

# Экстремальные нормы, разрывные отображения окружности и контрпример к гипотезе Лагариаса-Ванга о конечности

В. С. Козякин<sup>1</sup>

*Институт проблем передачи информации РАН*

Поступила в редколлегию 24 августа 2005г.

**Аннотация**—В 1995г. Дж. Лагариас и Янг Ванг высказали предположение о том, что обобщенный спектральный радиус конечного набора матриц всегда достигается на некотором конечном произведении матриц. Первый контрпример к этой “гипотезе о конечности” был построен в 2002г. Т. Бушем и Ж. Мерессом, а соответствующее доказательство существенно опиралось на конструкции теории меры. В 2003г. В. Блондель, А. Владимиров и Ж. Тэсс представили другое доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, которое было основано на комбинаторных свойствах перестановок произведений положительных матриц.

В теории динамических систем обобщенный спектральный радиус используется, в основном, для описания скорости сходимости или расходимости траекторий, описываемых произведениями матриц. В связи с этим, упомянутые выше методы построения контрпримера к гипотезе о конечности не совсем удовлетворительны (с точки зрения автора, конечно), поскольку они не дают достаточно конструктивного описания структуры траекторий с максимальной скоростью роста (или минимальной скоростью убывания).

В статье предлагается еще одно доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, выполненное в достаточно традиционной манере теории динамических систем. Предложено описание траекторий с максимальной скоростью роста в терминах так называемых экстремальных норм Н. Барабанова и связанных с ними экстремальных траекторий. Конструкция контрпримера основана на детальном анализе свойств экстремальных норм наборов двумерных положительных матриц и существенно использует технику символов Грама, позаимствованную из работы Т. Буша и Ж. Мересса. Наконец, важную роль в доказательстве играют понятие и свойства числа вращения для разрывных сохраняющих ориентацию отображений окружности.

**УДК:** 512.643.5, 517.929.2

**MSC 2000:** 15A60; 26E25; 37E10; 37E45; 39A11

**Ключевые слова и фразы:** бесконечные произведения матриц, обобщенный спектральный радиус, совместный спектральный радиус, экстремальные нормы, неприводимость, разрывные отображения окружности, число вращения

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $A = \{A_1, \dots, A_r\}$  — набор вещественных  $m \times m$  матриц, а  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в  $\mathbb{R}^m$ . С каждой конечной последовательностью  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \in \{1, \dots, r\}^n$  ассоциируем матрицу

$$A_\sigma = A_{\sigma_n} \cdots A_{\sigma_2} A_{\sigma_1},$$

<sup>1</sup> Работа была поддержана грантом РФФИ № 03-01-00258, а также грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ № 1532.2003.1. Английский вариант настоящей работы [16] был завершен во время пребывания автора в Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS), Берлин, в январе 2005г.

и при каждом  $n \geq 1$  определим две числовые величины:

$$\rho_n(A) = \max_{\sigma \in \{1, \dots, r\}^n} \|A_\sigma\|^{1/n}, \quad \bar{\rho}_n(A) = \max_{\sigma \in \{1, \dots, r\}^n} \rho(A_\sigma)^{1/n}.$$

В этих обозначениях предел

$$\rho(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n(A),$$

который всегда существует и не зависит от выбора нормы  $\|\cdot\|$ , называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц  $A$ . Точно так же всегда существует предел

$$\bar{\rho}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{\rho}_n(A),$$

называемый *обобщенным спектральным радиусом* набора матриц  $A$ . Величины  $\rho(A)$  и  $\bar{\rho}(A)$  для ограниченных семейств матриц  $A$  совпадают друг с другом [7] и при этом для любых  $n$  имеют место неравенства

$$\bar{\rho}_n(A) \leq \bar{\rho}(A) = \rho(A) \leq \rho_n(A).$$

В [17] было высказано предположение, позднее получившее название *гипотезы Лагариаса-Ванга о конечности*, что на самом деле величина  $\bar{\rho}(A)$  совпадает с  $\rho(A_\sigma)^{1/n}$  при некоторых  $n$  и  $\sigma \in \{1, \dots, r\}^n$ . Первый контрпример к гипотезе о конечности был построен в [10]. Соответствующее доказательство существенно использовало конструкции из теории меры. Позднее появилось доказательство контрпримера к гипотезе о конечности [8, 9], основанное на комбинаторных свойствах перестановок положительных матриц.

Ниже предлагается еще одно доказательство контрпримера к гипотезе о конечности Лагариаса-Ванга, выполненное в достаточно традиционном духе теории динамических систем. В основе доказательства лежит идея использования так называемых экстремальных норм (близкая к идее использования функционалов Манэ в [10]) и порождаемых ими экстремальных траекторий для анализа “наиболее быстро растущих траекторий”, порождаемых наборами матриц. На экстремальные нормы и их роль в анализе свойств произведений матриц одним из первых, по-видимому, обратил внимание Н. Е. Барабанов [1, 2, 3]. В дальнейшем техника экстремальных норм использовалась в различных задачах, связанных с исследованием свойств произведений матриц (см., например, [18]). Анализ свойств экстремальных норм наборов двумерных положительных матриц, выполненный в настоящей работе, существенно опирается на технику символов Грама, заимствованную из [10]. Наконец, немаловажную роль в предлагаемом доказательстве играют понятие и свойства числа вращения для разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию [11, 13, 14].

## 2. ТРАЕКТОРИИ НАБОРОВ МАТРИЦ

При изучении свойств наборов матриц  $A = \{A_1, \dots, A_r\}$  одним из наиболее важных является вопрос о том, как совместный (обобщенный) спектральный радиус  $\rho(A)$  этого набора соотносится со скоростью роста или убывания решений разностного включения

$$x_{n+1} \in \{A_1, \dots, A_r\}x_n, \quad (1)$$

в котором значение  $x_{n+1}$  выбирается из множества векторов  $\{A_1 x_n, \dots, A_r x_n\}$ . Отметим, что каждое решение включения (1) определено при всех  $n \geq 0$  и удовлетворяет уравнению

$$x_{n+1} = A_{\sigma_n} x_n, \quad \sigma_n \in \{1, \dots, r\}, \quad (2)$$

при некотором выборе индексной последовательности  $\{\sigma_n\}$ . Очевидно, справедливо и обратное: каждое решение разностного уравнения вида (2), отвечающего некоторой индексной последовательности  $\{\sigma_n\}$ , является решением и разностного включения (1). Чтобы сформулировать дальнейшие свойства решений включения (1), напомним некоторые определения и общие факты.

Решения включения (1) будет удобно называть также *траекториями*, определяемыми набором матриц  $A$  или просто траекториями набора матриц  $A$ . Множество всех траекторий набора матриц  $A$  будем обозначать через  $\mathcal{T}(A)$ , множество всех траекторий  $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$  набора матриц  $A$ , удовлетворяющих начальному условию  $x_0 = x$ , будем обозначать через  $\mathcal{T}(A, x)$ . В общем случае при  $r > 1$  отображение

$$x \mapsto \mathcal{T}(A, x)$$

так же, впрочем, как и многие другие отображения, возникающие при анализе свойств разностных включений, оказывается многозначным. В связи с этим напомним некоторые определения и факты из теории многозначных отображений (см., например, [6, §18]).

Пусть  $X$  и  $Y$  — топологические пространства и  $f$  — отображение, сопоставляющее каждому элементу  $x \in X$  некоторое множество  $f(x) \subseteq Y$ . Тогда отображение  $f$  будет называться многозначным. Отображение  $f$  называют *полу непрерывным сверху* в некоторой точке  $x \in X$ , если для каждого открытого множества  $\mathcal{U} \ni f(x)$  найдется такое открытое множество  $\mathcal{V} \ni x$ , что  $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$ .<sup>1</sup> *Графиком отображения  $f$*  называют множество

$$\text{Gr}(f) = \{(x, y) : x \in X, y \in f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Отображение  $f$  называется *замкнутым (компактным)*, если для любого замкнутого множества (компакта)  $\mathcal{G} \subseteq X$  множество  $f(\mathcal{G}) \subseteq Y$  также является замкнутым (компактом); ясно, что всякое компактное отображение замкнуто.

Необходимые в дальнейшем свойства многозначных отображений сведем в единую лемму, которую приведем без доказательства ввиду ее элементарности.

**Лемма 1.** Пусть  $x \in X \mapsto f(x) \subseteq Y$  — многозначное отображение и пространство  $Y$  регулярно.<sup>2</sup> Тогда справедливы утверждения:

- (i) если отображение  $f$  замкнуто и полу непрерывно сверху, то его график замкнут в  $X \times Y$ ;
- (ii) если отображение  $f$  компактно и его график замкнут, то оно полу непрерывно сверху;
- (iii) отображение  $f$  компактно и полу непрерывно сверху, если и только если для любой сходящейся последовательности  $\{x_n \in X\}$  любая последовательность  $\{y_n \in Y\}$ , удовлетворяющая соотношениям  $y_n \in f(x_n)$ , является компактной и для предельных элементов  $x_*$  и  $y_*$  последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеет место соотношение  $y_* \in f(x_*)$ .

Обозначим множество всех упорядоченных наборов вещественных матриц  $A = \{A_1, \dots, A_r\}$  размерности  $m \times m$  через  $M_{m,r}$ . Множество  $M_{m,r}$  естественным образом может быть отождествлено с пространством  $\mathbb{R}^{m^2}$ , если в качестве координат в нем выбрать перенумерованные в каком-либо порядке элементы наборов матриц. Это дает нам право считать  $M_{m,r}$  топологическим, а при необходимости и метрическим пространством.

Через  $\Omega(\mathbb{R}^m)$  будем обозначать пространство последовательностей  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  с топологией покоординатной сходимости. Назовем  $n$ -сечением множества  $\Omega \subseteq \Omega(\mathbb{R}^m)$  подмножество  $\Omega_n$  пространства  $\mathbb{R}^m$  образованное  $n$ -ми членами всех последовательностей из  $\Omega$ :

$$\Omega_n = \{x : \exists \mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^\infty \in \Omega : x_n = x\}.$$

Отметим, что множество  $\Omega$  компактно в пространстве  $\Omega(\mathbb{R}^m)$ , если каждое его сечение  $\Omega_n$  ограничено.

<sup>1</sup> Здесь через  $f(\mathcal{V})$  обозначено множество  $\cup_{y \in \mathcal{V}} f(y)$ .

<sup>2</sup> Топологическое пространство  $X$  называется регулярным, если для любого его замкнутого множества  $\mathcal{G}$  и точки  $x \notin \mathcal{G}$  найдутся открытые множества  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$ , такие, что  $x \in \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$  и  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ . Регулярными являются любые метрические пространства, в частности, пространства  $\mathbb{R}^m$  и  $M_{m,r}$ .

Теперь мы в состоянии сформулировать необходимые в дальнейшем свойства траекторий набора матриц  $A$ .

**Лемма 2.** Для любого набора матриц  $A$  множество  $\mathcal{T}(A)$  замкнуто в пространстве  $\Omega(\mathbb{R}^m)$ , а отображение  $(A, x) \mapsto \mathcal{T}(A, x)$  компактно и полунепрерывно сверху.

Лемма 2 является простым следствием критерия компактности в пространстве  $\Omega(\mathbb{R}^m)$ , и потому на ее доказательстве не останавливаемся.

В дальнейшем основное внимание будет уделяться так называемым неприводимым наборам матриц. Напомним, что набор матриц  $A$  называется *неприводимым*, если матрицы из  $A$  не имеют общих инвариантных подпространств, отличных от  $\{0\}$  и  $\mathbb{R}^m$ . В [4, 15, 5] такой набор матриц был назван квазиуправляемым. Основные свойства неприводимых матриц в контексте проблемы Лагариаса-Ванга будут изучены ниже, а сейчас установим лишь один вспомогательный результат.

Пусть  $x \in \mathbb{R}^m$ . Через  $\mathcal{T}_n(A, x)$  будем обозначать  $n$ -сечение множества  $\mathcal{T}(A, x)$ . Введем также при каждом  $n = 0, 1, 2 \dots$  множества

$$\mathcal{T}_n^*(A, x) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{T}_k(A, x).$$

Напомним, что во введении мы с каждой конечной последовательностью  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \in \{1, \dots, r\}^n$  связали матрицу  $A_\sigma = A_{\sigma_n} \cdots A_{\sigma_2} A_{\sigma_1}$ . При этом неявно предполагалось, что  $n \geq 1$ . Однако в дальнейшем ради единообразия будет удобно введенное обозначение  $A_\sigma$  распространить на вырожденный случай, когда последовательность  $\sigma$  состоит из нулевого числа элементов. Так, будем считать, что  $\{1, \dots, r\}^0 = \emptyset$ . В этом случае  $\sigma \in \{1, \dots, r\}^0$  естественно отождествить с пустым множеством и положить  $A_\emptyset = I$ .

**Лемма 3.** Множество  $\mathcal{T}_n^*(A, x)$  совпадает с множеством всех возможных векторов вида  $A_\sigma x$ , где  $\sigma \in \{1, \dots, r\}^k$  при некотором целом, возможно нулевом  $k \leq n$ .

Если  $A$  — неприводимый набор  $m \times m$  матриц и  $x \neq 0$ , то множество  $\mathcal{T}_n^*(A, x)$  содержит не менее  $\min\{n+1, m\}$  линейно независимых элементов, один из которых можно считать совпадающим с  $x$ .

**Доказательство.** В доказательстве нуждается лишь второе утверждение леммы. Обозначим через  $\mathcal{L}_n(A, x)$  линейную оболочку множества  $\mathcal{T}_n^*(A, x)$ . Тогда размерность подпространства  $\mathcal{L}_n(A, x)$  совпадает с количеством линейно независимых векторов в множестве  $\mathcal{T}_n^*(A, x)$ . А поскольку при каждом  $n \geq 0$  справедливо включение  $\mathcal{T}_n^*(A, x) \subseteq \mathcal{T}_{n+1}^*(A, x)$ , то  $\mathcal{L}_n(A, x) \subseteq \mathcal{L}_{n+1}(A, x)$  и потому

$$1 = \dim \mathcal{L}_0(A, x) \leq \dim \mathcal{L}_1(A, x) \leq \dots \leq \dim \mathcal{L}_n(A, x) \leq \dots$$

Поэтому лемма будет доказана, если мы установим, что

$$\dim \mathcal{L}_n(A, x) \geq n + 1, \quad n = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (3)$$

Докажем неравенства (3) по индукции. При  $n = 0$  неравенства (3) верны, поскольку подпространство  $\mathcal{L}_0(A, x)$  совпадает с линейной оболочкой вектора  $x$ , и значит,  $\dim \mathcal{L}_0(A, x) = 1$ . Предположим, что утверждение леммы верно при некотором  $n = k < m - 1$ , т.е.  $\dim \mathcal{L}_k(A, x) \geq k + 1$ . Тогда подпространство  $\mathcal{L}_n(A, x)$  в силу предположения о неприводимости набора матриц  $A$  не может быть инвариантным для всех матриц  $A_1, \dots, A_r$ . Следовательно, найдется такая матрица  $A_i$ , что  $A_i \mathcal{L}_n(A, x) \not\subseteq \mathcal{L}_n(A, x)$ , и потому  $\mathcal{L}_{k+1}(A, x) \neq \mathcal{L}_k(A, x)$ . Отсюда следует, что  $\dim \mathcal{L}_{k+1}(A, x) \geq \dim \mathcal{L}_k(A, x) + 1 \geq k + 2$ . Таким образом, шаг индукции проведен и доказательство леммы завершено.  $\square$

3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ НОРМЫ И ТРАЕКТОРИИ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

При анализе свойств совместного спектрального радиуса важную роль играют идеи, предложенные Н. Е. Барабановым в [1, 2, 3] и получившие дальнейшее развитие в ряде работ, среди которых выделим [18].

**Теорема 1** (Н. Е. Барабанов). *Если набор матриц  $A = \{A_1, \dots, A_r\}$  неприводим, то число  $\rho$  является совместным (обобщенным) спектральным радиусом набора  $A$  тогда и только тогда, когда найдется такая норма  $\|\cdot\|$  в  $\mathbb{R}^m$ , что*

$$\rho\|x\| = \max \{ \|A_1x\|, \|A_2x\|, \dots, \|A_r x\| \}. \tag{4}$$

Норма, удовлетворяющая условию (4), будет называться *экстремальной* для набора матриц  $A$ . Впервые, по-видимому, существование экстремальных норм для компактных семейств матриц было доказано Н. Е. Барабановым [1, 2, 3].

В теореме 1 достаточно предполагать, что  $\|\cdot\|$  в условии (4) является не нормой, а лишь полунормой. Обоснованность этого замечания вытекает из следующей леммы.

**Лемма 4.** *Если набор матриц  $A$  неприводим, то всякая не равная тождественно нулю полунорма  $\|\cdot\|$ , удовлетворяющая условию (4), является нормой.*

**Доказательство.** Заметим, что множество нулей полунормы  $\|\cdot\|$  является некоторым подпространством  $\mathcal{L}$ , которое в силу предположения о нетривиальности полунормы не совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^m$ , т.е.  $\mathcal{L} \neq \mathbb{R}^m$ . Если при этом  $\mathcal{L} \neq \{0\}$ , то в силу неприводимости набора матриц  $A$  можно указать такой вектор  $x_* \in \mathcal{L}$ , для которого  $A_i x_* \notin \mathcal{L}$  при некотором  $i$ . Следовательно, по определению подпространства  $\mathcal{L}$ , одновременно должны быть верны два соотношения:  $\|x_*\| = 0$  и  $\|A_i x_*\| \neq 0$ , что противоречит (4). Полученное противоречие доказывает, что  $\mathcal{L} = \{0\}$  и, значит,  $\|\cdot\|$  является нормой. Лемма доказана.  $\square$

Отметим, что множество экстремальных норм обладает рядом достаточно сильных свойств.

3.1. Ограниченность множества экстремальных норм

Пусть  $\|\cdot\|_0$  — некоторая норма в пространстве  $\mathbb{R}^m$ , которая будет играть роль “калибровочной” нормы, т.е. нормы, с которой будут сравниваться остальные нормы в  $\mathbb{R}^m$ .

Как известно, в пространстве  $\mathbb{R}^m$  все нормы эквивалентны, и потому для любой нормы  $\|\cdot\|$  найдутся такие константы  $\Delta, \delta > 0$ , что

$$\delta\|x\|_0 \leq \|x\| \leq \Delta\|x\|_0.$$

Универсальных констант  $\Delta, \delta > 0$  в общем случае, конечно же, не существует, поскольку при любом выборе  $\Delta, \delta > 0$  уже простое умножение нормы  $\|\cdot\|$  на константу нарушает указанные выше неравенства. Поэтому имеет смысл сравнивать с нормой  $\|\cdot\|_0$  лишь такие нормы, которые предварительно откалиброваны, т.е. принимают, например, одинаковые значения в некоторой заранее выбранной точке  $x_0 \neq 0$ . В этом случае возникает вопрос: найдутся ли такие константы  $\Delta, \delta > 0$ , при которых

$$\delta\|x\|_0 \leq \frac{\|x\|}{\|x_0\|} \leq \Delta\|x\|_0. \tag{5}$$

Но даже и в этом случае ответ на поставленный вопрос для произвольных норм  $\|\cdot\|$  отрицателен. В то же время, как будет показано ниже, если в качестве  $\|\cdot\|$  брать только экстремальные нормы, то универсальные константы  $\Delta, \delta > 0$ , для которых выполняется соотношение (5), существуют! В этом разделе мы докажем существование искомой константы  $\Delta < \infty$ .

Зафиксируем произвольный ненулевой вектор  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  и неприводимый набор  $m \times m$  матриц  $A$ . Тогда по лемме 3 в множестве  $\mathcal{T}_{m-1}^*(A, x_0)$  можно выбрать  $N$  линейно независимых векторов  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ . В этом случае центрально-симметричное выпуклое множество

$$S_{\#} = \text{co}\{\pm x_0, \pm x_1, \dots, \pm x_{m-1}\} \quad (6)$$

содержит нуль в качестве внутренней точки и может рассматриваться как единичный шар в норме  $\|\cdot\|_{\#}$  в  $\mathbb{R}^m$ , определяемой равенством:

$$\|x\|_{\#} = \inf\{t : t > 0, x \in tS_{\#}\} \quad (7)$$

т.е.  $S_{\#} = \{x : \|x\|_{\#} \leq 1\}$ .

**Лемма 5.** Пусть  $\|\cdot\|_{\#}$  — норма, определяемая соотношениями (6)–(7) по неприводимому набору  $m \times m$  матриц  $A$  и вектору  $x_0 \neq 0$ . Тогда для любой экстремальной относительно набора матриц  $A$  нормы  $\|\cdot\|$  справедлива оценка

$$\frac{\|x\|}{\|x_0\|} \leq (\max\{1, \rho(A)\})^{m-1} \|x\|_{\#}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \quad (8)$$

**Доказательство.** По лемме 3 каждый из векторов  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ , участвующих в определении множества  $S_{\#}$ , может быть представлен в виде

$$x_i = A_{\sigma(i)}x_0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

где  $\sigma(i) \in \{1, \dots, r\}^{k_i}$  при некотором целом, возможно нулевом  $k_i \leq m-1$ . Поэтому для произвольной экстремальной относительно набора матриц  $A$  нормы  $\|\cdot\|$  имеют место оценки

$$\|x_i\| \leq (\max\{1, \rho(A)\})^{m-1} \|x_0\|, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Полученные неравенства показывают, что

$$S_{\#} \subseteq \{x : \|x\| \leq (\max\{1, \rho(A)\})^{m-1} \|x_0\|\}$$

откуда и вытекает оценка (8). Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^m$  заданы некоторая норма  $\|\cdot\|_0$  и вектор  $x_0 \neq 0$ , и пусть  $A$  — неприводимый набор  $m \times m$  матриц. Тогда найдется такое число  $\Delta < \infty$  и такая окрестность  $\mathcal{A}$  набора матриц  $A$ , что для любой экстремальной относительно набора матриц  $A' \in \mathcal{A}$  нормы  $\|\cdot\|'$  справедлива оценка

$$\frac{\|x\|'}{\|x_0\|'} \leq \Delta \|x\|_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m. \quad (9)$$

**Доказательство.** Пусть  $A = \{A_1, \dots, A_r\}$ , тогда по лемме 3 в множестве  $\mathcal{T}_{m-1}^*(A, x_0)$  можно выбрать линейно независимые векторы  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ , представимые в виде

$$x_i = x_i(A) = A_{\sigma(i)}x_0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

где  $\sigma(i) \in \{1, \dots, r\}^{k_i}$  при некотором целом, возможно нулевом,  $k_i \leq m-1$ . В этом случае для любого набора матриц  $A' = \{A'_1, \dots, A'_r\}$  из достаточно малой окрестности  $\mathcal{A}$  набора матриц  $A$  будут линейно независимыми и векторы

$$x'_i = x_i(A') = A'_{\sigma(i)}x_0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Обозначим при каждом  $A' \in \mathcal{A}$  через  $S_{\#}(A')$  центрально-симметричное выпуклое множество

$$S_{\#}(A') = \text{co}\{\pm x_0(A'), \pm x_1(A'), \dots, \pm x_{m-1}(A')\},$$

содержащее нуль в качестве внутренней точки. Как отмечалось выше, такое множество может рассматриваться как единичный шар в норме  $\|\cdot\|'_{\#}$  в  $\mathbb{R}^m$ , определяемой равенством:

$$\|x\|'_{\#} = \inf\{t : t > 0, x \in tS_{\#}(A')\}.$$

Из леммы 5 получаем тогда, что

$$\frac{\|x\|}{\|x_0\|} \leq (\max\{1, \rho(A(\lambda))\})^{m-1} \|x\|'_{\#}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall A' \in \mathcal{A}. \quad (10)$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что в силу непрерывной зависимости векторов  $x_0(A'), x_1(A'), \dots, x_{m-1}(A')$  от  $A'$  и их линейной независимости при  $A' = A$ , пересечение множеств  $S_{\#}(A')$  при  $A' \in \mathcal{A}$  содержит нуль в качестве внутренней точки. Следовательно, найдется такая константа  $\mu$ , что

$$\{x : \|x\|_0 \leq 1\} \subseteq \mu \bigcap_{A' \in \mathcal{A}} S_{\#}(A'),$$

и потому

$$\|x\|'_{\#} \leq \mu \|x\|_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall A' \in \mathcal{A}. \quad (11)$$

Из оценок (10) и (11) вытекает утверждение леммы с константой

$$\Delta = \mu \sup_{A' \in \mathcal{A}} (\max\{1, \rho(A')\})^{m-1},$$

которая может считаться конечной, поскольку supremum в правой части ограничен в любой ограниченной окрестности набора матриц  $A$ , а окрестность  $\mathcal{A}$  предполагается достаточно малой, а значит, и ограниченной. Лемма доказана.  $\square$

### 3.2. Компактность множества экстремальных норм

Пусть  $A$  — некоторый неприводимый набор матриц. Обозначим через  $N_{\text{ext}}(A, x_0)$ , где  $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ , множество всех экстремальных относительно набора матриц  $A$  норм  $\|\cdot\|$ , удовлетворяющих калибровочному условию  $\|x_0\| = 1$ . Через  $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$  будем обозначать линейное топологическое пространство непрерывных функций на  $\mathbb{R}^m$  с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах из  $\mathbb{R}^m$ .

**Теорема 2.** Пусть  $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ , и пусть  $A$  — неприводимый набор  $t \times t$  матриц. Тогда найдется такая компактная окрестность  $\mathcal{A}$  набора матриц  $A$ , что при  $A' \in \mathcal{A}$  отображение

$$A' \mapsto N_{\text{ext}}(A', x_0) \quad (12)$$

компактно и полунепрерывно сверху.

**Доказательство.** Зафиксируем в  $\mathbb{R}^m$  некоторую норму  $\|\cdot\|_0$ , и выберем в качестве  $\mathcal{A}$  компактную окрестность набора матриц  $A$ , существование которой утверждается в лемме 6.

Введем множество норм

$$\mathcal{N} := \bigcup_{A' \in \mathcal{A}} N_{\text{ext}}(A', x_0),$$

и покажем, что это множество компактно в пространстве  $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ . Действительно, по лемме 6 при некотором  $\Delta < \infty$  справедливы оценки

$$\|x\| \leq \Delta \|x\|_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \|\cdot\| \in \mathcal{N},$$

откуда следует, что значения норм из  $\mathcal{N}$  равномерно ограничены на каждом ограниченном множестве из  $\mathbb{R}^m$ . Кроме того, снова по лемме 6

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \leq \Delta \|x - y\|_0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \|\cdot\| \in \mathcal{N},$$

и, следовательно, нормы из  $\mathcal{N}$  являются функциями, удовлетворяющими равномерному условию Липшица на  $\mathbb{R}^m$ . Таким образом, нормы из  $\mathcal{N}$  образуют множество равномерно ограниченных и равномерно непрерывных функций на каждом замкнутом ограниченном множестве из  $\mathbb{R}^m$ , откуда по теореме Арцела вытекает компактность множества  $\mathcal{N}$  в пространстве  $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ .

Покажем теперь, что график отображения (12) замкнут в  $\mathcal{A} \times C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ . Пусть  $\{(A^{(n)}, \|\cdot\|^{(n)})\}$ , где  $A^{(n)} \in \mathcal{A}$ , — последовательность элементов, принадлежащая графику отображения (12) и сходящаяся к некоторому элементу  $(A^*, \nu(\cdot)) \in \mathcal{M}_{m,r} \times C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ . При этом из компактности  $\mathcal{A}$  следует, что  $A^* \in \mathcal{A}$ . А про функцию  $\nu(\cdot)$ , являющуюся пределом в  $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$  последовательности норм  $\|\cdot\|^{(n)}$ , можно утверждать пока, что она является лишь полунормой.

Из определения последовательности  $\{(A^{(n)}, \|\cdot\|^{(n)})\}$  следует, что  $\|\cdot\|^{(n)} \in N_{\text{ext}}(A^{(n)}, x_0)$  при каждом значении  $n$ , и потому

$$\rho(A^{(n)}) \|x\|^{(n)} = \max \{ \|A_1^{(n)} x\|^{(n)}, \dots, \|A_r^{(n)} x\|^{(n)} \}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall n. \quad (13)$$

Здесь, в силу неприводимости по условию теоремы набора матриц  $A$ , без ограничения общности можно считать неприводимым каждый из наборов матриц  $A^{(n)}$ . В этом случае [12]  $\rho(A^{(n)}) \rightarrow \rho(A^*)$  и, переходя к пределу в (13), получаем соотношение:

$$\rho(A^*) \nu(x) = \max \{ \nu(A_1^* x), \nu(A_2^* x), \dots, \nu(A_r^* x) \}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

причем  $\nu(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0\|^{(n)} = 1$ . Следовательно, полунорма  $\nu$  является экстремальной относительно неприводимого набора матриц  $A^*$  и при этом не обращается тождественно в нуль. Тогда по лемме 4 она на самом деле является экстремальной нормой:  $\nu(\cdot) = \|\cdot\|^* \in N_{\text{ext}}(A^*, x_0)$ , что и означает замкнутость графика отображения (12).

Итак, установлено, что график отображения (12) замкнут и при этом множество  $\mathcal{N}$  компактно. Отсюда по лемме 1 вытекает компактность и полунепрерывность сверху отображения (12). Теорема доказана.  $\square$

### 3.3. Равномерная эквивалентность экстремальных норм

Теперь мы в состоянии доказать левую часть неравенств (5), причем даже в более сильной форме.

**Лемма 7.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^m$  заданы некоторая норма  $\|\cdot\|_0$  и вектор  $x_0 \neq 0$ , и пусть  $A$  — неприводимый набор  $t \times t$  матриц. Тогда найдется такое число  $\delta > 0$  и такая окрестность  $\mathcal{A}$  набора матриц  $A$ , что для любой экстремальной относительно набора матриц  $A' \in \mathcal{A}$  нормы  $\|\cdot\|'$  справедлива оценка

$$\delta \|x\|_0 \leq \frac{\|x\|'}{\|x_0\|'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

**Доказательство.** Выберем в качестве  $\mathcal{A}$  окрестность набора матриц  $A$ , определяемую теоремой 2. Тогда в предположении, что лемма не верна, можно указать такие наборы матриц  $A^{(n)} \in \mathcal{A}$

и отвечающие им экстремальные нормы  $\|\cdot\|^{(n)} \in N_{\text{ext}}(\mathbf{A}^{(n)}, x_0)$ , а также такие векторы  $x^{(n)}$ , что  $\|x^{(n)}\|_0 = 1$  и

$$\frac{\|x^{(n)}\|^{(n)}}{\|x_0\|^{(n)}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \tag{14}$$

Заметим теперь, что по теореме 2 последовательности  $\{\mathbf{A}^{(n)}\}$  и  $\{\|\cdot\|^{(n)}\}$  можно считать сходящимися,  $\mathbf{A}^{(n)} \rightarrow \mathbf{A}^* \in \mathcal{A}$  и  $\|\cdot\|^{(n)} \rightarrow \|\cdot\|^*$ , причем  $\|\cdot\|^* \in N_{\text{ext}}(\mathbf{A}^*, x_0)$ . Последовательность  $\{x^{(n)}\}$  также можно считать сходящейся:  $x^{(n)} \rightarrow x^* \neq 0$ . А тогда, переходя в (14) к пределу, получаем равенство

$$\frac{\|x^*\|^*}{\|x_0\|^*} = 0, \quad x^*, x_0 \neq 0,$$

что невозможно, поскольку  $\|\cdot\|^*$  — норма. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.  $\square$

Установленные в леммах 6 и 7 свойства экстремальных норм можно представить в универсальной и не зависящей от выбора вспомогательного вектора  $x_0$  форме.

**Теорема 3.** *Для любого неприводимого набора  $t \times t$  матриц  $\mathbf{A}$  можно указать такую окрестность  $\mathcal{A}$  и константы  $0 < \delta \leq \Delta < \infty$ , что для любой пары экстремальных относительно наборов матриц  $\mathbf{A}', \mathbf{A}'' \in \mathcal{A}$  норм  $\|\cdot\|'$  и  $\|\cdot\|''$  справедливы оценки*

$$\frac{\delta^2 \|x\|''}{\Delta^2 \|y\|''} \leq \frac{\|x\|'}{\|y\|'} \leq \frac{\Delta^2 \|x\|''}{\delta^2 \|y\|''}, \quad \forall x, y \neq 0 \in \mathbb{R}^m.$$

Приведенная теорема является непосредственным следствием лемм 6 и 7, и потому на ее доказательстве не останавливаемся.

В заключение отметим, что помимо установленных выше топологических свойств, экстремальные нормы обладают и некоторой алгебраической структурой.

**Лемма 8.** *Пусть  $\|\cdot\|'$  и  $\|\cdot\|''$  — экстремальные нормы, отвечающие некоторому набору матриц. Тогда норма  $\|x\| = \max\{\|x\|', \|x\|''\}$  также является экстремальной нормой, отвечающей тому же набору матриц.*

Доказательство леммы очевидно.

### 3.4. Экстремальные траектории и их генераторы

Введем некоторые понятия. Траектория  $\{x_n\}$  набора матриц  $\mathbf{A}$  будет называться *характеристической*, если найдутся такие константы  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , при которых

$$c_1 \leq \rho^{-n}(\mathbf{A})\|x_n\| \leq c_2, \quad \forall n.$$

Заметим, что определение характеристической траектории не зависит от выбора нормы  $\|\cdot\|$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Важным частным случаем характеристических траекторий являются так называемые экстремальные траектории. Траектория  $\{x_n\}$  набора матриц  $\mathbf{A}$  будет называться *экстремальной*, если в некоторой экстремальной норме  $\|\cdot\|$  для нее выполняются тождества

$$\rho^{-n}(\mathbf{A})\|x_n\| \equiv \text{const}. \tag{15}$$

В отличие от определения характеристической траектории определение экстремальной траектории зависит от выбора экстремальной нормы, и траектория, экстремальная в одной норме может не быть экстремальной в другой. Тем не менее, как будет показано ниже в лемме 10, для неприводимого

набора матриц всегда найдутся в определенном смысле универсальные экстремальные траектории, т.е. траектории, экстремальные относительно любой экстремальной нормы.

Покажем, что множество экстремальных траекторий (а значит, и содержащее его множество характеристических траекторий) непусто в случае, когда набор матриц  $A$  неприводим.

**Лемма 9.** Для любого вектора  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^m$  и для любой экстремальной нормы  $\|\cdot\|$  найдется экстремальная траектория  $\{x_n\}$ , удовлетворяющая соотношению  $x_0 = x$ .

**Доказательство.** Построим траекторию  $\{x_n\}$  набора матриц  $A = \{A_1, \dots, A_r\}$ , удовлетворяющую условию  $x_0 = x$ , рекурсивно. Пусть элемент  $x_n$  уже построен. Тогда по определению экстремальной нормы выполняется равенство

$$\rho(A)\|x_n\| = \max \{\|A_1 x_n\|, \|A_2 x_n\|, \dots, \|A_r x_n\|\}.$$

Следовательно, найдется такой индекс  $\sigma_n$ , при котором  $\rho(A)\|x_n\| = \|A_{\sigma_n} x_n\|$ , и для выполнения условий (1), (15) достаточно определить элемент  $x_{n+1}$  равенством  $x_{n+1} = A_{\sigma_n} x_n$ . Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Если набор матриц  $A$  неприводим, то множество его экстремальных траекторий, а с ним и содержащее его множество характеристических траекторий, непусто.

Доказательство следствия вытекает из теоремы 1, утверждающей, что для неприводимого набора матриц множество экстремальных норм непусто, и из леммы 9, согласно которой в этом случае непусто множество экстремальных траекторий.  $\square$

**Лемма 10.** Для любого неприводимого набора матриц  $A$  существуют траектории, экстремальные в любой экстремальной для набора матриц  $A$  норме.

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}$  — экстремальная в некоторой экстремальной норме  $\|\cdot\|_0$  траектория набора матриц  $A$ . Рассмотрим последовательность траекторий  $x_k = \{x_n^{(k)}\}$ , отвечающих набору матриц  $A$ , определяемых соотношениями

$$x_n^{(k)} = \rho^{-k} x_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При каждом фиксированном  $n = 0, 1, \dots$  множество элементов  $\{x_n^{(k)}\}$  в силу экстремальности траектории  $\{x_n\}$  равномерно ограничено:

$$\|x_n^{(k)}\|_0 = \|\rho^{-k} x_{n+k}\|_0 = \rho^n \|x_0\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $\rho = \rho(A)$ . Следовательно, по лемме 2 последовательность траекторий  $x_k$  компактна в пространстве  $\Omega(\mathbb{R}^m)$ , и потому не ограничивая общности можно считать, что при каждом  $n = 0, 1, \dots$  существует предел

$$x_n^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho^{-k} x_{n+k}, \quad (16)$$

причем в силу замкнутости по лемме 2 в  $\Omega(\mathbb{R}^m)$  множества всех траекторий набора матриц  $A$  последовательность  $x^* = \{x_n^*\}_{n=0}^\infty$  является траекторией набора матриц  $A$ .

Покажем, что траектория  $x^* = \{x_n^*\}_{n=0}^\infty$  является экстремальной в любой экстремальной для набора матриц  $A$  норме. Выберем произвольную экстремальную для набора матриц  $A$  норму  $\|\cdot\|_*$ . Тогда по определению свойства экстремальности нормы для траектории  $\{x_n\}$  имеют место неравенства

$$\|x_0\|_* \geq \rho^{-1} \|x_1\|_* \geq \rho^{-2} \|x_2\|_* \geq \dots \geq \rho^{-n} \|x_n\|_* \geq \dots \geq c_1 > 0.$$

Следовательно, последовательность  $\{\rho^{-n}\|x_n\|_*\}$  монотонно убывает и для нее существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{-n}\|x_n\|_* = \omega \geq c_1 > 0.$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\rho^{-n}\|x_n^*\|_* = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho^{-(n+k)}\|x_{n+k}\|_* = \omega, \quad n = 0, 1, \dots,$$

и значит, траектория  $\mathbf{x}^* = \{x_n^*\}_{n=0}^\infty$  экстремальна в экстремальной норме  $\|\cdot\|_*$ . Лемма доказана.  $\square$

Через  $\mathcal{E}(A, x)$  обозначим множество всех экстремальных траекторий  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  набора матриц  $A$ , удовлетворяющих начальному условию  $x_0 = x \neq 0$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$  — компакт, не содержащий нуля, и пусть  $A$  — неприводимый набор  $t \times t$  матриц. Тогда найдется такая компактная окрестность  $\mathcal{A}$  набора матриц  $A$ , что при  $A' \in \mathcal{A}$  и  $x \in \mathcal{X}$  отображение

$$(A', x) \mapsto \mathcal{E}(A', x) \tag{17}$$

компактно и полунепрерывно сверху.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A}$  — это та замкнутая окрестность набора матриц  $A$ , существование которой утверждается в лемме 6. Введем множества

$$\mathcal{E} = \bigcup_{A' \in \mathcal{A}} \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{E}(A', x), \quad \mathcal{T} = \bigcup_{A' \in \mathcal{A}} \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(A', x),$$

и заметим, что множество  $\mathcal{E}$ , будучи подмножеством компактного в силу лемм 1 и 2 в пространстве  $\Omega(\mathbb{R}^m)$  множества  $\mathcal{T}$ , также компактно в пространстве  $\Omega(\mathbb{R}^m)$ .

Покажем теперь, что график отображения (17) замкнут в  $\mathcal{A} \times \mathcal{X} \times \Omega(\mathbb{R}^m)$ . Выберем последовательность элементов  $(A^{(k)}, x^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)})$ , где  $A^{(k)} \in \mathcal{A}$  и  $x^{(k)} \in \mathcal{X}$ , принадлежащую графику отображения (17) и сходящуюся к некоторому элементу  $(A^*, x^*, \mathbf{x}^*) \in \mathcal{A} \times \mathcal{X} \times \Omega(\mathbb{R}^m)$ . Тогда последовательность  $(A^{(k)}, x^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)})$  принадлежит также графику отображения  $\mathcal{T}(A, x)$ . В этом случае в силу компактности и полунепрерывности сверху отображения  $\mathcal{T}(A, x)$  (см. лемму 2) предельный элемент  $(A^*, x^*, \mathbf{x}^*)$  также принадлежит графику отображения  $\mathcal{T}(A, x)$ :

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{T}(A^*, x^*),$$

т.е.  $\mathbf{x}^*$  является траекторией набора матриц  $A^* \in \mathcal{A}$ , удовлетворяющей начальному условию  $x^* \in \mathcal{X}$ . Осталось показать, что траектория  $\mathbf{x}^*$  экстремальная.

По построению  $\mathbf{x}^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$  является траекторией набора матриц  $A^{(k)}$ , экстремальной в некоторой экстремальной норме  $\|\cdot\|^{(k)}$ . Поэтому

$$\|x_0^{(k)}\|^{(k)} = \rho^{-1}(A^{(k)})\|x_1^{(k)}\|_k = \dots = \rho^{-n}(A^{(k)})\|x_n^{(k)}\|^{(k)} = \dots \tag{18}$$

При этом в силу теоремы 2 можно считать, что последовательность экстремальных норм  $\|\cdot\|^{(k)}$  сходится к некоторой экстремальной норме  $\|\cdot\|_*$  набора матриц  $A^*$ . Поэтому, переходя к пределу в (18), получаем<sup>3</sup>:

$$\|x_0^*\|_* = \rho^{-1}(A^*)\|x_1^*\|_* = \dots = \rho^{-n}(A^*)\|x_n^*\|_* = \dots$$

Полученные соотношения означают, что траектория  $\mathbf{x}^* = \{x_n^*\}$  набора матриц  $A^*$  является экстремальной в экстремальной норме  $\|\cdot\|_*$ .

<sup>3</sup> Заметим, что здесь  $\rho(A^{(k)}) \rightarrow \rho(A^*)$  при  $k \rightarrow \infty$  в силу непрерывной зависимости [12] обобщенного спектрального радиуса набора матриц от этого набора.

Итак, нами доказано, что график отображения (17) замкнут и при этом множество  $\mathcal{E}$  компактно. Отсюда по лемме 1 вытекает компактность и полунепрерывность сверху отображения (17). Теорема доказана.  $\square$

Описание экстремальных траекторий  $x = \{x_n\}$ , помимо собственно последовательности  $\{x_n\}$ , включает еще и индексную последовательность  $\{\sigma_n\}$ . Ниже предлагается конструкция, которая позволяет определить экстремальные траектории как все возможные траектории некоторой многозначной нелинейной динамической системы, отказавшись, таким образом, от явного описания индексной последовательности  $\{\sigma_n\}$ .

Пусть  $\rho = \rho(A)$ , и пусть  $\|\cdot\|_*$  — некоторая экстремальная для набора матриц  $A = \{A_1, \dots, A_r\}$  норма. Определим при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$  отображение  $g(x)$ , полагая

$$g(x) := \{w : \exists i \in \{1, \dots, r\} \text{ при котором } w = A_i x, \text{ где } \|A_i x\|_* = \rho \|x\|_*\}.$$

В силу определения экстремальной нормы множество  $g(x)$  при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$  непусто и состоит не более чем из  $m$  элементов. Отметим, что каждое отображение  $g(x)$  обладает замкнутым графиком и для него справедливо тождество

$$\|g(x)\|_* \equiv \rho \|x\|_*. \quad (19)$$

**Лемма 11.** *Последовательность  $x = \{x_n\}$  является экстремальной траекторией набора матриц  $A$  в экстремальной норме  $\|\cdot\|_*$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет включениям*

$$x_{n+1} \in g(x_n), \quad \forall n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы непосредственно следует из определения экстремальной нормы и отображения  $g$ .  $\square$

Согласно лемме 11 любая траектория многозначного отображения  $g(\cdot)$  оказывается экстремальной траекторией набора матриц  $A$  в норме  $\|\cdot\|_*$ . Это дает основание назвать отображение  $g(\cdot)$  *генератором экстремальных траекторий*. Так же, как и экстремальная норма, отображение  $g(\cdot)$  в общем случае не может быть указано в явном виде. Тем не менее, в разделе 5 будет получено достаточно детально описание свойств генераторов экстремальных траекторий для наборов неотрицательных  $2 \times 2$  матриц.

#### 4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ НОРМЫ (СЛУЧАЙ ДВУХ ДВУМЕРНЫХ МАТРИЦ)

В этом разделе для случая набора  $A$ , состоящего из двух двумерных неотрицательных матриц, устанавливаются дополнительные свойства экстремальных норм и траекторий.

##### 4.1. Определение и свойства набора матриц

Рассматривается пара матриц

$$A_0 = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \beta \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Предполагается, что  $\alpha, \beta > 0$  и

$$bc \geq 1 > a, d > 0. \quad (21)$$

В этом случае итерации произвольной точки под действием матрицы  $A_0$  стягиваются к подпространству  $L_0 = \{(x_0, x_1) : bx_1 = (1-a)x_0\}$ , а итерации произвольной точки под действием матрицы  $A_1$  стягиваются к подпространству  $L_1 = \{(x_0, x_1) : (1-d)x_1 = cx_0\}$  (см. рис. 1). При этом предельные инвариантные подпространства  $L_0$  и  $L_1$  будут различными, а их расположение будет таким, как на рис. 1, в случае, когда  $bc > (1-a)(1-d)$ , а следовательно, и подавно при выполнении условия (21).

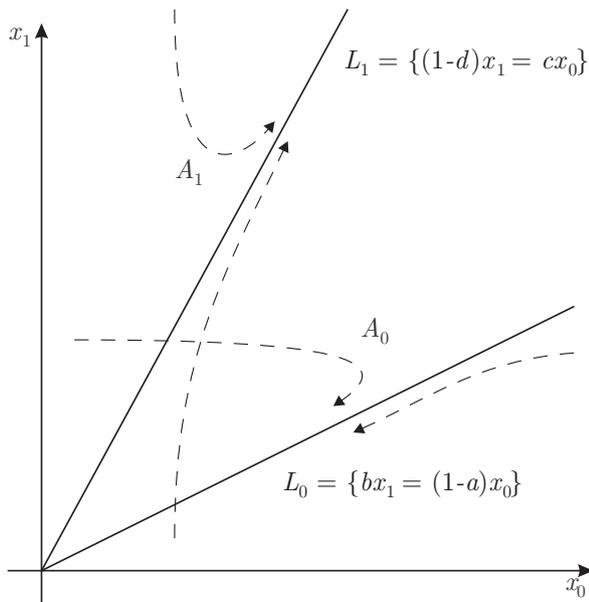


Рис. 1. Действие матриц  $A_0, A_1$

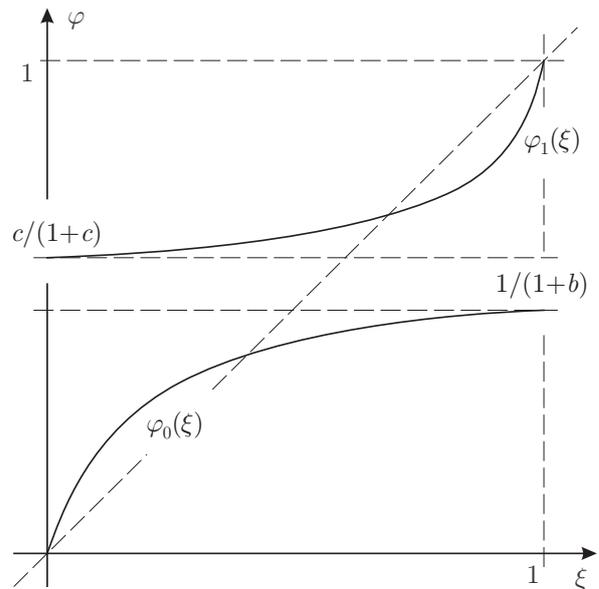


Рис. 2. Графики функций  $\varphi_0(\xi), \varphi_1(\xi)$

Отождествим луч  $t(x_0, x_1), t > 0$ , проходящий через точку  $(x_0, x_1) \neq 0$  с координатами  $x_0, x_1 \geq 0$  с точкой  $\xi = x_1/(x_0 + x_1) \in [0, 1]$ . При этом положительной полуоси абсцисс (лучу  $t(1, 0)$ ) соответствует точка  $\xi = 0$ , а положительной полуоси ординат (лучу  $t(0, 1)$ ) соответствует точка  $\xi = 1$ . Тогда матрица  $A_0$  переводит луч с координатой  $\xi$  в луч с координатой  $\varphi_0(\xi)$ , где

$$\varphi_0(\xi) = \frac{\xi}{a(1 - \xi) + b\xi + \xi}, \tag{22}$$

а матрица  $A_1$  переводит луч с координатой  $\xi$  в луч с координатой  $\varphi_1(\xi)$ :

$$\varphi_1(\xi) = \frac{c(1 - \xi) + d\xi}{c(1 - \xi) + d\xi + 1 - \xi}. \tag{23}$$

При выполнении условия  $bc \geq 1$  для любых  $0 \leq \xi, \zeta \leq 1$  выполняются неравенства  $\varphi_1(\xi) \geq \varphi_0(\zeta)$ . Более того, функция  $\varphi_0(\xi)$  строго возрастает при  $a > 0$ , а функция  $\varphi_1(\xi)$  строго возрастает при  $d > 0$ . Следовательно, при выполнении условий (21) графики функций  $\varphi_0(\xi)$  и  $\varphi_1(\xi)$  имеют вид, изображенный на рис. 2.

Рассмотрим также пару матриц, сопряженных к матрицам  $A_0$  и  $A_1$ :

$$A'_0 = \alpha \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}, \quad A'_1 = \beta \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}.$$

В этом случае итерации произвольной точки под действием матрицы  $A'_0$  стремятся к оси  $\{x_0 = 0\}$ , а итерации произвольной точки под действием матрицы  $A'_1$  стремятся к оси  $\{x_1 = 0\}$  (см. рис. 3).

Подпространство  $\{x_0 = 0\}$  под действием матрицы  $A'_1$  переводится в подпространство  $L'_1 = \{(x_0, x_1) : cx_1 = dx_0\}$ . А подпространство  $\{x_1 = 0\}$  под действием матрицы  $A'_0$  переводится в подпространство  $L'_0 = \{(x_0, x_1) : ax_1 = bx_0\}$ . Такое расположение пространств, как показано на рис. 3, достигается при выполнении условия  $bc > ad$ , а следовательно, и подавно при выполнении условия (21).

Матрица  $A'_0$  переводит луч с координатой  $\xi$  в луч с координатой  $\psi_0(\xi)$ , где

$$\psi_0(\xi) = \frac{b(1 - \xi) + \xi}{a(1 - \xi) + b(1 - \xi) + \xi},$$

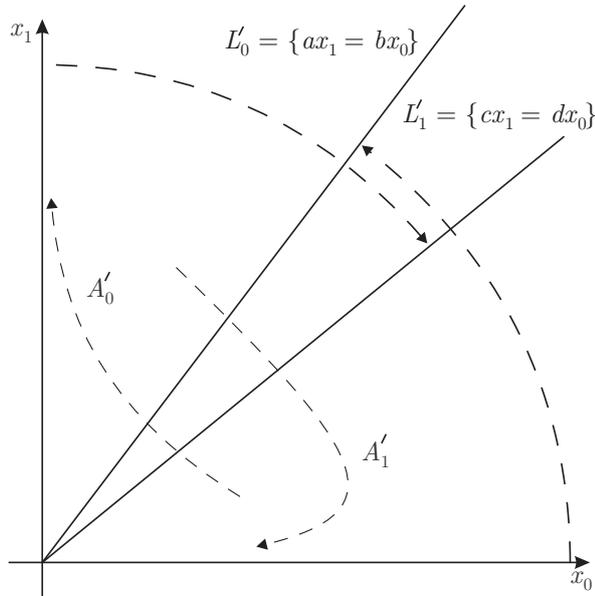


Рис. 3. Действие матриц  $A'_0, A'_1$

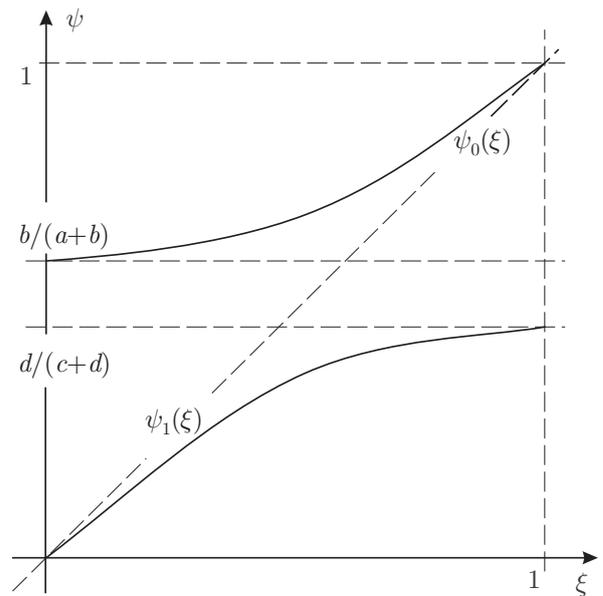


Рис. 4. Графики функций  $\psi_0(\xi), \psi_1(\xi)$

а матрица  $A'_1$  переводит луч с координатой  $\xi$  в луч с координатой  $\psi_1(\xi)$ :

$$\psi_1(\xi) = \frac{d\xi}{1 - \xi + c\xi + d\xi}.$$

Графики функций  $\psi_0(\xi)$  и  $\psi_1(\xi)$  приведены на рис. 4.

#### 4.2. Граница единичного шара экстремальной нормы в первом квадранте

Обозначим через  $\mathcal{M}^\sharp \subset \mathcal{M}_{2,2}$  множество всех наборов  $A$  матриц  $A_0$  и  $A_1$  вида (20), удовлетворяющих условию (21). Из вида инвариантных пространств матриц  $A_0$  и  $A_1$  следует, что каждый набор матриц  $A \in \mathcal{M}^\sharp$  неприводим. Зафиксируем в пространстве  $\mathbb{R}^2$  некоторую экстремальную норму  $\|\cdot\|$ , отвечающую  $A$ , и обозначим через  $\mathbb{S}$  единичный шар в норме  $\|\cdot\|$ . Напомним, что линейный функционал  $l(x), x \in \mathbb{R}^2$ , называется *опорным* для единичного шара  $\mathbb{S}$ , если

$$\sup_{x \in \mathbb{S}} |l(x)| \leq 1, \quad \text{и} \quad \exists u_* \in \mathbb{S} : l(u_*) = 1.$$

Согласно теореме Хана-Банаха, для каждой точки  $u \in \mathbb{S}, \|u_*\| = 1$ , найдется такой опорный функционал  $l_*$ , что  $l_*(u_*) = 1$ . Отметим, что каждый линейный функционал  $l(x)$  задается некоторой линейной формой

$$l(x) \equiv \langle l, x \rangle := l_0x_0 + l_1x_1, \quad \text{где} \quad l = (l_0, l_1), \quad x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2.$$

**Лемма 12.** Если  $\|\cdot\|$  — экстремальная для набора матриц  $A \in \mathcal{M}^\sharp$  норма, то для каждого вектора  $u \in \mathbb{S}$  единичной нормы с неотрицательными координатами опорный функционал  $l(x) = \langle l, x \rangle$ , удовлетворяющий условию  $l(u) = 1$ , также имеет неотрицательные координаты. Другими словами, единичный шар в экстремальной норме в первом квадранте имеет вид, приведенный на рис. 5.

**Доказательство.** Пусть  $\|\cdot\|$  — экстремальная для набора матриц  $A \in \mathcal{M}^\sharp$  норма и  $u_* = (0, u_{*,1})$  — точка, лежащая на единичной сфере шара  $\mathbb{S} = \{x : \|x\| = 1\}$ , т.е.  $\|u_*\| = 1$ . Покажем, что в этом

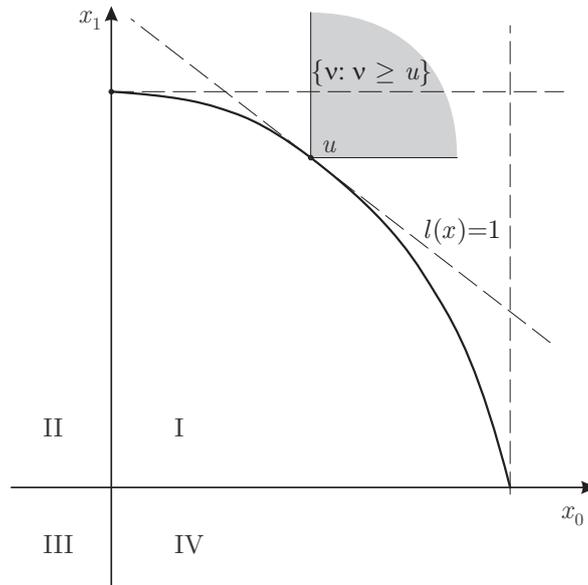


Рис. 5. Единичный шар в экстремальной норме

случае для любой точки  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{S}$ , лежащей в первом квадранте (т.е. для которой  $x_0, x_1 \geq 0$ ) будет выполняться соотношение

$$x_1 \leq u_{*,1}.$$

Предположим противное — существуют точки  $u_n = (u_{n,0}, u_{n,1})$ ,  $\|u_n\| = 1$ , для которых  $u_{n,1} > u_{*,1}$ . Обозначим через  $l_0(x)$  опорный функционал к шару  $\mathbb{S}$ , удовлетворяющий соотношению  $l_0(u_*) = 1$ . Тогда по определению точек  $u_n$  будет выполняться соотношение

$$l_0(u_n) \leq l_0(u_*) = 1, \tag{24}$$

а поскольку шару  $\mathbb{S}$  принадлежит и некоторая окрестность нулевой точки, то

$$l_0(u) \leq l_0(u_*) = 1, \quad \forall u : \|u\| \text{ достаточно мала.} \tag{25}$$

Из соотношений (24), (25) следует, что опорная прямая  $l_0$  параллельна направлению, проходящему через первый квадрант. А тогда все вектора  $u_n - u_*$  принадлежат внутренности первого квадранта.

Заметим теперь, что  $\rho = \rho(A) \geq \rho(A_1) = \beta$ . А так как  $A_1 u_* = \beta d u_*$ , то  $\|A_1 u_*\| < \rho \|u_*\|$ . Тогда из определения экстремальной нормы вытекает равенство

$$\rho \|u_*\| = \max\{\|A_0 u_*\|, \|A_1 u_*\|\} = \|A_0 u_*\|.$$

Следовательно, вектор  $v = \rho^{-1} A_0 u_*$  лежит на границе шара  $\mathbb{S}$  (см. рис. 6) и при этом  $v_1 = \rho^{-1} \beta u_{*,1} \leq u_{*,1}$ .

Обозначим через  $l_1(x)$  опорный функционал к шару  $\mathbb{S}$ , удовлетворяющий соотношению  $l_1(v) = 1$ . Тогда по определению точки  $u_*$  будет выполняться соотношение

$$l_1(u_*) \leq l_1(v) = 1, \tag{26}$$

а поскольку шару  $\mathbb{S}$  принадлежит и некоторая окрестность нулевой точки, то

$$l_1(u) \leq l_1(v) = 1, \quad \forall u : \|u\| \text{ достаточно мала.} \tag{27}$$

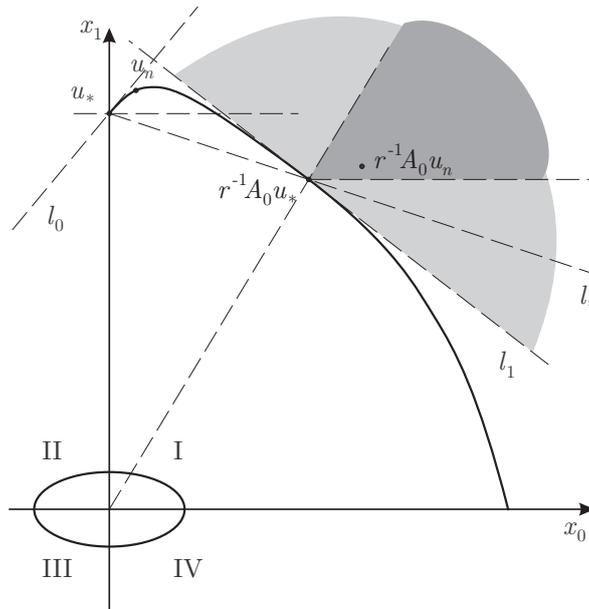


Рис. 6. Граница единичного шара: невозможная ситуация

Из соотношений (26), (27) следует, что опорная прямая  $l_1$  такова, что множеству  $\{x : l_1(x) > 1\}$  принадлежит сектор, выделяемый лучом параллельным оси абсцисс, выходящим из точки  $v = \rho^{-1} A_0 u_*$ , и лучом  $tv, t \geq 1$  (на рис. 6 этот сектор выделен темно-серым цветом).

Рассмотрим теперь последовательность точек  $u_n \rightarrow u_*, \|u_n\| = 1$ , для которых выполняется соотношение  $u_{n,1} > u_{*,1}$ . Согласно определению экстремальной нормы

$$\rho \|u_n\| = \max\{\|A_0 u_n\|, \|A_1 u_n\|\}. \tag{28}$$

Но поскольку  $u_n \rightarrow u_*$ , то  $\|A_1 u_n\| \rightarrow \|A_1 u_*\| < \rho$ , а тогда из (28) следует, что  $\rho = \rho \|u_n\| = \|A_0 u_n\|$  или, что то же самое, что

$$\|\rho^{-1} A_0 u_n\| = 1 \quad \text{при всех достаточно больших } n. \tag{29}$$

Но с другой стороны вектор  $u_n - u_*$ , как было установлено выше, принадлежит внутренности первого квадранта, а тогда, как показывает подсчет, вектор  $A_0(u_n - u_*)$  принадлежит внутренности сектора, образованного положительной частью оси абсцисс и лучом  $tv = tA_0 u_*$ . В этом случае вектора

$$\rho^{-1} A_0 u_n = \rho^{-1} A_0 u_* + \rho^{-1} A_0 (u_n - u_*)$$

должны принадлежать внутренности сектора, выделенного на рис. 6 темно-серым цветом, что противоречит соотношению (29). Полученное соотношение доказывает невозможность ситуации, изображенной на рис. 6.

Аналогично доказывается, что если вектор  $v_* = (v_{*,0}, 0)$  таков, что его норма равна единице, т.е.  $\|v_*\| = 1$ , то пересечение шара  $\mathbb{S}$  с первым квадрантом лежит целиком левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $v_* = (v_{*,0}, 0)$  (см. рис. 5). Отсюда уже немедленно следует утверждение леммы.  $\square$

Из леммы 12 вытекает важное следствие. Назовем норму  $\|\cdot\|$  *монотонной* (относительно конуса элементов с неотрицательными координатами), если для любой пары векторов  $u$  и  $v$  из соотношений  $v \geq u \geq 0$ , где неравенства понимаются по координатам, вытекает неравенство  $\|v\| \geq \|u\|$ .

**Лемма 13.** *Любая экстремальная для набора матриц  $A \in M^\sharp$  норма монотонна.*

Доказательство леммы 13 непосредственно вытекает из описания структуры границы единичного шара экстремальной нормы, полученного в лемме 12, и из рис. 5, на котором изображено взаимное расположение множеств точек  $\{v : v \geq u\}$  и  $\{x : \|x\| \leq \|u\|\}$ .  $\square$

Введем в рассмотрение множества

$$X_0 = \{x : \|A_0x\| = \rho\|x\|\}, \quad X_1 = \{x : \|A_1x\| = \rho\|x\|\}. \quad (30)$$

Каждое из этих множеств замкнуто, коническое (т.е. содержит вместе с вектором  $x \neq 0$  и любой вектор вида  $tx$ ), и в силу определения экстремальной нормы  $X_0 \cup X_1 = \mathbb{R}^2$ .

Множество  $\Theta = X_0 \cap X_1$  будет называться *перекрывающим* множеством экстремальной нормы  $\|\cdot\|$ . Для анализа структуры множеств  $X_0, X_1$  и  $\Theta$  нам понадобятся дополнительные сведения.

### 4.3. Символ Грама

Пусть имеется пара векторов  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , и пара линейных функционалов

$$u(w) = \langle u, w \rangle, \quad v(w) = \langle v, w \rangle, \quad u, v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда *символом Грама* упорядоченной четверки ненулевых векторов  $\{u, v, x, y\}$  называется выражение

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} = u(x)v(y) - u(y)v(x) \equiv \langle u, x \rangle \langle v, y \rangle - \langle u, y \rangle \langle v, x \rangle. \quad (31)$$

**Лемма 14.**

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} = 0 \quad \iff \quad u = tv \quad \text{или} \quad x = ty.$$

При этом

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} \geq 0 \quad \text{при} \quad x = u, \quad y = v, \quad (32)$$

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} \leq 0 \quad \text{при} \quad x = v, \quad y = u. \quad (33)$$

**Доказательство.** По определению (31), символ Грама четверки ненулевых векторов  $\{u, v, x, y\}$  обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\langle u, x \rangle \langle v, y \rangle - \langle u, y \rangle \langle v, x \rangle = \langle u, x \langle v, y \rangle - y \langle v, x \rangle \rangle = 0.$$

Если при этом  $x \langle v, y \rangle - y \langle v, x \rangle = 0$ , то  $x = ty$  и лемма доказана. Поэтому будем считать, что  $w = x \langle v, y \rangle - y \langle v, x \rangle \neq 0$ . Тогда по предположению

$$\langle u, w \rangle = 0, \quad w \neq 0. \quad (34)$$

Кроме того, очевидно,

$$\langle v, w \rangle = \langle v, x \langle v, y \rangle - y \langle v, x \rangle \rangle \equiv 0. \quad (35)$$

В двумерном пространстве равенства (34), (35) с ненулевым  $w$  могут выполняться только при условии,  $u = tv$ .

Доказательство соотношений (32) и (33) непосредственно вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{Bmatrix} u & u \\ v & v \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} u & v \\ v & u \end{Bmatrix} = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2 \geq 0.$$

Лемма доказана.  $\square$

Из леммы 14 вытекает, что при непрерывных и не обращающихся в нуль деформациях упорядоченных пар векторов  $\{u, v\}$  и  $\{x, y\}$ , удовлетворяющих соотношениям  $u \neq tv$  и  $x \neq ty$ , знак символа Грама не меняется. При этом каждая упорядоченная пара векторов  $\{u, v\}$  и  $\{x, y\}$  может быть деформирована либо в упорядоченную пару векторов  $\{e_1, e_2\}$ , либо в пару  $\{e_2, e_1\}$ , где

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1).$$

Таким образом, геометрический смысл символа Грама заключается в том, что упорядоченная пара векторов  $\{x, y\}$  имеет ту же ориентацию, что и упорядоченная пара векторов  $\{u, v\}$  в том и только том случае, когда символ Грама соответствующей упорядоченной четверки векторов  $\{u, v, x, y\}$  положителен.

#### 4.4. Структура переключающего множества в первом квадранте

Пусть  $\mathbb{S}$  — единичный шар в экстремальной норме  $\|\cdot\|$  и

$$\mathbb{S}' = \{u \in \mathbb{R}^2 : \sup_{x \in \mathbb{S}} |\langle u, x \rangle| \leq 1\}.$$

Обозначим через  $K_+$  конус векторов в  $\mathbb{R}^2$  с неотрицательными координатами.

**Лемма 15.** Пусть  $\|\cdot\|'$  — норма, единичный шар которой совпадает с  $\mathbb{S}'$ . Тогда

$$|\langle u, x \rangle| \leq \|x\| \|u\|'. \quad (36)$$

При этом для каждого вектора  $x \neq 0$  найдется вектор  $u \neq 0$  такой, что  $\langle u, x \rangle = \|x\| \cdot \|u\|'$ ; более того если  $x \in K_+$ , то и  $u \in K_+$ .

**Доказательство.** Неравенство (36) является следствием определения дуальной нормы  $\|u\|'$  и доказывается в любом курсе теории векторных топологических пространств. Тот факт, что равенство  $\langle u, x \rangle = \|x\| \cdot \|u\|'$  для  $x \in K_+$  выполняется при  $u \in K_+$ , вытекает из леммы 12.  $\square$

Пусть теперь  $x, y \neq 0$  — произвольная пара векторов, удовлетворяющих соотношениям  $x \in X_0 \cap K_+$ ,  $y \in X_1 \cap K_+$ . Тогда, в силу неотрицательности элементов матриц  $A_0$  и  $A_1$ ,

$$A_0x \in K_+, \quad \|A_0x\| = \rho\|x\|, \quad A_1y \in K_+, \quad \|A_1y\| = \rho\|y\|,$$

и по лемме 15 найдутся такие ненулевые вектора  $u, v \in K_+$ , для которых

$$\langle u, A_0x \rangle = \|u\|' \|A_0x\| = \rho \|u\|' \|x\|, \quad (37)$$

$$\langle v, A_1y \rangle = \|v\|' \|A_1y\| = \rho \|v\|' \|y\|. \quad (38)$$

С другой стороны в силу (36) и определения экстремальной нормы имеем:

$$\langle u, A_0y \rangle \leq \|u\|' \|A_0y\| \leq \rho \|u\|' \|y\|, \quad (39)$$

$$\langle v, A_1x \rangle = \|v\|' \|A_1x\| \leq \rho \|v\|' \|x\|. \quad (40)$$

Из соотношений (37), (38), (39) и (40) получаем:

$$\langle u, A_0x \rangle \langle v, A_1y \rangle = \rho^2 \|u\|' \|v\|' \|x\| \|y\| \geq \langle u, A_0y \rangle \langle v, A_1x \rangle.$$

Тогда

$$\begin{Bmatrix} A'_0 u & x \\ A'_1 v & y \end{Bmatrix} = \langle A'_0 u, x \rangle \langle A'_1 v, y \rangle - \langle A'_0 u, y \rangle \langle A'_1 v, x \rangle \geq 0. \quad (41)$$

Итак, доказана

**Лемма 16.** Пусть  $x, y \neq 0$  — произвольная пара векторов, удовлетворяющих соотношениям  $x \in X_0 \cap K_+, y \in X_1 \cap K_+$ . Тогда найдутся такие ненулевые вектора  $u, v \in K_+$ , для которых выполняется соотношение (41).

Доказанная лемма является ключевой в установлении структуры множеств  $X_0 \cap K_+$  и  $X_1 \cap K_+$ .

**Теорема 5.** Пусть  $A = \{A_0, A_1\}$  — набор матриц, определяемых равенствами (20) и удовлетворяющих условиям (21), и пусть  $\|\cdot\|$  — экстремальная норма, отвечающая набору  $A$ . Тогда каждое из множеств  $X_0 \cap K_+$  и  $X_1 \cap K_+$  является сектором, расположенным как указано на рис. 7, причем эти сектора пересекаются по лучу:

$$\Theta = X_0 \cap X_1 \cap K_+ = \{t\vartheta : t \in \mathbb{R}_+\} \tag{42}$$

проходящему через некоторый вектор  $\vartheta \in K_+, \|\vartheta\| = 1$ . При этом вектор  $\vartheta$  принадлежит сектору, выделяемому в конусе  $K_+$  прямыми

$$L_0 = \{(x_0, x_1) : bx_1 = (1 - a)x_0\} \quad \text{и} \quad L_1 = \{(x_0, x_1) : (1 - d)x_1 = cx_0\},$$

является единственным решением системы уравнений

$$\|A_1x\| = \|A_2x\|, \quad \|x\| = 1, \quad x \in K_+, \tag{43}$$

и непрерывно зависит от матриц  $A_0$  и  $A_1$  и экстремальной нормы  $\|\cdot\|$ .

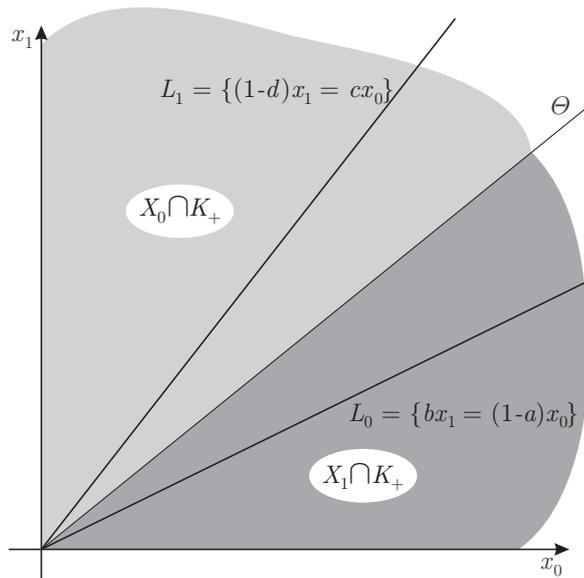


Рис. 7. Расположение секторов  $X_0 \cap K_+$  и  $X_1 \cap K_+$

**Доказательство.** По лемме 16 для произвольной пары ненулевых векторов  $x \in X_0 \cap K_+, y \in X_1 \cap K_+$ , не пропорциональных друг другу, найдутся такие ненулевые вектора  $u, v \in K_+$ , при которых символ Грама четверки  $\{A'_0u, A'_1v, x, y\}$  неотрицателен. Это означает, что упорядоченная пара векторов  $\{x, y\}$  имеет ту же ориентацию, что и упорядоченная пара векторов  $\{A'_0u, A'_1v\}$ . Но при выполнении условия (21) для пары матриц  $A_0, A_1$  как видно из рисунка 3 упорядоченная пара векторов

$\{A'_0 u, A'_1 v\}$  всегда ориентирована отрицательно, т.е. вектор  $A'_1 v$  получается из вектора  $A'_0 u$  вращением по часовой стрелке на угол, не превышающий  $\pi$ , и растяжением или сжатием. Следовательно, и упорядоченная пара векторов  $\{x, y\}$  также ориентирована отрицательно.

Итак, любая упорядоченная пара ненулевых векторов  $x \in X_0 \cap K_+$ ,  $y \in X_1 \cap K_+$ , не пропорциональных друг другу, оказывается ориентированной отрицательно. А поскольку множества  $X_0 \cap K_+$  и  $X_1 \cap K_+$  замкнутые и конические, т.е. содержат вместе с каждым своим ненулевым элементом и луч, проходящий через этот элемент, то им не остается никаких возможностей кроме как быть такими, как указано в утверждении теоремы.

Выберем теперь произвольный ненулевой вектор  $x_*$  из множества  $K_+ \cap L_0$ . В этом случае  $x_*$  является собственным вектором матрицы  $A_0$ , отвечающим ее собственному значению  $a < 1$ , т.е.  $A_0 x_* = a x_*$ . Тогда

$$\|A_0 x_*\| = a \|x_*\| < \rho \|x_*\|,$$

где  $\rho = \rho(A) \geq \rho(A_0) = 1$ , откуда в силу экстремальности нормы  $\|\cdot\|$  следует, что  $x_* \notin X_0$ . Потому  $x_* \in X_1$  и, значит,

$$K_+ \cap L_0 \subset X_1. \quad (44)$$

Аналогично получаем, что каждый ненулевой вектор  $x^*$  из множества  $K_+ \cap L_1$  должен принадлежать множеству  $X_0$ , т.е.

$$K_+ \cap L_1 \subset X_0. \quad (45)$$

Из включений (44) и (45) вытекает утверждение теоремы о том, что вектор  $\vartheta$  принадлежит сектору, выделяемому в конусе  $K_+$  прямыми  $L_0$  и  $L_1$ .

То, что вектор  $\vartheta$  является единственным решением системы уравнений (43), непосредственно вытекает из определений (30), (42) множеств  $X_0, X_1$  и  $\Theta$ , и того факта, что множество  $\Theta$  является лучом. Поэтому для завершения доказательства теоремы осталось установить лишь непрерывную зависимость  $\vartheta$  от матриц  $A_0$  и  $A_1$  и экстремальной нормы  $\|\cdot\|$ .

Пусть  $\{A_0^{(n)}\}$  и  $\{A_1^{(n)}\}$  — последовательности матриц (20), удовлетворяющих условиям (21), а  $\{\|\cdot\|^{(n)}\}$  — отвечающая этим матрицам последовательность экстремальных норм. Предположим, что

$$A_0^{(n)} \rightarrow A_0^{(0)}, \quad A_1^{(n)} \rightarrow A_1^{(0)}, \quad \|\cdot\|^{(n)} \rightarrow \|\cdot\|^{(0)},$$

где под сходимостью матриц понимается поэлементная сходимость, а под сходимостью норм понимается сходимость в пространстве  $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ . Обозначим через  $\{\vartheta^{(n)}\}$  последовательность векторов, удовлетворяющих системам уравнений

$$\|A_1^{(n)} \vartheta^{(n)}\|^{(n)} = \|A_2^{(n)} \vartheta^{(n)}\|^{(n)}, \quad \|\vartheta^{(n)}\|^{(n)} = 1, \quad \vartheta^{(n)} \in K_+, \quad (46)$$

Для доказательства сходимости  $\vartheta^{(n)} \rightarrow \vartheta^{(0)}$  достаточно показать, что любая предельная точка  $\vartheta^*$  последовательности  $\{\vartheta^{(n)}\}$  совпадает с  $\vartheta^{(0)}$ . Но это действительно так, поскольку, переходя к пределу в (46), убеждаемся, что  $\vartheta^*$  удовлетворяет уравнениям

$$\|A_1^{(0)} x\|^{(0)} = \|A_2^{(0)} x\|^{(0)}, \quad \|x\|^{(0)} = 1, \quad x \in K_+.$$

А поскольку единственным решением последней системы уравнений является по определению вектор  $\vartheta^{(0)}$ , то  $\vartheta^* = \vartheta^{(0)}$ .

Итак, непрерывная зависимость вектора  $\vartheta$  от матриц  $A_0$  и  $A_1$  и экстремальной нормы  $\|\cdot\|$  установлена и, тем самым, доказательство теоремы 5 завершено.  $\square$

5. ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ (СЛУЧАЙ ДВУХ ДВУМЕРНЫХ МАТРИЦ)

В настоящем разделе мы продолжим анализ свойств экстремальных траекторий наборов  $2 \times 2$  матриц  $A = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$ . Нашей основной целью будет доказательство следующего утверждения.

**Теорема 6** (о частоте переключения экстремальных траекторий). *Для любой экстремальной траектории  $\{x_n\}$  набора матриц  $A = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$ , определяемой уравнением*

$$x_{n+1} = A_{\sigma_n} x_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

*с индексной последовательностью  $\{\sigma_n\}$ , определена частота*

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i}{n}$$

*применения матрицы  $A_1$  для построения траектории  $\{x_n\}$  (частота переключения траектории).*

*Частота  $\sigma$  не зависит от выбора экстремальной траектории  $\{x_n\}$  или индексной последовательности  $\{\sigma_n\}$  и, таким образом, может быть обозначена как  $\sigma(A)$ . При этом  $\sigma(A)$  непрерывно зависит от матриц набора  $A$  и принимает рациональное значение тогда и только тогда, когда набор матриц  $A$  обладает экстремальной траекторией, определяемой периодической индексной последовательностью  $\{\sigma_n\}$ .*

Для доказательства теоремы 6 нам потребуются вспомогательные результаты и конструкции.

5.1. Структура генератора экстремальных траекторий

Зафиксируем в пространстве  $\mathbb{R}^2$  некоторую экстремальную для набора матриц  $A$  норму  $\|\cdot\|$  и обозначим через  $X_0$  и  $X_1$  множества (30), определяемые по этой норме. В этом случае генератор экстремальных траекторий  $g(\cdot)$  (см. определение в разделе 3.4) в норме  $\|\cdot\|$  примет вид

$$g(x) = \begin{cases} \rho^{-1}A_0x, & \text{если } x \in X_0 \setminus X_1, \\ \rho^{-1}A_1x, & \text{если } x \in X_1 \setminus X_0, \\ \{\rho^{-1}A_0x, \rho^{-1}A_1x\}, & \text{если } x \notin X_0 \cap X_0. \end{cases} \quad (47)$$

где  $\rho = \rho(A)$ .

Изучим более подробно структуру отображения  $g(\cdot)$  в первом квадранте, т.е. в конусе  $K_+ := \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \geq 0\}$ . Введем в  $K_+$  систему координат  $(\lambda, \xi)$ , полагая

$$\lambda(x) = \|x\|, \quad \xi(x) = \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad x \neq 0 \in K_+. \quad (48)$$

Как отмечалось выше (см. (19)), для отображения  $g(\cdot)$  выполняется тождество  $\|g(x)\|_* \equiv \|x\|_*$ . Кроме того, в силу теоремы 5 множества  $X_0 \cap K_+$ ,  $X_1 \cap K_+$  и  $X_0 \cap X_1 \cap K_+$  переводятся отображением  $\xi(\cdot)$  в отрезки  $[\theta, 1]$ ,  $[0, \theta]$  и некоторую точку  $\theta$ , соответственно, т.е.

$$\xi(X_1 \cap K_+) = [0, \theta], \quad \xi(X_0 \cap K_+) = [\theta, 1], \quad \xi(X_0 \cap X_1 \cap K_+) = \theta.$$

Поэтому в системе координат  $(\lambda, \xi)$  отображение  $f$  примет вид отображения с разделяющимися переменными

$$f : (\lambda, \xi) \mapsto (\lambda, \Phi), \quad (49)$$

где

$$\Phi = \Phi(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\xi), & \text{если } \xi \in [0, \theta), \\ \{\varphi_0(\theta), \varphi_1(\theta)\} & \text{если } \xi = \theta, \\ \varphi_0(\xi), & \text{если } \xi \in (\theta, 1]. \end{cases} \quad (50)$$

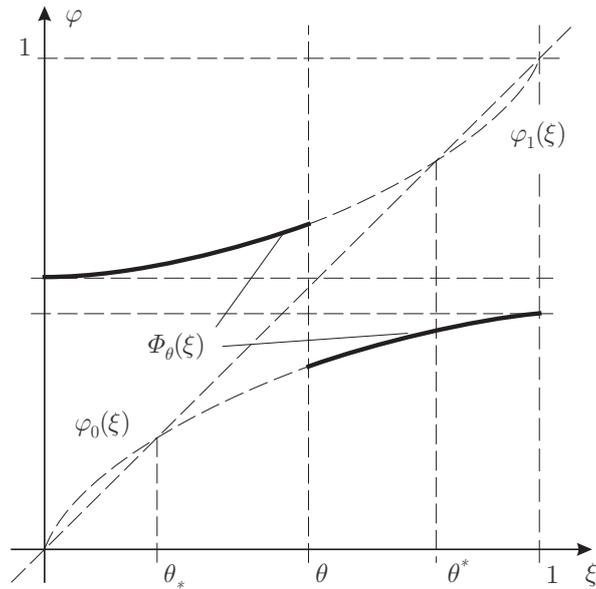


Рис. 8. График функции направления  $\Phi(\xi)$  генератора экстремальных траекторий

Здесь функции  $\varphi_0(\xi)$  и  $\varphi_1(\xi)$  определяются соотношениями (22) и (23) и имеют вид, представленный на рисунке 2. График многозначной функции  $\Phi(\xi)$  изображен на рис. 8.

Отметим, что координата  $\lambda(x)$  характеризует “удаленность” вектора  $x$  от начала координат, в то время как координата  $\xi(x)$  характеризует направление вектора  $x$ . В соответствии с этим,  $\Phi(\xi)$  естественно трактовать как функцию направления генератора экстремальных траекторий.

Из леммы 11, теоремы 5 и вида (49), (50) отображения  $g(\cdot)$  получаем следующее описание экстремальных траекторий.

**Лемма 17.** *Ненулевая траектория  $\{x_n\} \subseteq K_+$  экстремальна для набора матриц  $A = \{A_0, A_1\}$  в экстремальной норме  $\|\cdot\|$  тогда и только тогда, когда ее элементы в системе координат  $(\lambda, \xi)$  представимы в виде  $x_n = (\lambda_n, \xi_n)$ , где  $\lambda_n \equiv \lambda_0$ , а  $\{\xi_n\}$  — траектория многозначного отображения  $\Phi(\cdot)$ , т.е.*

$$\xi_{n+1} \in \Phi(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

параметр  $\theta$  которого удовлетворяет соотношениям  $\theta_* \leq \theta \leq \theta^*$  с константами  $\theta_*, \theta^* \in (0, 1)$ , определяемыми равенствами  $\theta_* = \varphi_0(\theta_*)$  и  $\theta^* = \varphi_1(\theta^*)$ .

При этом траектория  $\{x_n\}$  удовлетворяет уравнениям

$$x_{n+1} = A_{\sigma_n} x_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

с некоторой индексной последовательностью  $\{\sigma_n\}$  тогда и только тогда, когда траектория  $\{\xi_n\}$  удовлетворяет уравнениям

$$\xi_{n+1} = \varphi_{\sigma_n}(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Заметим, что несмотря на то, что экстремальная норма  $\|\cdot\|_*$  в явном виде нам не известна, функция направления генератора экстремальных траекторий  $\Phi(\xi)$  оказывается определенной “достаточно однозначно” — согласно (50) она однозначно определяется тройкой  $(\varphi_0, \varphi_1, \theta)$ , в которой единственным неизвестным параметром оказывается  $\theta$ .

В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть зависимость функции  $\Phi(\xi)$  от определяющей ее тройки  $(\varphi_0, \varphi_1, \theta)$ , будем писать

$$\Phi(\xi) = \Phi[\varphi_0, \varphi_1, \theta](\xi). \quad (51)$$

Но тройка  $(\varphi_0, \varphi_1, \theta)$  в свою очередь зависит от выбора набора матриц  $A$  и отвечающей этому набору матриц экстремальной нормы  $\|\cdot\|$ . Поэтому рассмотрим подробнее вопрос о том, как функции направления  $\Phi(\xi)$  зависят от наборов матриц  $A = \{A_0, A_1\}$  и отвечающих им экстремальных норм  $\|\cdot\|$ .

Согласно (22) и (23) функция  $\varphi_0$  полностью определяется элементами матрицы  $A_0$ , а функция  $\varphi_1$  полностью определяется элементами матрицы  $A_1$ . Чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем писать

$$\varphi_0(\xi) = \varphi_0[A_0](\xi), \quad \varphi_1(\xi) = \varphi_1[A_1](\xi).$$

В то же время параметр  $\theta$  согласно теореме 5 и формулам (47) и (50) является однозначной функцией набора матриц  $A$  и отвечающей этому набору экстремальной нормы  $\|\cdot\|$ , т.е.

$$\theta = \theta[A, \|\cdot\|]. \tag{52}$$

Из соотношений (51)–(52) видно, что в конечном счете функция направления  $\Phi(\xi)$  определяется заданием набора матриц  $A = \{A_0, A_1\}$  и отвечающей ему экстремальной нормы  $\|\cdot\|$ ; в тех случаях, когда необходимо подчеркнуть эту зависимость, будем писать

$$\Phi(\xi) = \Phi[A, \|\cdot\|](\xi).$$

Как показывает приводимая ниже лемма 18 функции направления  $\Phi[A, \|\cdot\|]$  непрерывно зависят от наборов матриц  $A$  и экстремальных норм  $\|\cdot\|$ . Для того, чтобы придать сказанному точный смысл, определим сначала понятие близости между многозначными функциями на отрезке  $[0, 1]$ .

Обозначим через  $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 1])$  множество всех многозначных функций  $f : [0, 1] \mapsto 2^{\mathbb{R}}$  с замкнутым графиком. В этом случае график  $\text{Gr}(f)$  функции  $f$  является замкнутым ограниченным подмножеством множества  $[0, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ . Следовательно, для любой пары функций определена и конечна величина

$$\chi(f, g) = \max\left\{ \sup_{x \in \text{Gr}(f)} \inf_{y \in \text{Gr}(g)} |x - y|, \sup_{y \in \text{Gr}(g)} \inf_{x \in \text{Gr}(f)} |x - y| \right\},$$

где  $|\cdot|$  — некоторая норма в  $\mathbb{R}^2$ . Величина  $\chi$  называется *расстоянием по Хаусдорфу* между графиками отображений  $f$  и  $g$ , и является метрикой на пространстве  $\mathcal{F}$ . Пространство же  $\mathcal{F}$ , снабженное метрикой  $\chi$ , оказывается полным.

**Лемма 18.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  — некоторый ненулевой вектор. Тогда для любой пары  $(A, \|\cdot\|)$ , где  $A \in M^{\#}$  и  $\|\cdot\| \in N_{\text{ext}}(A, x_0)$ , однозначно определено и непрерывно по метрике пространства  $\mathcal{F}$  отображение

$$(A, \|\cdot\|) \mapsto \Phi[A, \|\cdot\|]. \tag{53}$$

**Доказательство.** Тот факт, что отображение (53) однозначно определяется по паре  $(A, \|\cdot\|)$ , следует из соотношений (51)–(52).

Заметим теперь, что в силу определения (50) функции направления  $\Phi$  непрерывность отображения (53) будет доказана, если мы покажем, что функции  $\varphi_0 = \varphi_0[A_0]$  и  $\varphi_1 = \varphi_1[A_1]$  непрерывно зависят от матриц  $A_0$  и  $A_1$  по метрике пространства непрерывных функций  $C[0, 1]$ , а параметр  $\theta = \theta[A, \|\cdot\|]$  непрерывно зависит от набора матриц  $A$  и отвечающей этому набору экстремальной нормы  $\|\cdot\|$ . Но непрерывная зависимость функций  $\varphi_0 = \varphi_0[A_0]$  и  $\varphi_1 = \varphi_1[A_1]$  от определяющих их матриц непосредственно следует из их определений (22), (23). А непрерывная зависимость параметра  $\theta = \theta[A, \|\cdot\|]$  от набора матриц  $A$  и нормы  $\|\cdot\|$  следует из того факта, что  $\theta$  — это есть  $\xi$ -координата (см. (48)) вектора  $\vartheta$  из теоремы 5, непрерывная зависимость которого от  $A$  и  $\|\cdot\|$  установлена в теореме 5.

Таким образом, непрерывность отображения (53) установлена и доказательство леммы завершено. □

Более детально свойства отображений, график которых имеет вид, представленный на рис. 8, изучаются ниже.

### 5.2. Сохраняющие ориентацию разрывные отображения окружности

Отображения отрезка  $[0, 1)$  в себя удобно трактовать как отображения окружности  $\mathbb{S} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  в себя. Ниже нас, в основном, будут интересовать свойства разрывных отображений отрезка  $[0, 1)$  в себя. Такие отображения изучались разными авторами (см., например, работы [11, 13, 14] и библиографию в них), но к сожалению, ни одна из известных автору работ не может быть непосредственно использована для анализа свойств отображения  $\Phi_\theta(\xi)$ , поскольку в [11] основные результаты установлены для отображений со связными образами, а в работах [13, 14] исследуются свойства однозначных разрывных отображений, в то время как в нашем случае отображение  $\Phi_\theta(\xi)$  в общем случае многозначное, но с несвязными образами. Поэтому ниже мы изложим некоторые факты теории сохраняющих ориентацию разрывных отображений окружности, следуя в основном работе [11], а затем выведем из этих результатов необходимые свойства отображений типа  $\Phi_\theta(\xi)$ .

Пусть  $\eta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  — некоторая, в общем случае разрывная многозначная функция. Поднятием функции  $\eta$  называют функцию  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую условиям

$$h(\xi + 1) \equiv h(\xi) + 1, \quad (54)$$

и

$$\eta(\xi) = h(\xi) \pmod{1} \quad \xi \in [0, 1). \quad (55)$$

Как нетрудно видеть, каждое отображение окружности обладает поднятием и, наоборот, каждое отображение  $h$  прямой в себя, удовлетворяющее условию (54), является поднятием отображения окружности  $\eta(\cdot)$ , определяемого равенством (55). Отметим, что многие свойства отображений окружности удобнее формулировать в терминах соответствующих поднятий.

Отображение  $\eta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ , рассматриваемое как отображение окружности  $\mathbb{S} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  в себя, будет называться *сохраняющим ориентацию*, если для него существует строго монотонно возрастающее поднятие<sup>4</sup>. Строго монотонно возрастающее поднятие  $h$  отображения  $\eta$  будет называться *стандартным*, если для него выполняется соотношение  $h(0) = \eta(0)$ . Сохраняющее ориентацию отображение  $\eta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  будет называться *замкнутым* или *связно замкнутым*, если для него найдется строго монотонно возрастающее поднятие с замкнутым графиком, либо график некоторого строго монотонно возрастающего поднятия оказывается связным замкнутым множеством, соответственно.

Для иллюстрации соответствующих понятий свяжем с монотонно возрастающим поднятием  $h$  отображения  $\eta$  следующие вспомогательные отображения:

$$h_+(\xi) = \lim_{\bar{\xi} \downarrow \xi} h(\bar{\xi}), \quad h_-(\xi) = \lim_{\bar{\xi} \uparrow \xi} h(\bar{\xi}),$$

где символы  $\bar{\xi} \downarrow \xi$  и  $\bar{\xi} \uparrow \xi$  обозначают, соответственно, стремление переменной  $\bar{\xi}$  к  $\xi$  строго сверху и строго снизу. Определим также отображения

$$h_*(\xi) = \{h_-(\xi), h_+(\xi)\}, \quad h_c(\xi) = [h_-(\xi), h_+(\xi)].$$

Непосредственно из определений отображений  $h_+(\xi)$ ,  $h_-(\xi)$ ,  $h_*(\xi)$  и  $h_c(\xi)$  следует, что все эти отображения монотонно возрастают. Отображения  $h_+(\xi)$  и  $h_-(\xi)$  однозначные, причем отображение

<sup>4</sup> Поднятие отображения окружности определяется неоднозначно. Однако, как и в случае непрерывных поднятий гооморфизмов окружности, любые два строго монотонно возрастающих поднятия отображения окружности (если они существуют) могут отличаться друг от друга только на целую константу [13, Lemma 2]. Детальное описание структуры однозначных разрывных сохраняющих ориентацию отображений окружности и их накрытий можно найти в [13, 14]. Роль требования строгой монотонности поднятия обсуждается в замечании 1.

$h_+(\xi)$  непрерывно справа в каждой точке, а отображение  $h_-(\xi)$  непрерывно слева в каждой точке. Отображения же  $h_*(\xi)$  и  $h_c(\xi)$  в общем случае многозначные. При этом их значения совпадают со значениями отображения  $h(\xi)$  в тех точках, в которых  $h(\xi)$  однозначен и непрерывен. В остальных же точках значения  $h_*(\xi)$  состоят из двух элементов, а значения  $h_c(\xi)$  состоят из замкнутого интервала. Кроме того, графики обоих отображений  $h_*(\xi)$  и  $h_c(\xi)$  замкнуты. Следует отметить также, что

$$h_+(\xi), h_-(\xi) \in h_*(\xi) \subseteq h_c(\xi), \quad \forall \xi.$$

При этом, если график отображения  $h(\xi)$  замкнут, то  $h_*(\xi) \subseteq h(\xi) \subseteq h_c(\xi)$ . Поэтому отображение  $h_*(\xi)$  естественно назвать *минимальным*, а отображение  $h_c(\xi)$  — *связным* или *максимальным* замыканием отображения  $h(\xi)$ . Соответственно, отображение  $h(\xi)$  будет называться *минимально замкнутым*, если  $h(\cdot) = h_*(\cdot)$ , и будет называться *связно* или *максимально замкнутым*, если  $h(\cdot) = h_c(\cdot)$ .

**Теорема 7** (см. [11]). Пусть  $\eta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  — сохраняющее ориентацию отображение окружности со связно замкнутым поднятием  $h$ . Пусть  $\{\xi_n\}$  — траектория отображения  $h$ , т.е.

$$\xi_{n+1} \in h(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{56}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) существует не зависящее от начального значения  $\xi_0$  число  $\tau$ , для которого выполняется равномерная оценка

$$\left| \frac{\xi_n}{n} - \tau \right| \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и следовательно

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{n};$$

- (ii) если число  $\tau$  рационально и имеет вид  $\tau = p/q$  с взаимно простыми  $p$  и  $q$ , то отображение  $\eta(\cdot)$  имеет периодическую точку периода  $q$ , и при этом любая траектория (56) стремится к периодической траектории с периодом  $q$ ;
- (iii) если число  $\tau$  иррационально, то все траектории (56) имеют одно и то же предельное множество, которое либо совпадает со всей окружностью, либо является канторовым множеством;
- (iv) число  $\tau$  непрерывно зависит от графика отображения  $h$  в метрике Хаусдорфа<sup>5</sup>.

Согласно приведенной теореме число  $\tau$  однозначно определяется по отображению  $h$  и не зависит от выбора начальной точки  $\xi_0$  траектории  $\{\xi_n\}$ , а также от произвола в выборе самой траектории  $\{\xi_n\}$  по формуле (56). Поэтому разумно обозначить число  $\tau$  через  $\tau(h)$ ; полученная величина  $\tau(h)$  называется *числом вращения* поднятия  $h$ . Величину  $\tau(h)$  часто называют также числом вращения отображения окружности  $\eta$ . Заметим однако, что поскольку поднятия отображений окружности определяются с точностью до целого слагаемого, то и число вращения отображения окружности также определено с точностью до целого слагаемого. Поэтому чаще под числом вращения отображения окружности понимают величину  $\tau(h) \pmod{1}$ .

*Замечание 1.* Сохраняющее ориентацию отображение окружности определялось выше как такое отображение окружности, для которого существует строго монотонно возрастающее поднятие. При отказе от требования строгости монотонного возрастания для соответствующего поднятия утверждение теоремы 7 теряет силу.

<sup>5</sup> Приведенное утверждение следует понимать в том смысле, что для любого сохраняющего ориентацию отображения окружности  $\hat{h}$  со связно замкнутым поднятием  $\hat{h}$  числа  $\hat{\tau}$  будут стремиться к  $\tau$ , когда график отображения  $\hat{h}$  стремится к графику отображения  $h$  в метрике Хаусдорфа. Следует отметить, что в силу условия (54) хаусдорфово расстояние между отображениями  $h$  и  $\hat{h}$  определено корректно, т.е. конечно, несмотря на то что графики отображений  $h$  и  $\hat{h}$  неограниченны.

**Доказательство.** Справедливость замечания следует из того факта, что отображение окружности в отсутствие требования строгой монотонности его поднятия может иметь одновременно периодические точки различных взаимно простых периодов (см. рис. 9 и 10).  $\square$

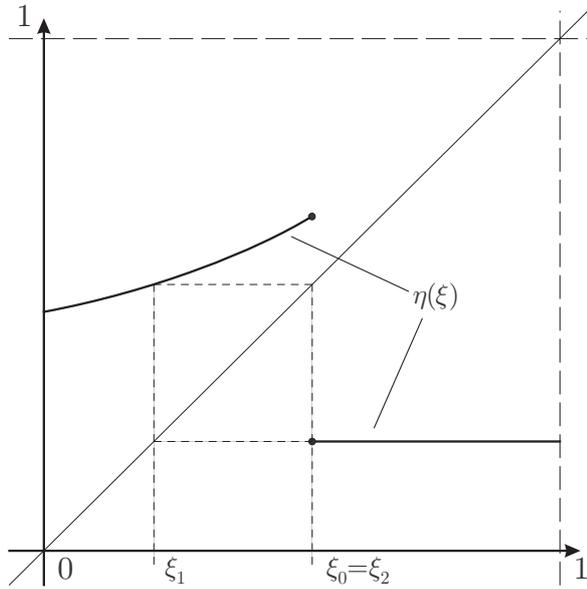


Рис. 9. Периодическая точка периода 2

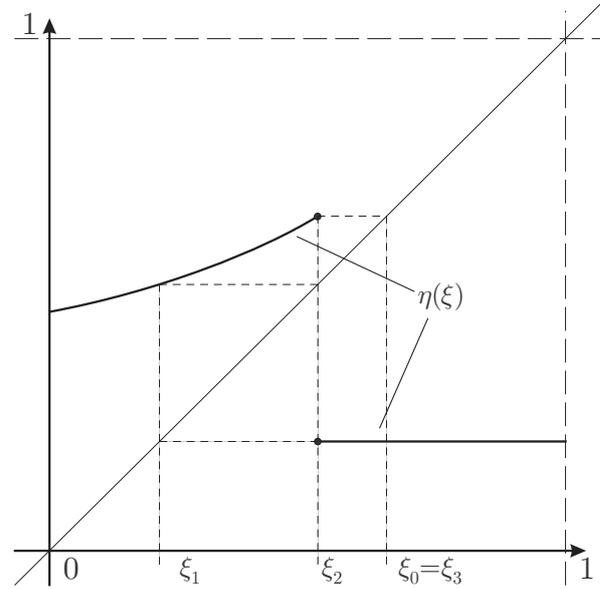


Рис. 10. Периодическая точка периода 3

Следующее замечание показывает, что требование связности графика поднятия  $h$  в теореме 7 несущественно, — важна лишь его замкнутость.

*Замечание 2.* Все утверждения теоремы 7 сохраняют силу для отображений окружности, обладающих строго монотонно возрастающим замкнутым поднятием.

**Доказательство.** Пусть  $h(\xi)$  — строго монотонно возрастающее замкнутое поднятие отображения окружности  $\eta(\xi)$ . Рассмотрим связное замыкание  $h_c(\xi)$  отображения  $h(\xi)$ . Тогда в силу включений  $h(\xi) \subseteq h_c(\xi)$ , справедливых при каждом  $\xi \in \mathbb{R}$ , каждая траектория  $\{\xi_n\}$  отображения  $h(\xi)$  будет в то же время траекторией отображения  $h_c(\xi)$ . Следовательно, число вращения  $\tau(h)$  отображения  $h$  будет корректно определено и совпадать с  $\tau(h_c)$ , а кроме того предельное множество траектории  $\{\xi_n\}$  не будет зависеть от выбора траектории в случае иррационального значения  $\tau(h)$ .

Если число  $\tau(h)$  рационально, то траектория  $\{\xi_n\}$  отображения  $h$ , будучи в то же время траекторией отображения  $h_c$ , в силу третьего утверждения теоремы 7 сходится к некоторой периодической траектории отображения  $h_c$ . Но в силу замкнутости графика отображения  $h$  соответствующая предельная периодическая траектория будет траекторией отображения  $h$ , откуда и вытекает третье утверждение теоремы 7 для отображения  $h$ .

Наконец, четвертое утверждение теоремы 7 для отображения  $h$  следует из уже установленного тождества  $\tau(h) \equiv \tau(h_c)$  и замечания о том, что для любых двух строго монотонно возрастающих отображений с замкнутыми графиками  $h$  и  $\hat{h}$  хаусдорфово расстояние между их графиками совпадает с хаусдорфовым расстоянием между графиками  $h_c$  и  $\hat{h}_c$ .  $\square$

Один из недостатков определения числа вращения  $\tau(\eta)$  для отображения окружности  $\eta(\cdot)$  заключается в наличии промежуточных конструкций (построение поднятия  $h(\cdot)$ ) и нахождение траектории  $\{\xi_n\}$  отображения  $h(\cdot)$  для вычисления предела  $\tau(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n/n$ . Опишем в связи с этим способ вычисления числа вращения  $\tau(\eta)$  непосредственно в терминах отображения  $\eta$  и его траекторий. Для

этого сначала более подробно исследуем свойства сохраняющих ориентацию отображений окружности (ср. с [13, Lemma 1]).

**Лемма 19.** Пусть  $\eta$  — замкнутое сохраняющее ориентацию отображение окружности, а  $h$  — его стандартное поднятие. Тогда при каждом  $\xi \in [0, 1)$  для любой пары элементов  $\eta_\xi \in \eta(\xi)$  и  $h_\xi \in h(\xi)$ , связанных соотношением  $\eta_\xi = h_\xi \pmod{1}$ , выполняется также соотношение

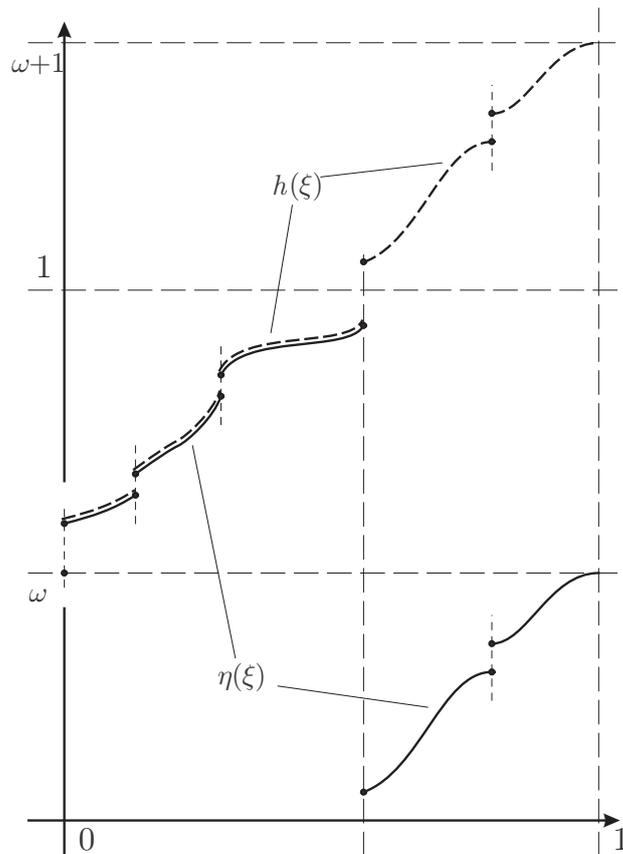
$$h_\xi = \eta_\xi + v(\eta_\xi), \tag{57}$$

где

$$v(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \xi < \omega, \\ 0 & \text{при } \omega \leq \xi < 1, \end{cases} \tag{58}$$

а число  $\omega$  определяется равенством  $\omega = \min\{y : y \in \eta(0)\}$  (см. рис. 11)<sup>6</sup>.

Обратно, если для пары элементов  $\eta_\xi \in \eta(\xi)$  и  $h_\xi$  выполняется соотношение (57), то  $h_\xi \in h(\xi)$ .



**Рис. 11.** Сохраняющее ориентацию замкнутое отображение окружности  $\eta(\xi)$  и его стандартное поднятие  $h(\xi)$ .

**Доказательство.** Зафиксируем  $\xi \in [0, 1)$  и выберем произвольную пару элементов  $\eta_\xi \in \eta(\xi)$  и  $h_\xi \in h(\xi)$ , связанных соотношением  $\eta_\xi = h_\xi \pmod{1}$ . Поскольку по условию леммы  $h(\cdot)$  — стандартное поднятие отображения  $\eta(\cdot)$ , то  $h(0) = \eta(0) \in [0, 1)$ . Тогда из строгой монотонности  $h(\cdot)$

<sup>6</sup> Отметим, что при  $\omega = 0$  функция  $v(\xi)$  тождественно равна нулю. В этом случае  $h(\xi) \equiv \eta(\xi)$  на отрезке  $[0, 1)$  и, следовательно, функция  $\eta(\xi)$  строго монотонна при  $\xi \in [0, 1)$ .

отображения вытекают оценки

$$0 \leq \eta(0) = h(0) \leq h_\xi < h(1) = h(0) + 1 = \eta(0) + 1 < 2, \quad \xi \in [0, 1),$$

т.е.  $h_\xi \in [0, 2)$ .

Если элемент  $h_\xi$  принадлежит интервалу  $[0, 1)$ , то из равенства  $\eta_\xi = h_\xi \pmod{1}$  следует, что  $\eta_\xi = h_\xi$ . Тогда в силу монотонности функции  $h(\cdot)$

$$\omega = \min\{y : y \in \eta(0)\} = \min\{y : y \in h(0)\} \leq h_\xi = \eta_\xi < 1.$$

Следовательно, в этом случае  $\nu(\eta_\xi) = 0$ , откуда и получаем, что  $h_\xi = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$ .

Если же элемент  $h_\xi$  таков, что  $h_\xi \in [1, 2)$ , то из равенства  $\eta_\xi = h_\xi \pmod{1}$  следует, что  $\eta_\xi = h_\xi - 1$ . В этом случае в силу монотонности функции  $h(\cdot)$  имеют место оценки

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta_\xi = h_\xi - 1 < \min\{y : y \in h(1)\} - 1 &= \min\{y : y \in h(0) + 1\} - 1 = \\ &= \min\{y : y \in h(0)\} = \min\{y : y \in \eta(0)\} = \omega. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\nu(\eta_\xi) = 1$ , откуда снова получаем, что  $h_\xi = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$ . В одну сторону лемма доказана.

Пусть теперь  $\eta_\xi \in \eta(\xi)$  и  $h_\xi$  — некоторая пара элементов, для которой выполняется соотношение (57). По определению поднятия отображения окружности, множества  $\eta(\xi)$  и  $h(\xi)$  связаны соотношением  $\eta(\xi) = h(\xi) \pmod{1}$ . Следовательно, в множестве  $h(\xi)$  найдется такой элемент  $h_*$ , что  $\eta_\xi = h_* \pmod{1}$ . Но тогда в силу уже доказанной первой части леммы должно выполняться соотношение  $h_* = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$ . Но по предположению для элементов  $\eta_\xi$  и  $h_\xi$  также выполняется аналогичное соотношение (57), т.е.  $h_\xi = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$ , откуда получаем, что  $h_\xi = h_* \in h(\xi)$ . Лемма полностью доказана.  $\square$

Теперь мы в состоянии дать определение числа вращения отображения окружности  $\eta(\cdot)$  (вернее, числа вращения стандартного поднятия  $h(\cdot)$  отображения  $\eta(\cdot)$ ) непосредственно в терминах отображения  $\eta(\cdot)$ .

**Теорема 8.** Пусть  $\eta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  — сохраняющее ориентацию отображение окружности с замкнутым стандартным поднятием  $h$ . Пусть  $\{\zeta_n\}$  — траектория отображения  $\eta$ , т.е.

$$\zeta_{n+1} \in \eta(\zeta_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда выполняется равномерная оценка

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\zeta_i)}{n} - \tau(h) \right| \leq \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (59)$$

и, следовательно,

$$\tau(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\zeta_i)}{n}.$$

**Доказательство.** Определим последовательность  $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ , полагая  $\xi_0 = \zeta_0$  и

$$\xi_n = \zeta_n + \sum_{i=1}^n \nu(\zeta_i), \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажем по индукции, что  $\{\xi_n\}$  удовлетворяет включениям

$$\xi_{n+1} \in h(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (60)$$

и является, таким образом, траекторией отображения  $h$ .

Действительно, по определению  $\xi_1 = \zeta_1 + \nu(\zeta_1)$ , где  $\zeta_1 \in \eta(\zeta_0)$ . Следовательно, по лемме 19  $\xi_1 \in h(\zeta_0) = h(\xi_0)$ , и утверждение теоремы справедливо при  $n = 0$ .

Сделаем шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при  $n = k \geq 0$  и покажем, что в этом случае оно верно и при  $n = k + 1$ . По определению элемента  $\xi_{k+1}$

$$\xi_{k+1} = \zeta_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \nu(\zeta_i)$$

или, что то же самое,

$$\xi_{k+1} - \sum_{i=1}^k \nu(\zeta_i) = \zeta_{k+1} + \nu(\zeta_{k+1}).$$

Так как здесь, по определению траектории  $\{\zeta_n\}$ , имеет место включение  $\zeta_{k+1} \in \eta(\zeta_k)$ , где  $\zeta_k \in [0, 1)$ , то по лемме 19  $\zeta_{k+1} + \nu(\zeta_{k+1}) \in h(\zeta_k)$ . Следовательно,

$$\xi_{k+1} - \sum_{i=1}^k \nu(\zeta_i) \in h(\zeta_k)$$

или, что то же самое,

$$\xi_{k+1} \in h(\zeta_k) + \sum_{i=1}^k \nu(\zeta_i) = h(\zeta_k + \sum_{i=1}^k \nu(\zeta_i)).$$

Но по предположению индукции здесь аргумент функции  $h$  в правой части совпадает с  $\xi_k$ , откуда  $\xi_{k+1} \in h(\xi_k)$ .

Итак, шаг индукции проведен и включения (60) доказаны. Для завершения доказательства теоремы теперь осталось заметить, что по теореме 7 и замечанию 2 к ней для траектории  $\{\xi_n\}$  верна оценка

$$\left| \frac{\xi_n}{n} - \tau(h) \right| \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а по определению траектории  $\{\xi_n\}$  справедливо равенство

$$\frac{\xi_n}{n} = \frac{\zeta_n}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\zeta_i)}{n},$$

где  $\zeta_n \in [0, 1)$ . Из полученных соотношений вытекают оценки (59). Теорема доказана. □

### 5.3. Частотные свойства функции направления генератора экстремальных траекторий

Используем свойства отображений окружности, описанные в разделе 5.2, для анализа свойств функции направления  $\Phi_\theta$  генератора экстремальных траекторий, введенной в разделе 5 (см. (50)).

Отметим, что функция  $\Phi_\theta(\xi)$  отличается от функции, представляющей некоторое сохраняющее ориентацию отображение окружности лишь тем, что она определена на замкнутом интервале  $[0, 1]$ , а не на полуоткрытом  $[0, 1)$ , как в случае отображений окружности. Покажем, что указанное отличие не принципиально, и для функции  $\Phi_\theta(\xi)$ , так же как для отображения окружности, может быть введено понятие числа вращения со всеми “хорошими” свойствами, присущими числу вращения отображения окружности.

**Теорема 9.** Пусть  $A = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\#$  — набор  $2 \times 2$  матриц (20), удовлетворяющих условиям (21), и  $\Phi_\theta$  — функция направления (50) некоторого генератора экстремальных траекторий для

набора матриц  $A$ . Тогда для каждой траектории  $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$  отображения  $\Phi_\theta$  при  $n \geq 1$  выполняются неравенства  $\xi_n \neq 0, 1$  и определена частота

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\xi_i)}{n} \quad (61)$$

попадания точек траектории  $\{\xi_n\}$  в интервал  $[0, \omega)$ , где  $\omega = \varphi_0(1)$ , а функция  $\nu(\cdot)$  определяется равенством (58).

Частота  $\tau$  не зависит ни от выбора траектории  $\{\xi_n\}$ , ни от выбора функции  $\Phi_\theta$  по набору матриц  $A$ , и таким образом, может быть обозначена как  $\tau(A)$ . При этом для  $\tau(A)$  справедливы утверждения (i)–(iii) теоремы 7 и, кроме того,  $\tau(A)$  непрерывно зависит от матриц набора  $A$ .

**Доказательство.** Построим по отображению  $\Phi_\theta(\cdot)$  отображение  $\eta_\theta(\cdot)$  полуоткрытого интервала  $[0, 1)$  в себя, определяемое равенством

$$\eta_\theta(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(0) \cup \varphi_0(1), & \text{если } \xi = 0, \\ \varphi_1(\xi), & \text{если } \xi \in (0, \theta], \\ \varphi_0(\xi), & \text{если } \xi \in [\theta, 1). \end{cases}$$

Это отображение можно считать сохраняющим ориентацию отображением окружности с замкнутым графиком, поскольку его поднятием является строго монотонное отображение с замкнутым графиком  $h_\theta(\cdot)$ , определяемое при  $\xi \in [0, 1)$  соотношением

$$h_\theta(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(0) \cup \varphi_0(1), & \text{если } \xi = 0, \\ \varphi_1(\xi), & \text{если } \xi \in (0, \theta], \\ \varphi_0(\xi) + 1, & \text{если } \xi \in [\theta, 1), \end{cases}$$

и продолженное с сохранением тождества  $h_\theta(\xi + 1) \equiv h_\theta(\xi) + 1$  на остальные значения  $\xi \in \mathbb{R}$ . Подчеркнем, что, отображение  $\eta_\theta(\cdot)$  принимает в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = \theta$  по два значения.

Пусть теперь  $\{\xi_n\}$  — траектория отображения  $\Phi_\theta$ , т.е.

$$\xi_{n+1} \in \Phi_\theta(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (62)$$

По лемме 17 для параметра  $\theta$  отображения  $\Phi_\theta(\xi)$ , справедливы оценки  $\theta_* \leq \theta \leq \theta^*$ , в которых  $\theta_*$  и  $\theta^*$  — некоторые числа из интервала  $(0, 1)$ . Тогда, как видно, например, из рис. 8, значения функции  $\Phi_\theta(\xi)$  квалифицированно отделены от нуля и единицы. Поэтому, можно указать такое  $\mu > 0$ , при котором для всех членов траектории  $\{\xi_n\}$ , за исключением, быть может, члена с нулевым индексом, будут верны оценки  $\mu \leq \xi_n \leq 1 - \mu$ . Отсюда и из (62), принимая во внимание, что значения функций  $\Phi_\theta(\xi)$  и  $\eta_\theta(\xi)$  совпадают при  $0 < \xi < 1$ , следует, что траектория  $\{\xi_n\}$  при  $n = 1, 2, \dots$  удовлетворяет включениям  $\xi_{n+1} \in \eta_\theta(\xi_n)$ . Определив теперь последовательность  $\{\zeta_n\}$ , полагая

$$\zeta_n = \begin{cases} \xi_0 \pmod{1}, & \text{если } n = 0, \\ \xi_n, & \text{если } n \geq 1, \end{cases}$$

нетрудно убедиться, что для нее при  $n = 1, 2, \dots$  будут выполняться включения  $\zeta_{n+1} \in \eta_\theta(\zeta_n)$ . Отсюда по теореме 8 вытекает существование такого числа  $\tau$ , при котором выполняются оценки

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\xi_i)}{n} - \tau \right| = \left| \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\zeta_i)}{n} - \tau \right| \leq \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (63)$$

где функция  $\nu(\cdot)$  по лемме 19 имеет вид

$$\nu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \xi < \omega, \\ 0 & \text{при } \omega \leq \xi < 1, \end{cases}$$

с константой  $\omega$ , определяемой равенствами  $\omega = \min\{h_\theta(0)\} = \Phi_\theta(1)$ . Последние равенства показывают, что формально число  $\omega$  зависит от  $\theta$ . Но поскольку, как отмечалось выше, в силу леммы 17 число  $\theta$  удовлетворяет включению  $\theta \in (0, 1)$ , то  $\Phi_\theta(1) \equiv \varphi_0(1)$ . Поэтому, на деле число  $\omega$ , а с ним и функция  $\nu(\cdot)$  от  $\theta$  не зависят.

Полученные оценки (63) влекут существование предела (61). Заметим, что при заданной функции направления  $\Phi_\theta$  число  $\tau$  в силу теоремы 8 не зависит от выбора траектории  $\{\xi_n\}$ , и потому  $\tau$  является лишь функцией  $\theta$ , т.е.  $\tau = \tau(\theta)$ . Покажем, что на деле число  $\tau$  не зависит и от  $\theta$ , а однозначно определяется набором матриц  $A$ , т.е.  $\tau = \tau(A)$ .

Пусть  $\Phi_{\theta_1}(\xi)$  и  $\Phi_{\theta_2}(\xi)$  — функции направления некоторых генераторов экстремальных траекторий  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ , отвечающих различным экстремальным нормам  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$ . Тогда по лемме 10 найдется траектория  $\{x_n\}$  набора матриц  $A$ , являющаяся экстремальной как в норме  $\|\cdot\|_1$ , так и в норме  $\|\cdot\|_2$ . По определению генератора экстремальных траекторий эта траектория должна удовлетворять как включениям

$$x_{n+1} \in g_1(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

так и включениям

$$x_{n+1} \in g_2(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Но тогда по определению функции направления генератора экстремальных траекторий последовательность  $\{\xi_n\}$ , определяемая как

$$\xi_n = \frac{x_{1,n}}{x_{1,n} + x_{2,n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

должна удовлетворять как включениям

$$\xi_{n+1} \in \Phi_{\theta_1}(\xi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{64}$$

так и включениям

$$\xi_{n+1} \in \Phi_{\theta_2}(\xi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{65}$$

Вычислим теперь число  $\tau(\theta_1)$  по последовательности  $\{\xi_n\}$ , удовлетворяющей включениям (64), по формуле (61). Аналогично вычислим и число  $\tau(\theta_2)$  по той же самой последовательности  $\{\xi_n\}$ , но уже как последовательности, удовлетворяющей включениям (65), снова по той же самой формуле (61). Поскольку в обоих случаях вычисления (61) производятся с одной и той же последовательностью  $\{\xi_n\}$ , то получаем, что  $\tau(\theta_1) = \tau(\theta_2)$ , откуда и следует независимость числа  $\tau$  от  $\theta$ .

Справедливость утверждений (i)–(iii) для  $\tau(A)$  вытекает из определения числа  $\tau(A)$  и из теоремы 7. Поэтому для завершения доказательства теоремы осталось установить непрерывную зависимость функции  $\tau(A)$  от набора матриц  $A$ . Пусть  $\{A^{(n)} \in M^\sharp\}$  — некоторая последовательность наборов матриц, сходящаяся к набору матриц  $A^* \in M^\sharp$ . Зафиксируем некоторый вектор  $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ . Выберем теперь при каждом значении  $n$  некоторую экстремальную норму  $\|\cdot\|^{(n)} \in N_{\text{ext}}(A^{(n)}, x_0)$ , а затем построим функцию направления  $\Phi_{\theta^{(n)}}$  генератора экстремальных траекторий, отвечающего набору  $A^{(n)}$  и норме  $\|\cdot\|^{(n)}$ .

По теореме 2 последовательность норм  $\{\|\cdot\|^{(n)}\}$  можно считать сходящейся в пространстве  $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$  к некоторой экстремальной норме  $\|\cdot\|^*$  набора матриц  $A^*$ . Тогда по лемме 18 последовательность  $\{\Phi_{\theta^{(n)}}\}$  сходится по метрике пространства  $\mathcal{F}$  к некоторой функции направления  $\Phi_{\theta^*}$  генератора экстремальных траекторий, отвечающего набору  $A^*$  и норме  $\|\cdot\|^*$ . Следовательно,

$$\tau(A^{(n)}) = \tau(\Phi_{\theta^{(n)}}) \rightarrow \tau(\Phi_{\theta^*}) = \tau(A^*). \tag{66}$$

Здесь сходимость последовательности чисел  $\{\tau(\Phi_{\theta^{(n)}})\}$  к  $\tau(\Phi_{\theta^*})$  вытекает из сходимости последовательности функций  $\{\Phi_{\theta^{(n)}}\}$  к функции  $\Phi_{\theta^*}$  по метрике пространства  $\mathcal{F}$  (т.е. в смысле сходимости

в метрике Хаусдорфа графиков этих функций) и из теорем 7 и 8. А равенства в (66) вытекают из уже доказанной независимости определения числа  $\tau(\mathbf{A})$  от выбора функции направления генератора экстремальных траекторий набора  $\mathbf{A}$ .

Таким образом, непрерывная зависимость  $\tau(\mathbf{A})$  от набора  $\mathbf{A}$  установлена, и доказательство теоремы завершено.  $\square$

#### 5.4. Теорема о частоте переключения экстремальных траекторий и построение контрпримера к гипотезе о конечности

Теперь мы готовы доказать теорему 6. Пусть  $\{x_n\}$  — экстремальная траектория набора матриц  $\mathbf{A} = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$ , а  $\{\sigma_n\}$  — отвечающая ей индексная последовательность, т.е. для последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{\sigma_n\}$  при  $n = 0, 1, \dots$  справедливы равенства  $x_{n+1} = A_{\sigma_n} x_n$ . Тогда по лемме 17 последовательность чисел  $\xi_n = \xi(x_n)$ , где функция  $\xi(\cdot)$  определяется равенством (48), удовлетворяет соотношениям

$$\xi_{n+1} = \varphi_{\sigma_n}(\xi_n) \in \Phi_\theta(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

с функцией направления  $\Phi_\theta$  некоторого генератора экстремальных последовательностей набора матриц  $\mathbf{A}$ . При этом по теореме 9 определена частота

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\xi_i)}{n}$$

и, кроме того,  $\xi_n \neq 0, 1$  при  $n \geq 1$ . Поэтому при  $n \geq 1$  величина  $\xi_{n+1} \in (0, 1)$  получается из  $\xi_n \in (0, 1)$  по формуле  $\xi_{n+1} = \varphi_0(\xi_n)$  тогда и только тогда, когда  $0 < \xi_{n+1} < \varphi_0(1)$  или, что то же самое, — тогда и только тогда, когда  $\nu(\xi_{n+1}) = 1$ . Следовательно,  $\sigma_n = 1 - \nu(\xi_{n+1})$  при  $n \geq 1$  и по теореме 9 существует предел

$$\sigma(\mathbf{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i}{n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\xi_{i+1})}{n} = 1 - \tau(\mathbf{A}).$$

Все утверждения теоремы 6 следуют теперь из аналогичных утверждений теоремы 9.  $\square$

Перейдем, наконец, к построению контрпримера к гипотезе о конечности.

**Лемма 20** (о недостижимости спектрального радиуса). Пусть набор матриц  $\mathbf{A} = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$  таков, что число  $\sigma(\mathbf{A})$  иррационально. Тогда для любой конечной последовательности индексов  $\sigma_k \in \{0, 1\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , справедливо строгое неравенство  $\rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \cdots A_{\sigma_1}) < \rho^n(\mathbf{A})$ .

**Доказательство.** В силу неотрицательности матриц  $A_0$  и  $A_1$  по теореме Перрона найдется вектор с неотрицательными координатами  $x_0$  такой, что

$$\rho^n x_0 = A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \cdots A_{\sigma_1} x_0, \quad (67)$$

где  $\rho = \rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \cdots A_{\sigma_1})$ . Продолжим конечную индексную последовательность  $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$  до бесконечной периодической с периодом  $n$  и рассмотрим затем соответствующую траекторию  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ :

$$x_1 = A_{\sigma_1} x_0, \quad \dots, \quad x_{n-1} = A_{\sigma_{n-1}} x_{n-2}, \quad x_n = A_{\sigma_n} x_{n-1}, \quad \dots$$

Тогда в силу (67)  $x_n = \rho^n x_0$ , и в любой экстремальной норме  $\|\cdot\|$  будут иметь место неравенства

$$\|x_1\| \leq \rho(\mathbf{A}) \|x_0\|, \quad \dots, \quad \|x_n\| = \rho^n \|x_0\| \leq \rho(\mathbf{A}) \|x_{n-1}\|, \quad \dots, \quad (68)$$

откуда  $\rho \leq \rho(\mathbf{A})$ . При этом равенство  $\rho = \rho(\mathbf{A})$  может иметь место только в том случае, когда в каждом из соотношений (68) также выполняется равенство, т.е. когда траектория  $\{x_n\}$  является экстремальной в норме  $\|\cdot\|$ . Однако по теореме 9 периодичность индексной последовательности

хотя бы одной экстремальной траектории влечет рациональность числа  $\sigma(A)$ , что противоречит условию теоремы.

Полученное противоречие вызвано предположением о том, что  $\rho = \rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \cdots A_{\sigma_1}) = \rho(A)$ . Лемма доказана.  $\square$

Из леммы 20 следует, что для построения контрпримера к гипотезе Лагариаса-Ванга достаточно доказать существование хотя бы одного набора матриц  $A = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$ , для которого  $\sigma(A)$  иррационально.

**Лемма 21.** Для любого набора параметров  $a, b, c, d$ , удовлетворяющих условиям (21), найдутся такие положительные числа  $\gamma_* = \gamma_*(a, b, c, d)$  и  $\gamma^* = \gamma^*(a, b, c, d)$ , что для соответствующего набора матриц  $A = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$  будут иметь место соотношения:

$$\sigma(A) = \begin{cases} 0 & \text{если } \alpha/\beta > \gamma^*, \\ 1 & \text{если } \alpha/\beta < \gamma_*. \end{cases}$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathcal{K}$  множество (конус) всех векторов из первого квадранта, заключенных между прямыми  $L_0 = \{(x_0, x_1) : bx_1 = (1 - a)x_0\}$  и  $L_1 = \{(x_0, x_1) : (1 - d)x_1 = cx_0\}$ , т.е.

$$\mathcal{K} := \left\{ (x_0, x_1) : x_0, x_1 \geq 0, \frac{1-a}{b}x_0 \leq x_1 \leq \frac{c}{1-d}x_0 \right\}.$$

Тогда, как показывает непосредственная проверка,

$$A_0\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad A_1\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}. \tag{69}$$

Зафиксируем теперь некоторый набор параметров  $a, b, c, d$ , удовлетворяющих условиям (21), и произвольное число  $\gamma > 1$  и покажем, что для достаточно больших значений отношения  $\alpha/\beta$  справедливо неравенство

$$A_0x > \gamma A_1x, \quad x \neq 0 \in \mathcal{K}, \tag{70}$$

понимаемое по координатно.

Действительно, векторное неравенство (70) равносильно двум скалярным неравенствам

$$\alpha(ax_0 + bx_1) > \gamma\beta x_0, \quad \alpha x_1 \geq \gamma\beta(cx_0 + dx_1), \quad x \neq 0 \in \mathcal{K},$$

или, что то же,

$$\frac{\alpha}{\beta} > \gamma \sup_{x \neq 0 \in \mathcal{K}} \left\{ \frac{ax_0 + bx_1}{x_0}, \frac{x_1}{cx_0 + dx_1} \right\}. \tag{71}$$

Но как легко убедиться,  $\sup$  в правой части неравенства (71) конечен, откуда и следует справедливость векторного неравенства (70) при достаточно больших отношениях  $\alpha/\beta$ .

Завершим теперь доказательство леммы. Пусть  $\|\cdot\|$  — произвольная экстремальная для набора матриц  $A$  норма, пусть  $x^*$  — произвольный ненулевой вектор из конуса  $\mathcal{K}$ , и пусть параметры  $\alpha$  и  $\beta$  таковы, что имеет место неравенство (70). Тогда по лемме 9 найдется экстремальная траектория  $\{x^{(n)}\}_{n=0}^\infty$  набора матриц  $A$ , “стартующая” из точки  $x^*$ , т.е.

$$x^{(0)} = x^* \neq 0 \in \mathcal{K}, \quad x^{(n+1)} = A_{\sigma_n} x^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

причем из включений (69) следует, что  $x^{(n)} \in \mathcal{K}$  при  $n = 0, 1, \dots$ . Покажем, что для индексной последовательности  $\{\sigma_n\}$  в этом случае имеет место тождество  $\sigma_n \equiv 0$ .

Действительно, в предположении противного  $\sigma_{n_0} = 1$  при некотором  $n_0$ . Тогда по определению экстремальной последовательности

$$\|x^{(n_0+1)}\| = \|A_1 x^{(n_0)}\| = \rho \|x^{n_0}\|, \tag{72}$$

где  $\rho = \rho(\mathbf{A})$ , причем в силу определения экстремальной нормы должно также выполняться неравенство

$$\|A_0 x^{(n_0)}\| \leq \rho \|x^{n_0}\|. \quad (73)$$

Но по лемме 13 экстремальная норма  $\|\cdot\|$  монотонна, и потому в силу (70)

$$\|A_0 x^{(n_0)}\| \geq \|\gamma A_1 x^{(n_0)}\|,$$

где  $\gamma > 1$ , что противоречит соотношениям (72) и (73).

Итак, мы показали, что  $\sigma_n \equiv 0$ , откуда по теореме 6  $\sigma(\mathbf{A}) = 0$ . Доказательство леммы для случая малых значений отношения  $\alpha/\beta$  проводится аналогично. Лемма доказана.  $\square$

Завершим построение контрпримера к гипотезе Лагариаса-Ванга. Зафиксируем некоторый набор чисел  $a, b, c, d$ , удовлетворяющих условиям (21), и рассмотрим семейство наборов матриц  $\mathbf{A}$ , зависящих от  $\alpha$  и  $\beta$  как от параметров. Тогда, согласно лемме 21,  $\sigma(\mathbf{A}) = 0$  при больших значениях отношения  $\alpha/\beta$  и  $\sigma(\mathbf{A}) = 1$  при малых значениях отношения  $\alpha/\beta$ . Но по теореме 6 величина  $\sigma(\mathbf{A})$  непрерывно зависит от набора матриц  $\mathbf{A}$ , а значит и от  $\alpha$  и  $\beta$ . Следовательно,  $\sigma(\mathbf{A})$  при изменении  $\alpha$  и  $\beta$  принимает все значения между 0 и 1. В частности,  $\sigma(\mathbf{A})$  при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$  принимает иррациональные значения. Но тогда по лемме 20 при этих значениях  $\alpha$  и  $\beta$  обобщенный спектральный радиус  $\rho(\mathbf{A})$  не достигается ни на каком конечном произведении матриц из набора  $\mathbf{A}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабанов Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. I // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 2. — С. 40–46. 302, 305
2. Барабанов Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. II // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 3. — С. 24–29. 302, 305
3. Барабанов Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. III // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 5. — С. 17–24. 302, 305
4. Козьякин В. С., Покровский А. В. Роль свойств типа управляемости в изучении устойчивости рассинхронизованных динамических систем // *Доклады АН СССР*. — 1992. — Т. 324, № 1. — С. 60–64. 304
5. Козьякин В. С., Покровский А. В. Квазиуправляемость и оценка амплитуд переходных процессов в дискретных системах // *Известия РАЕН, серия МММИУ*. — 1997. — Т. 1, № 3. — С. 128–150. 304
6. Куратовский К. Топология. — М.: Мир, 1966. — Т. 1. — 594 с. 303
7. Berger M. A., Wang Y. Bounded semigroups of matrices // *Lin. Algebra Appl.* — 1992. — Vol. 166. — Pp. 21–27. 302
8. Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A. Switched systems that are periodically stable may be unstable // *Proc. of the Symposium MTNS*. — Notre-Dame, USA: 2002. 302
9. Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A. An elementary counterexample to the finiteness conjecture // *SIAM Journal on Matrix Analysis*. — 2003. — Vol. 24, no. 4. — Pp. 963–970. 302
10. Bousch T., Mairesse J. Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // *J. Amer. Math. Soc.* — 2002. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 77–111. 302
11. Brette R. Rotation numbers of discontinuous orientation-preserving circle maps // *Set-Valued Analysis*. — 2003. — Vol. 11, no. 4. — Pp. 359–371. 302, 324, 325
12. Heil C., Strang G. Continuity of the joint spectral radius: Application to wavelets // *Linear Algebra for Signal Processing* / Ed. by A. Wojanczyk, G. Cybenko. — Minneapolis, MN, 1992. — IMA Vol. Math. Appl. 69, Springer-Verlag, New York (1995), pp. 51–61. 308, 311

13. *Kozyakin V. S.* Sturmian sequences generated by order preserving circle maps: Preprint 11/2003. — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May. 302, 324, 327
14. *Kozyakin V. S.* Discontinuous order preserving circle maps versus circle homeomorphisms: Preprint 12/2003. — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May. 302, 324
15. *Kozyakin V. S., Pokrovskii A. V.* Estimates of amplitudes of transient regimes in quasi-controllable discrete systems: CADSEM Report 96-005. — Geelong, Australia: Deakin University, 1996. 304
16. *Kozyakin V.* Proof of a counterexample to the finiteness conjecture in the spirit of the theory of dynamical systems: Preprint 1005. — Berlin: Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 2005. — January. 301
17. *Lagarias J. C., Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices // *Lin. Algebra Appl.* — 1995. — Vol. 214. — Pp. 17–42. 302
18. *Wirth F.* The generalized spectral radius and extremal norms // *Lin. Algebra Appl.* — 2002. — Vol. 342. — Pp. 17–40. 302, 305