для исследования символических свойств локально возрастающих релаксационных отображений, возникающих в различных приложениях (см., например, [1, гл. VIII] и [6]).

Пусть $f : [0, 1) \to [0, 1)$ — функция, удовлетворяющая условиям

- $\exists\alpha \in (0, 1)$ такое, что $f(x)$ непрерывна и строго возрастает на интервалах $[0, \alpha)$ и $[\alpha, 1)$;
- $x < f(x) < 1$ при $0 \le x < \alpha$;
- $0 \le f(x) < x$ при $\alpha \le x < 1$;
- $f(y) < f(x)$ при $0 \le x < \alpha \le y < 1$.

Функция, удовлетворяющая приведенным условиям, называется *локально возрастающей релаксационной функцией*. Типичный график такой функции приведен на рис. 4.

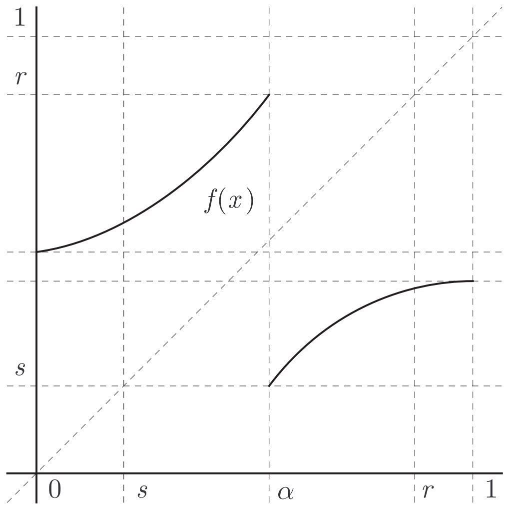

Рис. 4. Локально возрастающая релаксационная функция

Рассмотрим теперь, так же как в разделе 2, два интервала $I_0 = [0, \alpha)$ и $I_1 = [\alpha, 1)$, и обозначим через ν кодирующую функцию, определяемую соотношениями

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in I_0, \\ 1, & \text{если } x \in I_1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для любого* $x \in [0, 1)$ *последовательность* $\boldsymbol{\sigma}_1(x) := \nu(f(x))\nu(f^2(x))\ldots$ *сбалансирована.*[4]

Доказательство. Заметим сначала, что для любого $x \in [0, 1)$ элементы $f^n(x)$, $n \ge 1$, принадлежат интервалу $[s, r)$, где

$$s := \inf_{\alpha \le x < 1} f(x), \qquad r := \sup_{0 \le x < \alpha} f(x).$$

Рассмотрим теперь два интервала $\tilde{I}_0 = [s, \alpha)$ и $\tilde{I}_1 = [\alpha, r)$, и обозначим через $\tilde{\nu}$ кодовую функцию, определяемую соотношениями

$$\tilde{\nu}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \tilde{I}_0, \\ 1, & \text{если } x \in \tilde{I}_1. \end{cases}$$

[4] Заметим, что в теореме 2 намеренно рассматривается 1-хвост $\boldsymbol{\sigma}_1(x)$ полной кодовой последовательности $\boldsymbol{\sigma}(x) := \nu(x)\nu(f(x))\nu(f^2(x))\ldots$, генерируемой функцией f и точкой x. Справедливость утверждения теоремы 2 для полной кодовой последовательности остается под вопросом.

Тогда из включения $f^n(x) \in [s, r)$, $n \geq 1$, следует, что $\nu(f^n(x)) = \tilde{\nu}(f^n(x))$ при $n \geq 1$ и, таким образом,

$$\boldsymbol{\sigma}_1(x) \equiv \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(y) \tag{15}$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(y) = \tilde{\nu}(y)\tilde{\nu}(f(y))\tilde{\nu}(f^2(y))\ldots, \qquad y = f(x) \in [s, r).$$

Без потери общности можно считать, что $s = 0$ и $r = 1$. Действительно, в противном случае достаточно произвести замену переменных $\tilde{x} = (x - s)/(r - s)$ и рассмотреть функцию

$$\tilde{f}(\tilde{x}) := \frac{f((r-s)\tilde{x} + s) - s}{r - s}.$$

Функция $\tilde{f}$ будет обладать всеми свойствами функции f при $s = 0$ и $r = 1$ и некотором α. Таким образом, в дальнейшем будем считать, что (см. рис. 5)

$$\inf_{\alpha \leq x < 1} f(x) = 0, \qquad \sup_{0 \leq x < \alpha} f(x) = 1.$$

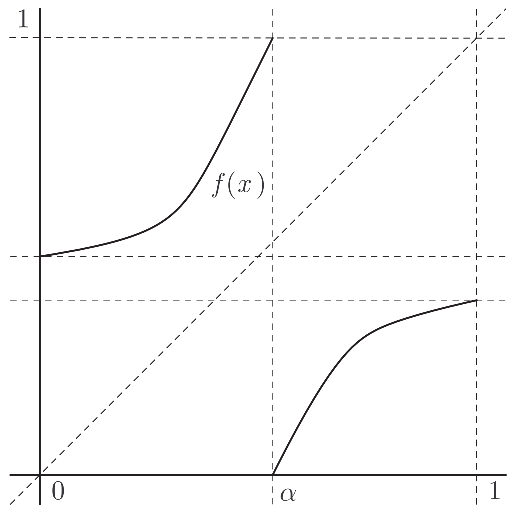

Рис. 5. Функция $f(x)$ при $s = 0$ и $r = 1$

Наша цель — использовать теорему 1 для завершения доказательства. К сожалению, в теореме 1 рассматривается строго монотонное отображение степени 1, определенное на $\mathbb{R}$, в то время как в нашем случае f является отображением $\mathbb{S}^1$ в себя. Кроме того, в теореме 1 интервалы $I_1 = [0, \alpha)$, $I_0 = [\alpha, 1)$, вовлеченные в построение кодовой последовательности, определены таким образом, что $\alpha = \{F(0)\}$, в то время как в нашем случае $f(\alpha) = 0$.

Рассмотрим строго монотонное поднятие $F(x)$ степени 1 функции $f(x)$, существующее по в силу леммы 2. Затем совершим еще одну замену переменных, чтобы добиться выполнения соотношения $\alpha = \{F(0)\}$, полагая $\hat{x} = x - \alpha$. В новых координатах функция F примет вид $\hat{F}(\hat{x}) = F(\hat{x} + \alpha) - \alpha$ (см. рис. 6); очевидно, функция $\hat{F}$ также будет строго монотонной функцией степени 1 и будет удовлетворять соотношению $\{\hat{F}(0)\} = \hat{\alpha}$, в котором $\hat{\alpha} := \{-\alpha\} = 1 - \alpha$.

Для завершения доказательства снова рассмотрим точку $y = \{F(x)\}$. Определим интервалы $\hat{I}_0 = [\hat{\alpha}, 1)$ и $\hat{I}_1 = [0, \hat{\alpha})$, и обозначим через $\hat{\nu}$ кодирующую функцию, определяемую соотношениями

$$\hat{\nu}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in \hat{I}_0, \\ 1, & \text{если } y \in \hat{I}_1. \end{cases}$$

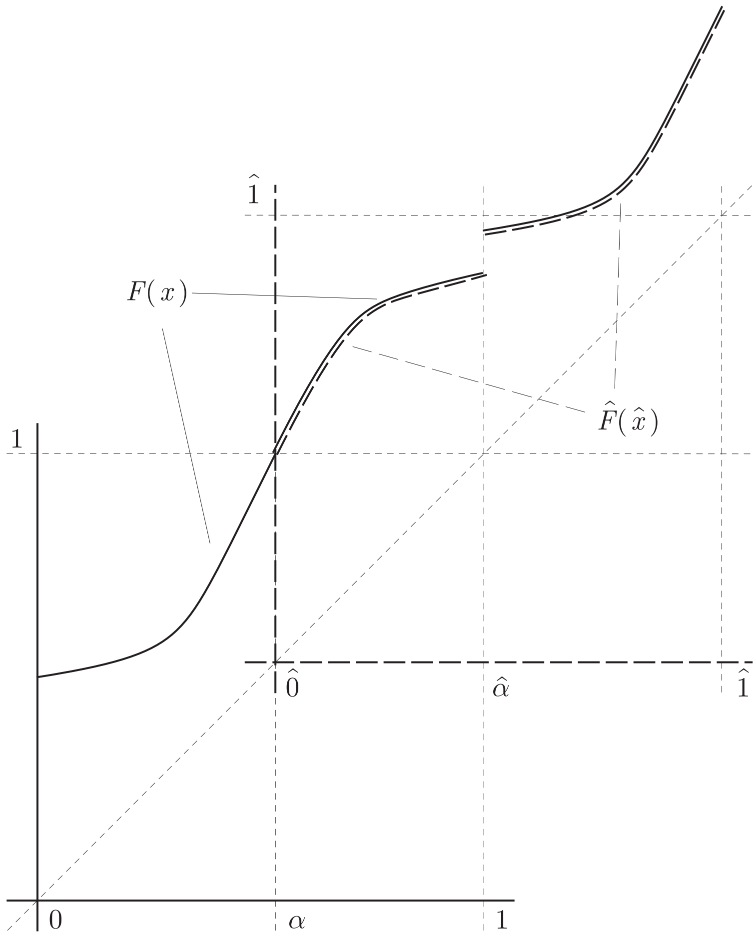

Рис. 6. Функции $F(x)$ и $\hat{F}(\hat{x})$

Из определения функции $\hat{F}$ получаем для точки $\hat{y} = y - \alpha$:

$$\{F^n(y)\} \in \tilde{I}_0 \Leftrightarrow \{\hat{F}^n(\hat{y})\} \in \hat{I}_0, \qquad \{F^n(y)\} \in \tilde{I}_1 \Leftrightarrow \{\hat{F}^n(\hat{y})\} \in \hat{I}_1.$$

Тогда $\tilde{\nu}(\{F^n(y)\}) \equiv \hat{\nu}(\{\hat{F}^n(\hat{y})\})$, и потому

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{y}) \equiv \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(y) \tag{16}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{y}) = \hat{\nu}(\hat{y})\hat{\nu}(\hat{F}(\hat{y}))\tilde{\nu}(\hat{F}^2(\hat{y}))\ldots.$$

Теперь функция $\hat{F}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и потому последовательность $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{y})$ сбалансирована. Тогда в силу (16) последовательность $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(y)$ также сбалансирована, и в силу (15) таковой же является и последовательность $\boldsymbol{\sigma}_1(x)$. Теорема доказана. □

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как представляется, исследование свойств сохраняющих ориентацию отображений окружности можно было бы провести, опираясь на предельные свойства соответствующих динамических систем (1). Как показано в [10], любое сохраняющее ориентацию отображение окружности $f(x)$ (возможно, разрывное) с иррациональным числом вращения $\tau(f)$ полусопряжено отображению поворота окружности $\rho_{\tau(f)}(x) := x + \tau(f) \mod 1$. Отсюда при иррациональном $\tau(f)$ можно вывести почти все основные свойства сохраняющих ориентацию отображений окружности, описанные выше. Мы намеренно предпочли прямой способ анализа свойств отображения f, поскольку он позволяет исследовать свойства f с произвольным числом вращения $\tau(f)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем / Е. А. Асарин, В. С. Козякин, М. А. Красносельский, Н. А. Кузнецов. — М.: Наука, 1992. — 408 с. 271, 272, 274, 279
2. *Каток А. Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — 768 с. 271, 276, 278
3. *Козякин В. С.* Об анализе устойчивости рассинхронизованных систем методами символической динамики // *Доклады АН СССР*. — 1990. — Т. 311, № 3. — С. 549–552. 271, 272, 274
4. *Козякин В. С.* Об устойчивости фазочастотно рассинхронизованных систем при возмущении моментов переключения компонент // *Автоматика и телемеханика*. — 1990. — Т. 8. — С. 35–42. 271, 272, 274
5. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975. 271, 278
6. *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // *J. Amer. Math. Soc.* — 2002. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 77–111. 271, 279
7. *Čech E.* Point sets. — Prague: Academia Publishing House of the Czechslovak Academy of Sciences, 1969. — 271 pp. 274
8. *Kloeden P., Kozyakin V.* Single parameter dissipativity and attractors in discrete time asynchronous systems // *Journal of Difference Equations and Applications*. — 2001. — Vol. 7. — Pp. 873–894. 271
9. *Kozyakin V. S.* Sturmian sequences generated by order preserving circle maps: Preprint 11/2003. — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May. 271
10. *Kozyakin V. S.* Discontinuous order preserving circle maps versus circle homeomorphisms: Preprint 12/2003. — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May. 278, 281
11. *Lothaire M.* Combinatorics of Words. — London: Addison–Wesley Publishing Company, 1983. — Vol. 17 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. 271, 272, 274
12. On the fragmentary complexity of symbolic sequences / P. Diamond, P. Kloeden, V. Kozyakin, A. Pokrovskii // *Theoretical Computer Science*. — 1995. — Vol. 148, no. 1. — Pp. 1–17. 271, 272, 274
13. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics: Preprint / P. Arnoux, V. Berthe, S. Ferenczi et al.; Ed. by V. Berthe, S. Ferenczi, C. Mauduit, A. Siegel: Institut de Mathematiques de Luminy, 2001. — http://iml.univ-mrs.fr/editions/preprint00/book. 271, 272, 274