Информационные процессы, Том 6, № 2, 2006, стр. 131–143.

Оптимизация управления в линейных стохастических дифференциальных системах с неопределенными параметрами возмущений [1]

Г.Б.Миллер, А.Р.Панков

Московский авиационный институт (государственный технический университет), Москва, Россия

Поступила в редколлегию 07.03.2006

Аннотация—Рассмотрена проблема управления в линейной стохастической дифференциальной системе, где интенсивности шумов в уравнении состояния и наблюдения заданы лишь с точностью до принадлежности некоторым известным множествам. Для оптимизации управления использован интегральный критерий качества. Задача решается путем перехода к двойственной, что позволяет доказать существование седловой точки критерия и получить явное выражение для минимаксного оператора управления как функции от решения двойственной задачи. Для решения последней предложен итерационный алгоритм, сходимость которого доказана и исследована на модельном примере.

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейные стохастические динамические системы, рассмотренные в данной работе, в настоящий момент достаточно подробно изучены. Решения задач управления для таких систем являются классическими результатами теории случайных процессов и опубликованы в работах многих авторов [1,2,3]. Однако эти результаты применимы только в случае, если точно известны моментные характеристики первого и второго порядков случайных возмущений в уравнениях состояния системы и шумов в уравнениях наблюдения, что невозможно на практике. В связи с этим в настоящее время уделяется большое внимание исследованию статистически неопределенных систем, в том числе с использованием минимаксного подхода, позволяющего получать наилучшие управляющие воздействия для наиболее неблагоприятных сочетаний неизвестных параметров. Самые общие результаты в этой области получены для стационарных систем, оптимизируемых на бесконечном интервале [4, 5, 6, 7]. Нестационарные линейные дискретные стохастические системы со статистической неопределенностью исследовались в [8], в [9] рассматривались системы, заданные стохастическими дифференциальными уравнениями с мерой. Из последних работ необходимо отметить следующие: [10], где рассмотрена задача управления по полным данным для дискретной системы с неслучайными ограниченными воздействиями, [11, 12], где изучаются непрерывные детерминированные системы с неопределенностью в коэффициентах уравнений состояния и наблюдения, [13], где исследуется стохастические дифференциальные системы с неопределенностью в коэффициентах уравнения и [14], где решена терминальная задача для линейной дифференциальной системы с ограниченными детерминированными возмущениями.

В данной работе рассмотрена нестационарная непрерывная стохастическая дифференциальная система с неопределенными вторыми моментами возмущений. Задача управления ре-

[1] Работа выполнена при поддержке грантов INTAS (YSF 04-83-3623) и Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00508).

шается на конечном интервале, а для определения качества управления используется среднеквадратический критерий. Уравнения для управляющих воздействий, полученные в явном виде, зависят от решения двойственной задачи, которое может быть получено с помощью предложенного численного алгоритма. Для последнего доказана сходимость и приведены результаты численного моделирования.

Необходимо отметить, что данная статья продолжает серию работ [15,16,17], объединенных общим подходом к решению задач фильтрации и управления для дискретных, непрерывных и дискретно-непрерывных неопределенно-стохастических систем.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Далее в работе используются следующие обозначения:

$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)$ — блочно-диагональная матрица с блоками $A_1, \ldots, A_N$ на главной диагонали;

$\mathrm{col}(A_1, \ldots, A_N)$ — колонка из матриц $A_1, \ldots, A_N$;

$\mathrm{M}\,[\xi]$ — математическое ожидание случайного вектора ξ;

$\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ — ковариация случайных векторов ξ и η;

$A \succ 0$ $(A \succeq 0)$ — матрица A положительно (неотрицательно) определена;

$\operatorname*{argmax}_{x\in X} f(x)$ $(\operatorname*{argmin}_{x\in X} f(x))$ — множество точек глобального максимума (минимума) функции $f(x)$ на множестве X;

$\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$;

$\rho(x, X) = \inf\limits_{y\in X} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $X \subset \mathbb{R}^n$.

3. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим линейную стохастическую модель управления с непрерывным временем:

$$\begin{cases} \mathrm{d}y_t = a_t y_t \mathrm{d}t + A_t u_t \mathrm{d}t + b_t \mathrm{d}w_t, \\ y_0 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathrm{d}z_t = c_t y_t \mathrm{d}t + d_t \mathrm{d}w_t, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

где

$y_t \in \mathbb{R}^p$ — вектор состояния системы;

$z_t \in \mathbb{R}^q$ — вектор наблюдения,

$u_t \in \mathbb{R}^l$ — вектор управления,

$w_t \in \mathbb{R}^r$ — центрированный случайный процесс с ортогональными однородными приращениями:

$$\mathrm{cov}(w_t, w_\tau) = \gamma \min(t, \tau), \quad \mathrm{M}\,[w_t] = 0. \tag{3}$$

Коэффициенты a_t, A_t, b_t, c_t и d_t известны и имеют кусочно-непрерывные по t компоненты. Матрица интенсивностей γ неизвестна, однако предполагается, что $\gamma \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{r\times r}$, где Γ — множество неотрицательно определенных матриц размера $(r \times r)$, называемое далее множеством неопределенности модели (1), (2).

Далее всюду предполагается, что для функции d_t и множества Γ выполняется следующее условие: существует константа $C > 0$ такая, что для любого момента времени $t \in [0, T]$ и любого вектора $\mu \in \mathbb{R}^q$ с нормой $\|\mu\| = 1$ выполнено

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \mu^* d_t \gamma d_t^* \mu \geq C. \tag{4}$$

Условие (4) препятствует вырождению процесса наблюдения z_t [1].

Пусть u_t — неупреждающее линейное по наблюдениям управление для системы (1),(2):

$$u_t = U(Z_t) = \int_0^T g(t,\tau) \mathrm{d} z_\tau, \quad g(t,\tau) = 0 \quad \forall \tau > t, \tag{5}$$

В соотношении (5) через U обозначен линейный оператор управления, $g(t,\tau)$ — его весовая функция, $Z_t = \{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$. Класс неупреждающих линейных по наблюдениям управлений будем далее обозначать через $\mathcal{U}$.

Пусть P_w — закон распределения процесса w_t в (1), (2), а $\mathcal{P}_w$ — класс всех возможных распределений, удовлетворяющих (3) при условии $\gamma \in \Gamma$.

Для каждого $P_w \in \mathcal{P}_w$ качество управления u_t будем определять величиной интегрального среднеквадратического критерия

$$\mathbf{J}(U, P_w) = \mathrm{M} \left[\int_0^T \big(y_t^* Q_1(t) y_t + u_t^* Q_2(t) u_t \big) \mathrm{d}t + y_T^* Q_0 y_T \right], \tag{6}$$

где Q_0, $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ в любой момент времени $t \in [0,T]$ являются неслучайными известными матрицами, причем

$$Q_0 \succeq 0, \quad Q_1(t) \succeq 0, \quad Q_2(t) \succ 0.$$

Кроме того, будем предполагать, что $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ являются кусочно-непрерывными.

Заметим, что критерий (6) можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{J}(U, P_w) = \int_0^T \operatorname{tr} \big(Q_1(t) \mathrm{M} \left[y_t y_t^* \right] + Q_2(t) \mathrm{M} \left[u_t u_t^* \right] \big) \mathrm{d}t + \operatorname{tr} \big(Q_0 \mathrm{M} \left[y_T y_T^* \right] \big).$$

Из (1), (2), (5) следует, что процессы y_t и u_t центрированы, поэтому

$$\mathbf{J}(U, P_w) = \int_0^T \operatorname{tr} \big(Q_1(t) \operatorname{cov}(y_t, y_t) + Q_2(t) \operatorname{cov}(u_t, u_t) \big) \mathrm{d}t + \operatorname{tr} \big(Q_0 \operatorname{cov}(y_T, y_T) \big).$$

В силу линейности уравнения состояния (1) и допустимых операторов управления (5), функционал $\mathbf{J}(U, P_w)$ не зависит от каких-либо других параметров распределения P_w кроме интенсивности γ, то есть

$$\mathbf{J}(U, P_w) = J(U, \gamma).$$

4. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Предположим, что множество Γ содержит лишь один элемент θ. В этом случае модель (1), (2) не содержит неопределенности, а $\gamma = \theta$.

Тогда управление $\hat{U}$, доставляющее минимум критерию (6) при произвольном распределении P_w удовлетворяющем (3) при $\gamma = \theta$, задается следующими формулами [1, 2, 3]:

$$\hat{u}_t = -L_t \hat{y}_t, \tag{7}$$

где $\hat{y}_t$ — наилучшая линейная несмещенная оценка для y_t по наблюдениям $Z_t = \{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$,

$$L_t = Q_2^{-1}(t) A_t^* S_t, \tag{8}$$

а S_t является решением уравнения

$$\begin{cases} -\dot{S}_t = a_t^* S_t + S_t a_t + Q_1(t) - S_t A_t Q_2^{-1}(t) A_t^* S_t \\ S_T = Q_0. \end{cases} \tag{9}$$

Если выполняется условие (4), то наилучшая линейная несмещенная оценка $\hat{y}_t$ определяется уравнениями фильтра Калмана-Бьюси [16, 18]:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{y}_t = a_t \hat{y}_t \mathrm{d}t + A_t \hat{u}_t \mathrm{d}t + K_t(\theta)(\mathrm{d}z_t - c_t \hat{y}_t \mathrm{d}t), \\ \hat{y}_0 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$K_t(\theta) = (R_t(\theta) c_t^* + b_t \theta d_t^*)(d_t \theta d_t^*)^{-1}, \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dot{R}_t(\theta) = a_t R_t(\theta) + R_t(\theta) a_t^* + b_t \theta b_t^* - K_t(\theta) d_t \theta d_t^* K_t^*(\theta), \\ R_0(\theta) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

При этом для оператора оптимального линейного управления $\hat{U}$ критерий (6) можно представить в следующем виде [3]:

$$J(\hat{U}, \theta) = \int_0^T \operatorname{tr}\left(S_t b_t \theta b_t^* + L_t^* Q_2(t) L_t R_t(\theta)\right) \mathrm{d}t.$$

Далее оператор управления вида (7)-(12) будем обозначать $U_O(\theta)$.

5. ЗАДАЧА МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть теперь Γ не является одноточечным, т.е. модель (1, 2) содержит априорную неопределенность. Для решения задачи оптимального управления воспользуемся игровым подходом, использованным в [15, 16, 17] для решения задачи фильтрации.

Определение 1. Оператор $\hat{U}$ называется минимаксным по критерию $J(U, \gamma)$ на $\mathcal{U} \times \Gamma$, если

$$\hat{U} \in \operatorname*{argmin}_{U \in \mathcal{U}} \sup_{\gamma \in \Gamma} J(U, \gamma). \tag{13}$$

Наряду с прямой задачей (13) рассмотрим также двойственную задачу

$$\hat{\gamma} \in \operatorname*{argmax}_{\gamma \in \Gamma} J^0(\gamma), \tag{14}$$

где $J^0(\gamma)$ — двойственный функционал:

$$J^0(\gamma) = \inf_{U \in \mathcal{U}} J(U, \gamma). \tag{15}$$

Пусть решения прямой (13) и двойственной (14) задач оптимизации существуют и образуют седловую точку критерия $J(U,\gamma)$:

$$J(\hat{U},\gamma) \le J(\hat{U},\hat{\gamma}) \le J(U,\hat{\gamma}), \quad \forall U \in \mathcal{U}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Пусть $U_O(\theta)$ — оператор управления, заданный уравнениями (7)-(12) для $\theta \in \Gamma$. Если $\hat{\gamma} \in \operatorname*{argmax}_{\gamma\in\Gamma} \inf_{U\in\mathcal{U}} J(U,\gamma)$, то $\hat{U} \in \operatorname*{argmin}_{U\in\mathcal{U}} J(U,\hat{\gamma})$. В разделе 4 показано, что в этом случае $\hat{U} = U_O(\hat{\gamma}) \in \mathcal{U}_O$, где $\mathcal{U}_O$ — множество операторов вида $U_O(\theta)$, $\theta \in \Gamma$. Таким образом, если $(\hat{U},\hat{\gamma})$ — седловая точка $J(U,\gamma)$ на $\mathcal{U}_O \times \Gamma$, то она также является седловой точкой и на $\mathcal{U} \times \Gamma$. Поэтому в дальнейших рассмотрениях без ограничения общности вместо $\mathcal{U}$ будет использоваться множество операторов $\mathcal{U}_O$.

Пусть матрица $l_{ij} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ имеет единицу на пересечении i-й строки и j-го столбца, а все остальные элементы — нули. В следующей лемме приведен явный вид функционала

$$I(\theta,\gamma) = J(U_O(\theta),\gamma).$$

Лемма 1. *Пусть θ, γ, $\in \Gamma$, тогда*

$$I(\theta,\gamma) = \mathrm{tr}[H^*(\theta)\gamma],$$

где матрица $H(\theta)$ определяется следующим образом:

$$H(\theta) = \{H_{ij}(\theta)\} \in \mathbb{R}^{r\times r}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} H_{ij}(\theta) = \int_0^T \mathrm{tr}\left(Q_1(t)R_y(t,\theta,l_{ij}) + L_t^* Q_2(t) L_t R_{\hat{y}}(t,\theta,l_{ij})\right)\mathrm{d}t + \\ + \mathrm{tr}\left(Q_0 R_y(T,\theta,l_{ij})\right), \end{aligned} \tag{17}$$

$R_y(t,\theta,l_{ij})$ и $R_{\hat{y}}(t,\theta,l_{ij})$ являются блоками матрицы

$$R_t(\theta,l_{ij}) = \begin{pmatrix} R_y(t,\theta,l_{ij}) & R_{y\hat{y}}(t,\theta,l_{ij}) \\ R_{\hat{y}y}(t,\theta,l_{ij}) & R_{\hat{y}}(t,\theta,l_{ij}) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$R_t(\theta,l_{ij})$ подчиняется уравнению

$$\begin{cases} \dot{R}_t(\theta,l_{ij}) = \Psi_t(\theta)R(\theta,l_{ij}) + R_t(\theta,l_{ij})\Psi_t^*(\theta) + \psi_t(\theta)l_{ij}\psi_t^*(\theta), \\ R_0(\theta,l_{ij}) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\Psi_t(\theta) = \begin{pmatrix} a_t & -A_t L_t \\ K_t(\theta)c_t & a_t - A_t L_t - K_t(\theta)c_t \end{pmatrix}, \quad \psi_t(\theta) = \begin{pmatrix} b_t \\ K_t(\theta)d_t \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а $K_t(\theta)$ определяется соотношениями (11), (12).

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Из последнего утверждения нетрудно вывести явное выражение для двойственного функционала и показать существование решения двойственной задачи (14).

Теорема 1. *Пусть Γ — выпуклый компакт неотрицательно определенных матриц, удовлетворяющий условию регулярности (4). Тогда выполняется следующее.*

1. Двойственный функционал $J^0(\gamma)$ имеет аналитический вид

$$J^0(\gamma) = \mathrm{tr}[H^*(\gamma)\gamma], \tag{21}$$

где $H^*(\gamma)$ определена в (16)-(20) при $\theta = \gamma$.

2. Существует решение $\hat{\gamma}$ двойственной задачи (14).

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Следующее утверждение явно описывает пару $(\hat{U}, \hat{\gamma})$ в задаче минимаксной линейной фильтрации (1)-(6).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы (1), тогда пара $(\hat{U}, \hat{\gamma})$, где $\hat{\gamma}$ — решение (14), а $\hat{U} = U_O(\hat{\gamma})$ — оператор управления (7)-(12) при $\theta = \hat{\gamma}$, образует седловую точку критерия $J(U,\gamma)$ на $\mathcal{U}_O \times \Gamma$. При этом гарантированное значение критерия (6) можно вычислить по формуле*

$$\hat{J} = J^0(\hat{\gamma}).$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Следствие 1. *Оператор $\hat{U} = U_O(\hat{\gamma})$ является минимаксным оператором линейного управления на $\mathcal{U} \times \Gamma$.*

Замечание 1. Полученные результаты показывают, что в задаче минимаксного управления нарушается фундаментальный «принцип разделения», имеющий место в классической задаче линейного стохастического управления со среднеквадратическим критерием качества. Действительно, решение двойственной задачи $\hat{\gamma} \in \operatorname*{argmax}_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{tr}[H^*(\gamma)\gamma]$ зависит от параметров Q_0, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ критерия качества управления и, следовательно, оценка $\hat{y}_t$ в силу (10)-(12) также будет зависеть от этих параметров. Таким образом, задачи синтеза закона управления и обработки наблюдений в минимаксной постановке не разделяются, что имеет место в случае полной априорной информации, рассмотренном в разделе 4.

6. РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Из теоремы 2 и следствия 1 следует, что оператор минимаксного управления зависит от решения двойственной задачи (14).

Далее рассмотрен случай, когда двойственная задача имеет аналитическое решение.

Утверждение 1. *Пусть множество неопределенности содержит максимальный элемент $\bar{\gamma} \in \Gamma$:*

$$\bar{\gamma} - \gamma \succeq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

тогда $\hat{U} = U_O(\bar{\gamma})$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Различные виды множеств, обладающих максимальным элементом приведены, например, в [16].

Если множество неопределенности Γ не имеет максимального элемента, то для решения двойственной задачи предлагается использовать следующий итерационный алгоритм:

Алгоритм 1.

Шаг 1. Положить $s = 0$ и выбрать произвольное начальное приближение $\gamma_s \in \Gamma$.

Шаг 2. Вычислить $H_s = H(\gamma_s)$, используя формулы (16)-(20) из леммы 1 для $\theta = \gamma_s$.

Шаг 3. Решить задачу обобщенного линейного программирования

$$\tilde{\gamma}_s \in \operatorname*{argmax}_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{tr}\left[H_s^* \gamma\right].$$

Шаг 4. Вычислить $\delta_s = \operatorname{tr}\left[H_s^* \Delta\gamma_s\right]$, где $\Delta\gamma_s = \tilde{\gamma}_s - \gamma_s$.
Если $\delta_s \leq 0$, то $\hat{\gamma} = \gamma_s$ и процесс поиска завершен.
Если $\delta_s > 0$, то перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Решить задачу однопараметрической оптимизации:

$$\lambda_s \in \operatorname*{argmax}_{\lambda \in [0,1]} J^0(\gamma_s + \lambda \Delta\gamma_s). \tag{22}$$

Шаг 6. Положить $\gamma_{s+1} = \gamma_s + \lambda_s \Delta\gamma_s$, увеличить s на единицу и вернуться к шагу 2.

Далее приведено утверждение о сходимости последовательности $\{\gamma_s\}$ ко множеству

$$\Gamma_0 = \operatorname*{argmax}_{\gamma \in \Gamma} \inf_{U \in \mathcal{U}} J(U, \gamma)$$

решений двойственной задачи (14),(21).

Теорема 3. *В условиях теоремы 1.*

1. *Если итерационный процесс останавливается после конечного числа итераций s^*, то $\gamma_{s^*} \in \Gamma_0$, и $\hat{J} = \operatorname{tr}[H^*(\gamma_{s^*})\gamma_{s^*}]$.*
2. *Если $s \to \infty$, то $\rho(\gamma_s, \Gamma_0) \to 0$, и $\operatorname{tr}[H^*(\gamma_s)\gamma_s] \to \hat{J}_T$.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Замечание 2. Очевидным преимуществом предложенного подхода является то, что решение двойственной задачи $\hat{\gamma}$ и гарантированное значение критерия могут быть вычислены заранее, до процесса обработки наблюдений. После того, как решение двойственной задачи получено, оператор минимаксного линейного управления определяется формулами (7)-(12), где $\theta = \hat{\gamma}$.

7. ПРИМЕР

На отрезке $t \in [0, 1]$ рассмотрим стационарную систему, состояние которой изменяется в соответствии со следующим уравнением:

$$\mathrm{d}y_t = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.0 & 0.6 \end{pmatrix} y_t \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & 0.2 \\ 0.2 & -0.4 & 0.3 \\ -0.1 & 0.3 & -0.6 \end{pmatrix} u_t \mathrm{d}t +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.3 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}w_t,$$

причем $y_0 = 0$.

Будем предполагать, что на всем отрезке $[0,1]$ доступны следующие наблюдения:

$$\mathrm{d}z_t = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 1.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} y_t \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \mathrm{d}w_t.$$

Относительно возмущений в уравнении состояния и наблюдениях будем предполагать, что интенсивность $\gamma = \mathrm{diag}(\gamma^y, \gamma^z) \in \Gamma$, где множество неопределенности Γ задано поэлементными ограничениями вида

$$\Gamma = \{\gamma : \ \gamma = \mathrm{diag}(\gamma^y, \gamma^z), \bar{\gamma}^y - dE \le \gamma^y \le \bar{\gamma}^y + dE, \\ \bar{\gamma}^z - dE \le \gamma^z \le \bar{\gamma}^z + dE \ \},$$

где $d = 0.1$ и E — матрица размера (3×3) с единичными элементами,

$$\bar{\gamma}^y = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.4 & 0.2 \\ -0.4 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^z = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Качество управления будем определять величиной критерия (6), где Q_0, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ — единичные матрицы для всех $t \in [0,1]$.

Далее приведено решение двойственной задачи для описанной системы, найденное с помощью алгоритма 1 с начальным приближением $\gamma_0 = \mathrm{diag}(\gamma_0^y, \gamma_0^z)$, $\gamma_0^y = \bar{\gamma}^y$, $\gamma_0^z = \bar{\gamma}^z$, значение критерия для которого равно $J(U_O(\gamma_0), \gamma_0) = J^0(\gamma_0) = 3.4540$.

Решение двойственной задачи имеет следующий вид: $\hat{\gamma} = \mathrm{diag}(\hat{\gamma}^y, \hat{\gamma}^z)$, где

$$\hat{\gamma}^y = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.4682 & 0.3 \\ -0.4682 & 0.8 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & 0.7 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\gamma}^z = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.0492 \\ 0.1 & 0.9 & -0.0682 \\ 0.0492 & -0.0682 & 0.5 \end{pmatrix},$$

а соответствующее гарантированное значение критерия равно $J^0(\hat{\gamma}) = 4.0982$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство (Лемма 1). Пусть $U_O(\theta)$, $\theta \in \Gamma$ — оператор оптимального линейного управления (7)-(12), вычисленный в предположении, что $\gamma = \theta$, тогда

$$\begin{cases} \mathrm{d}y_t = a_t y_t \mathrm{d}t - A_t L_t \hat{y}_t \mathrm{d}t + b_t \mathrm{d}w_t, \\ y_0 = 0, \end{cases}$$

при этом оценка $\hat{y}_t$ определяется уравнением

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{y}_t = (a_t - A_t L_t)\hat{y}_t \mathrm{d}t + K_t(\theta)(\mathrm{d}z_t - c_t \hat{y}_t \mathrm{d}t), \\ \hat{y}_0 = 0. \end{cases}$$

Заменяя в последнем уравнении $\mathrm{d}z_t$ на правую часть уравнения (2), получаем

$$\mathrm{d}\hat{y}_t = K_t(\theta)c_t y_t \mathrm{d}t + (a_t - A_t L_t - K_t(\theta)c_t)\hat{y}_t \mathrm{d}t + K_t(\theta)d_t \mathrm{d}w_t.$$

Обозначим через ξ_t вектор, составленный из y_t и $\hat{y}_t$, т.е. $\xi_t = \mathrm{col}(y_t, \hat{y}_t)$.

Пусть γ — матрица интенсивностей процесса w_t в (3), тогда $R_t(\theta,\gamma) = \mathrm{cov}(\xi_t, \xi_t)$ удовлетворяет уравнению метода моментов [18]:

$$\begin{cases} \dot{R}_t(\theta,\gamma) = \Psi_t(\theta)R_t(\theta,\gamma) + R_t(\theta,\gamma)\Psi_t^*(\theta) + \psi_t(\theta)\gamma\psi_t^*(\theta), \\ R_0(\theta,\gamma) = 0, \end{cases} \tag{A.1}$$

где $\Psi_t(\theta)$, $\psi_t(\theta)$ имеют вид (20).

Матрицу $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^r$ можно представить в виде

$$\gamma = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} l_{ij}.$$

Так как уравнение (A.1) линейно по γ, заключаем

$$R_t(\theta,\gamma) = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} R_t(\theta, l_{ij}), \tag{A.2}$$

где $R_t(\theta, l_{ij})$ является решением уравнения (19).

Для оператора оптимального линейного управления $U_O(\theta)$ при истинном значении интенсивности шумов γ критерий (6) имеет вид

$$\begin{aligned} I(\theta,\gamma) &= \\ = \int_0^T \mathrm{tr}\,\big(Q_1(t)\,\mathrm{cov}(y_t,y_t) + L_t^* Q_2(t) L_t\,\mathrm{cov}(\hat{y}_t,\hat{y}_t)\big)\mathrm{d}t + \mathrm{tr}\,\big(Q_0\,\mathrm{cov}(y_T,y_T)\big) &= \\ = \int_0^T \mathrm{tr}\,\big(q_1(t)R_t(\theta,\gamma)\big)\mathrm{d}t + \mathrm{tr}\,\big(q_0 R_T(\theta,\gamma)\big)&, \end{aligned} \tag{A.3}$$

где

$$q_1(t) = \mathrm{diag}(Q_1(t), L_t^* Q_2(t) L_t); \quad q_0 = \mathrm{diag}(Q_0, \mathbf{0}),$$

а $\mathbf{0}$ — нулевая матрица подходящего размера.

Из (A.3) и (A.2) получаем:

$$\begin{aligned} I(\theta,\gamma) = \int_0^T \mathrm{tr}\,\big(q_1(t)R_t(\theta,\gamma)\big)\mathrm{d}t + \mathrm{tr}\,\big(q_0 R_T(\theta,\gamma)\big) &= \\ = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} \left[\int_0^T \mathrm{tr}\,\big(q_1(t)R_t(\theta,l_{ij})\big)\mathrm{d}t + \mathrm{tr}\,\big(q_0 R_T(\theta,l_{ij})\big)\right] &= \\ = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} H_{ij}(\theta) = \mathrm{tr}[H^*(\theta)\gamma]&. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функция $H(\theta)$ непрерывна по $\theta \in \Gamma$.*

Доказательство. В [16] показано, что решение $R_t(\theta)$ уравнения Риккати (12) и, как следствие, функция $K_t(\theta)$ кусочно непрерывны по t на $[0,T]$ и непрерывны по θ на Γ. Решение S_t уравнения (9) и функция L_t также непрерывны по t, откуда следует, что функции $\Psi_t(\theta)$ и $\psi_t(\theta)$ из (20) также кусочно непрерывны по t на $[0,T]$ и непрерывны по θ на Γ.

Тогда с учетом (19) можно заключить, что функции $R_t(\theta, l_{ij})$ непрерывны на $[0,T)\times\Gamma$, поэтому $H(\theta)$ непрерывны по $\theta \in \Gamma$ в силу определений (18),(17),(16) и кусочной непрерывности $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ и L_t на $t \in [0,T]$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство (Теорема 1). Критерий двойственной задачи можно представить в следующем виде:

$$J^0(\gamma) = \inf_{U\in\mathcal{U}} J(U,\gamma) = \inf_{U\in\mathcal{U}_O} J(U,\gamma) = J(U_O(\gamma),\gamma) =$$
$$= I(\gamma,\gamma) = \mathrm{tr}[H^*(\gamma)\gamma].$$

Таким образом, $J^0(\gamma)$ непрерывен по γ на Γ в силу непрерывности функций $H(\gamma)$, установленной в лемме 2. Отсюда следует, что $J^0(\gamma)$ достигает своего максимального значения на компактном множестве Γ, то есть решение двойственной задачи $\hat{\gamma} \in \operatorname*{argmax}_{\gamma\in\Gamma} J^0(\gamma)$ существует.

Теорема 1 доказана.

Лемма 3. *Пусть функционал $J(U,\gamma)$, $U \in \mathcal{U}_O$, $\gamma \in \Gamma$, где Γ — выпуклое множество, удовлетворяет следующим условиям.*

1. *$J(U,\gamma)$ вогнут по γ на Γ при любом $U \in \mathcal{U}_O$.*
2. *Для любого $\gamma \in \Gamma$ существует $\tilde{U}(\gamma) \in \mathcal{U}_O$ такой, что*

$$\inf_{U\in\mathcal{U}_O} J(U,\gamma) = J(\tilde{U}(\gamma),\gamma).$$

3. *Существует решение двойственной задачи*

$$\hat{\gamma} \in \operatorname*{argmax}_{\gamma\in\Gamma} J(\tilde{U}(\gamma),\gamma).$$

4. *Для любого $\gamma \in \Gamma$ и $\hat{U} = \tilde{U}(\hat{\gamma})$ выполнено*

$$J(\hat{U},\gamma) = \lim_{\alpha\to 0+} J(\tilde{U}(\gamma^\alpha),\gamma),$$

где $\gamma^\alpha = (1-\alpha)\hat{\gamma} + \alpha\gamma$, $\alpha \in [0,1]$.

Тогда $(\hat{U},\hat{\gamma})$ — седловая точка функционала $J(U,\gamma)$ на $\mathcal{U}_O \times \Gamma$.

Доказательство леммы 3 приведено в [19].

Доказательство (Теорема 2). Для доказательства данной теоремы необходимо проверить условия леммы 3.

1. При любом $\theta \in \Gamma$ функция $I(\theta,\gamma) = \mathrm{tr}[H^*(\theta)\gamma]$ линейна по $\gamma \in \Gamma$ и, следовательно, вогнута по γ на Γ.

2. Для любой фиксированной матрицы интенсивности γ оператор управления $\tilde{U}(\gamma) \in \mathcal{U}_O$, такой, что
$$\inf_{U \in \mathcal{U}_O} J(U,\gamma) = J(\tilde{U}(\gamma),\gamma),$$
существует и задается уравнениями (7)-(12) при $\theta = \gamma$.
3. Выполнение третьего условия леммы 3 установлено теоремой 1.
4. Остается проверить последнее условие. Пусть $\gamma^\alpha = (1-\alpha)\hat{\gamma}+\alpha\gamma$ для произвольной матрицы $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \in [0,1]$.
$$\lim_{\alpha\to 0+} J(U_O(\gamma^\alpha),\gamma) = \lim_{\alpha\to 0+} \mathrm{tr}[H^*(\gamma^\alpha)\gamma] = \mathrm{tr}[\lim_{\alpha\to 0+} H^*(\gamma^\alpha)\gamma] = \mathrm{tr}[H^*(\hat{\gamma})\gamma] = J(U_O(\hat{\gamma}),\gamma),$$
так как функция $H(\gamma)$ непрерывна в точке $\hat{\gamma} \in \Gamma$.

Таким образом, все условия леммы 3 выполнены, поэтому пара $(\hat{U},\hat{\gamma})$, где $\hat{U} = U_O(\hat{\gamma})$, образует седловую точку функционала $J(U,\gamma)$ на $\mathcal{U}_O \times \Gamma$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство (Утверждение 1). Из леммы 1 следует, что для любой матрицы $\theta \in \Gamma$ критерий $J(U_O(\theta),\gamma) = \mathrm{tr}[H^*(\theta)\gamma]$, причем $H(\theta) \succeq 0$ по построению, для всех $\theta \in \Gamma$. Пусть $H(\theta) = \Lambda\Lambda^*$, тогда для любого $U \in \mathcal{U}_O$
$$J(U,\gamma) = \mathrm{tr}[H^*(\theta)\gamma] = \mathrm{tr}[\Lambda^*\Lambda\gamma] = \mathrm{tr}[\Lambda\gamma\Lambda^*] \le \mathrm{tr}[\Lambda\bar{\gamma}\Lambda^*] = J(U,\bar{\gamma}).$$
Отсюда следует, что
$$\sup_{\gamma\in\Gamma} J(U,\gamma) = J(U,\bar{\gamma}),$$
т.е. $\hat{U} = U_O(\bar{\gamma})$ в силу утверждения теоремы 2.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство (Теорема 3). Рассмотрим многозначное алгоритмическое отображение $\mathcal{L}$: $\Gamma \longrightarrow \Gamma$, где $\gamma_{s+1} = \mathcal{L}(\gamma_s)$, $\gamma_0 \in \Gamma$, определяемое алгоритмом 1.

В силу леммы 2 функционал $J^0(\gamma) = \mathrm{tr}[H^*(\gamma)\gamma]$ непрерывен на Γ. Покажем, что $\gamma_s \in \Gamma_0$ тогда и только тогда, когда $\delta_s = 0$.

Функционал $J^0(\gamma)$ есть точная нижняя грань на $\mathcal{U}_0$ линейных по γ функций $J(U,\gamma)$, поэтому он вогнут по γ на Γ_0. В силу этого условия $\gamma_s \in \Gamma_0$ равносильно
$$\sup_{\tilde{\gamma}\in\Gamma} \left(J^0(\gamma)\right)'_{\Delta\gamma}\Big|_{\gamma_s} = 0, \tag{A.4}$$
где $(\cdot)'_{\Delta\gamma}\Big|_{\gamma_s}$ — производная по направлению $\Delta\gamma = \tilde{\gamma} - \gamma_s$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, в точке γ_s.

В силу определения двойственного функционала (15), компактности множества неопределенности Γ и теоремы 3.5 из [20] можно заключить, что
$$\left(J^0(\gamma)\right)'_{\Delta\gamma}\Big|_{\gamma_s} = \inf_{U\in\mathcal{U}} \left(J(U,\gamma)\right)'_{\Delta\gamma}\Big|_{\gamma_s},$$
откуда в силу линейности $J(U,\gamma)$ по γ при фиксированном управлении, а также оптимальности управления $U_O(\gamma_s)$ (7)-(12) при фиксированной матрице интенсивности γ_s, имеем
$$\left(J^0(\gamma)\right)'_{\Delta\gamma}\Big|_{\gamma_s} = \inf_{U\in\mathcal{U}} J(U,\tilde{\gamma}-\gamma_s)\Big|_{\gamma_s} = J(U_O(\gamma_s),\tilde{\gamma}-\gamma_s) = \mathrm{tr}[H_s^*\tilde{\gamma}] - \mathrm{tr}[H_s^*\gamma_s].$$

Таким образом, условие $\delta_s = 0$ равносильно $\gamma_s \in \Gamma_0$ и $\delta_s > 0$ если $\gamma_s \notin \Gamma_0$.

Из определения γ_{s+1} следует, что

$$J^0(\gamma_{s+1}) = \max_{\lambda\in[0,1]} J^0(\gamma_s + \lambda(\tilde{\gamma}_s - \gamma_s)) \geq J^0(\gamma_s), \tag{A.5}$$

причем в силу вогнутости J_0 равенство в (A.5) достигается только при выполнении условия (A.4), или, как было показано выше, при $\delta_s = 0$. То есть при $\gamma_s \notin \Gamma_0$ ($\delta_s > 0$) выполняется $J^0(\gamma_{s+1}) > J^0(\gamma_s)$.

Представим отображение $\mathcal{L}$ в виде композиции трех отображений: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_3$, где

1. $\mathcal{L}_1 \colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{H} \times \Gamma$ ставит в соответствие матрице γ_s пару (H_s, γ_s), $H_s \in \operatorname*{argmin}_{H\in\mathcal{H}} \operatorname{tr}[H^*\gamma_s]$. Здесь $\mathcal{H}$ — компактное множество матриц $H = H(\theta)$, $\theta \in \Gamma$.
2. $\mathcal{L}_2 \colon \Gamma \longrightarrow \Gamma\times\Gamma$ ставит в соответствие паре (H_s, γ_s) пару $(\gamma_s, \tilde{\gamma}_s)$, где $\tilde{\gamma}_s$ находится из решения задачи линейного программирования в п. 3 алгоритма 1. Необходимо отметить, что $\mathcal{L}_1$ определяет направление максимизации, которая производится в п. 5.
3. $\mathcal{L}_3$: $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ ставит в соответствие паре $(\gamma_s, \tilde{\gamma}_s)$ матрицу γ_{s+1} по правилу $\gamma_{s+1} = \gamma_s + \tilde{\lambda}(\tilde{\gamma}_s - \gamma_s)$, а $\tilde{\lambda}$ определяется из решения задачи оптимизации (22) в п. 5 алгоритма.

Отображения $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ определяются с помощью решения задач оптимизации непрерывных функций на компактных множествах, откуда в силу леммы 7.3 из [21] можно сделать вывод, что эти отображения замкнуты. Кроме того, в силу следствия 4.2.1 из [21] отображение $\mathcal{L}$ также является замкнутым, как композиция замкнутых отображений.

Таким образом, алгоритмическое отображение $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами.

1. $\mathcal{L} : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ действует на компактном множестве.
2. Если $\mathcal{L}(\gamma_s) = \gamma_s$, то $\gamma_s \in \Gamma_0$.
   Если $\mathcal{L}(\gamma_s) = \gamma_{s+1} \neq \gamma_s$, то $J^0(\gamma_{s+1}) > J^0(\gamma_s)$.
3. $\mathcal{L}$ замкнуто в каждой точке $\gamma \in \Gamma$.

Теперь из теоремы A и леммы 11.2 из [21] можно заключить, что для последовательности $\{\gamma_s\}$: $\gamma_{s+1} = \mathcal{L}(\gamma_s)$, справедливо $\rho(\gamma_s, \Gamma_0) \longrightarrow 0$ при $s \longrightarrow \infty$ для любого начального приближения γ_0. Если же $\mathcal{L}(\gamma_s) = \gamma_s$, то $\gamma_s \in \Gamma_0$.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Статистика случайных процессов.* М.: Наука, 1974.
2. Девис М.Х.А. *Линейное оценивание и стохастическое управление.* М.: Наука, 1984.
3. Острем К.Ю. *Введение в стохастическую теорию управления.* М.: Мир, 1973.
4. Looze D.P., Poor V., Vastola K.S., Darragh J.C. Minimax control of linear stochastic systems with noise uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1983, vol. AC-28, no. 9, pp. 882–888.
5. Ugrinovskii V.A., Petersen I.R. Minimax LQG control of stochastic partially observed uncertain systems. *SIAM J. Control and Optim.*, 2001, vol. 40, no. 4, pp. 1189–1226.
6. Savkin A.V., Petersen I.R. Minimax optimal control of uncertain systems with structured uncertainty. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 1995, no. 5, pp. 119–137.
7. Moheimani S.O.R., Savkin A.V., Petersen I.R. Minimax optimal control of discrete-time uncertain systems with structured uncertainty. *Dynamics and Control*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 5–24.
8. Phillis Y.A. Optimal estimation and control of discrete multiplicative systems with unknown second-order statistics. *J. Optim. Theory and Appl.*, 1990, vol. 64, no. 1, pp. 153–168.

9. Rubinovich E. Ya. Minimax generalized linear-quadratic stochastic control problem with incomplete information *Singular solutions and perturbations in control systems (Pereslavl-Zalessky, 1997)*, 185–189, IFAC Proc. Ser., IFAC, Laxenburg, 1997.

10. de la Pena D.M., Alamo T., Ramirez D.R., Camacho E.F. Min-Max model predictive control as a quadratic program. *Proc. 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.

11. de Araújo H.X., Langner C.G. $\mathcal{H}^\infty$ Control for uncertain systems under time domain constraints. *Proc. 44th IEEE Conf. On Decision and Control*, Seville, Spain, 2005, pp. 1325–1330.

12. Jian-Ming Xu, Li Yu An LMI approach to guaranteed cost PI control of linear uncertain systems. *Proc. 43rd IEEE Conf. On Decision and Control*, Bahamas, Nassau, 2004, pp. 2165–2170.

13. Пелевин А.Е. Робастная стабилизация линейного объекта при неопределенных параметрах модели. *Изв. РАН. Теория и Системы Управления*, 2003, №1. стр. 40–46.

14. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Песецкая Т.И. Реализация в реальном времени оптимальных обратных связей по выходу для линейных систем в условиях неопределенности. *Изв. РАН. Теория и Системы Управления*, 2005, №4. стр. 44–56.

15. Панков А.Р., Миллер Г.Б. Минимаксная линейная рекуррентная фильтрация неопределенно-стохастических последовательностей по интегральному критерию. *Информационные процессы*, 2001, том 1, №2, стр. 150–166.

16. Миллер Г.Б., Панков А.Р. Фильтрация случайного процесса в статистически неопределенной стохастической дифференциальной системе. *Автоматика и Телемеханика*, 2005, №1. стр. 59–71.

17. Миллер Г.Б., Панков А.Р. Минимаксная фильтрация в линейных неопределенно-стохастических дискретно-непрерывных системах. *Автоматика и Телемеханика*, 2006, №3, стр. 77–93.

18. Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы.* М.: Наука, 1990.

19. Pankov A.R., Siemenikhin K.V. Minimax estimation of random elements with application to infinite-dimensional statistical linearization. *Proc. 2nd International Conf. "System Identification and Control Problems"(SICPRO'2003)*, Moscow, 2003, pp. 1277–1291.

20. Пшеничный Б.Н. *Необходимые условия экстремума.* М.: Наука, 1982.

21. Зангвилл У. *Нелинейное программирование. Единый подход.* М.: Сов. радио, 1973.

Статью представил к публикации член редколлегии Б.М.Миллер