*Информационные процессы, Том 6, № 2, 2006, стр. 144–152.*




# Стационарные характеристики системы массового обслуживания $G^{[X]}/MSP/1/\infty$ с поступлением заявок группами ограниченного объема [1]

**В.В.Чаплыгин**

*Институт проблем информатики РАН, Москва*
Поступила в редколлегию 07.04.2006

**Аннотация**—Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с неординарным рекуррентным входящим потоком, марковским обслуживанием и накопителем бесконечной емкости. Найдены стационарные распределения числа заявок в системе по моментам поступления и в произвольные моменты, стационарные распределения времени ожидания начала обслуживания, времени пребывания произвольной заявки в системе и времени пребывания в системе группы, в которой поступила заявка.

## 1. ВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Исследованию систем массового обслуживания (СМО) с групповым поступлением заявок на современном этапе развития теории массового обслуживания уделяется значительное внимание, а область применения таких СМО весьма обширна. Например, СМО с групповым поступлением заявок дают возможность учесть пакетный характер трафика при моделировании узлов в современных информационно-вычислительных системах. Но, как правило, групповое поступление заявок (свойство неординарности входящего потока) рассматривалось по отношению к марковскому потоку (в частности, для СМО $M^{[X]}/M/1/\infty$, $M^{[X]}/G/1/\infty$ или $BMAP/G/1/\infty$), что далеко не всегда приемлемо для описания реальных процессов. В настоящей работе рассмотрена однолинейная СМО с неординарным рекуррентным входящим потоком, марковским процессом обслуживания и бесконечным накопителем. Исследования, проведенные в настоящей статье, основываются на результатах, полученных П.П.Бочаровым, А.В.Печинкиным и др. [1] для СМО $G/MSP/1/\infty$ и М.Ф.Ньютсом [2] для СМО $G/PH/1/\infty$.

Марковское обслуживание (MSP — Markov Service Process) впервые было введено П.П.Бочаровым [3], который рассмотрел однолинейную СМО с ординарным рекуррентным потоком. В дальнейшем исследования этой СМО было продолжено П.П.Бочаровым, А.В.Печинкиным и др. [1], для которой методом построения вложенной цепи Маркова получены основные стационарные характеристики и алгоритмы их расчета для случая конечного и бесконечного накопителя, включая распределения времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания произвольной заявки в системе. В дальнейшем, на основе идей, полученных для СМО $G/MSP/1/r$ в [1], были исследованы различные обобщения этой СМО, среди которых можно отметить работы [4, 5, 6]. Кроме этого, А.В.Печинкину и В.В.Чаплыгину [7, 8, 9, 10, 11] удалось получить алгоритмы расчета стационарных характеристик для многолинейных СМО с рекуррентным потоком и его обобщениями и марковским обслуживанием.

Кроме этого, как было отмечено ранее, необходимо выделить предложенные М.Ф.Ньютсом [2] методы расчета стационарного распределения числа заявок по моментам поступления для

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-07-89056.

СМО $G/PH/1/\infty$, и некоторые общие идеи, связанные с расчетом этого распределения для СМО с групповым поступлением заявок.

Рассмотрим СМО $G^{[X]}/MSP/1/\infty$ с накопителем бесконечной емкости.

Входящий в систему поток является неординарным рекуррентным. Время между соседними моментами поступления групп заявок имеет произвольную функцию распределения (ФР) $A(x)$. Все поступающие заявки однотипны, а максимально возможное число $K$ заявок в группе ограниченно, т. е. $K < \infty$, и с вероятностью $l_k$, $\quad k = \overline{1,K}$, $\quad l_1 + \ldots + l_K = 1$, группа содержит ровно $k$ заявок. Положим также $l_1 > 0$, случай, когда $l_1 = 0$, не рассматривается. Заявки в группе имеют порядковые номера, т.е., попадая в систему, заявки из группы становятся на обслуживание или попадают в накопитель согласно своему порядковому номеру в группе. Причем произвольная заявка, пришедшая в группе из $k$ заявок, может оказаться на любом месте в группе с одинаковой вероятностью $1/k$. Будем предполагать, что среднее время $a = \int\limits_0^\infty x\,dA(x)$ между поступлениями групп заявок конечно и, кроме того, там, где речь пойдет о стационарном распределении по времени, будем считать, что время между поступлениями групп заявок не может принимать только значения $jt$, где $t$ — положительное число, а $j = 0, 1, \ldots$ .

Марковский процесс обслуживания заявок может находиться в одном из $l$, $l < \infty$, состояний (фаз обслуживания). Тогда, если в некоторый момент в системе на обслуживании находится заявка и фаза обслуживания равна $i$, $\ i = \overline{1,l}$, то за «малое» время $\Delta$ с вероятность $\lambda_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на $j$, $\ j = \overline{1,l}$, и заявка будет продолжать обслуживаться, а с вероятностью $n_{ij}\Delta + o(\Delta)$ фаза изменится на $j$, $\ j = \overline{1,l}$, но обслуживание заявки закончится и она покинет систему. Матрицы из элементов $\lambda_{ij}$ и $n_{ij}$ будем обозначать через $\Lambda$ и $N$ соответственно. Введем также матрицу $\Lambda^* = \Lambda + N$, причем матрица $\Lambda^*$ предполагается неразложимой, а матрица $N$ — ненулевой. Будем считать, что на свободном периоде фаза обслуживания не изменяется. Вектор стационарных вероятностей марковского процесса обслуживания заявок (т.е. марковского процесса с инфинитезимальной матрицей $\Lambda^*$) будем обозначать через $\boldsymbol{\pi}$.

Заявки обслуживаются в порядке поступления (дисциплина FCFS).

Поскольку далее рассматривается только стационарный режим функционирования системы, будем предполагать, что выполнено условие $\rho < 1$, где $\rho = \lambda_a/\mu$ — загрузка системы при бесконечном числе заявок в очереди, $\mu = \boldsymbol{\pi}^T N \mathbf{1}$ — стационарная интенсивность обслуживания заявок (здесь и далее через $\mathbf{1}$ будем обозначать вектор-столбец из единиц), а $\lambda_a = (l_1 + 2\,l_2 + \ldots + K l_K)/a$ — интенсивность поступления заявок в систему. Это условие является необходимым и достаточным для существования стационарного режима.

## 2. ВЛОЖЕННАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим последовательные моменты $\tau_n$, $\ n \ge 1$, поступления заявок в систему.

Пусть $\xi(t)$ — фаза обслуживания заявок в момент времени $t$, а $\nu(t)$ — число заявок в системе в этот момент.

Определим случайные величины $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$ и $\nu_n = \nu(\tau_n + 0)$, которые задают соответственно фазу обслуживания и число заявок в системе непосредственно после момента поступления $n$-й заявки. Кроме того, положим $\zeta_n = (\xi_n, \nu_n)$. Тогда последовательность $\{\zeta_n, \quad n \ge 0\}$ образует однородную цепь Маркова, которую будем называть вложенной. Очевидно, что множество состояний $\mathcal{X}$ вложенной цепи Маркова имеет вид

$$\mathcal{X} = \{(i,k), \quad i = \overline{1,l}, \quad k \ge 1\},$$

где индексы $i$ и $k$ указывают соответственно фазу обслуживания и число заявок в системе непосредственно после момента поступления заявки.

Выпишем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $\{\zeta_n, \quad n \geq 1\}$. Для этого сначала введем матрицы $F_k(x)$, $F_k^*(x)$, $A_k$, $A_k^*$, которые имеют тот же смысл, что и для системы $G/MSP/1/r$, рассмотренной в работе [1]. Для матриц $F_k(x)$ и $F_k^*(x)$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$F_0(x) = e^{\Lambda x},$$

$$F_k(x) = \int\limits_0^x F_{k-1}(y)\, N\, F_0(x-y)\, dy, \quad k \geq 1,$$

$$F_k^*(x) = \int\limits_0^x F_{k-1}(y)\, N\, dy, \quad k \geq 1,$$

а матрицы $A_k$ и $A_k^*$ определяются формулами

$$A_k = \int\limits_0^\infty F_k(x)\, dA(x), \quad k \geq 0,$$

$$A_k^* = \int\limits_0^\infty F_k^*(x)\, dA(x), \quad k \geq 0.$$

Алгоритмы расчета вспомогательных матриц $F_k(x)$ и матриц экспоненциальных моментов $A_k$ подробно изложены в работах [1, 12].

Введем следующие матрицы

$$\hat{A}_{mk}^* = \sum_{i=0}^{m-1} l_{k-m+i} A_i + l_k A_m^*, \quad k = \overline{2, K}, \quad m < k,$$

$$\hat{A}_{mk}^* = \sum_{i=1}^{k-1} l_i A_{m-i} + l_k A_m^*, \quad k = \overline{1, K}, \quad m \geq k,$$

$$\hat{A}_k = \sum_{i=0}^{k} l_{K-i} A_{k-i}, \quad 0 \leq k \leq K-1,$$

$$\hat{A}_k = \sum_{i=0}^{K-1} l_{K-i} A_{k-i}, \quad k \geq K.$$

Матрица $P$ переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, представленная в блочной форме $P = (P_{km})_{k,m \geq 1}$, имеет следующий вид:

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc|ccc}
\hat{A}^*_{11} & \hat{A}^*_{12} & \dots & \hat{A}^*_{1K} & \hat{A}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hat{A}^*_{21} & \hat{A}^*_{22} & \dots & \hat{A}^*_{2K} & \hat{A}_1 & \hat{A}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\hat{A}^*_{K1} & \hat{A}^*_{K2} & \dots & \hat{A}^*_{KK} & \hat{A}_{K-1} & \hat{A}_{K-2} & \dots & \hat{A}_0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
\hat{A}^*_{K+1,1} & \hat{A}^*_{K+1,2} & \dots & \hat{A}^*_{K+1,K} & \hat{A}_K & \hat{A}_{K-1} & \dots & \hat{A}_1 & \hat{A}_0 & 0 & \dots \\
\hat{A}^*_{K+2,1} & \hat{A}^*_{K+2,2} & \dots & \hat{A}^*_{K+2,K} & \hat{A}_{K+1} & \hat{A}_K & \dots & \hat{A}_2 & \hat{A}_1 & \hat{A}_0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right) \quad (1)$$

Можно показать, что вложенная цепь Маркова является неприводимой и непериодической. Обозначим через $p^*_{ik}$, $i = \overline{1,l}$, $k \geq 1$, стационарную по вложенной цепи Маркова вероятность того, что в системе имеется $k$ заявок и фаза обслуживания равна $i$, и положим $\boldsymbol{p}^*_k = (p^*_{1k}, \dots, p^*_{lk})$, $k \geq 1$, $\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{p}^*_1, \boldsymbol{p}^*_2, \dots)$. Тогда для $\boldsymbol{p}^*$ справедлива система уравнений равновесия (СУР)

$$\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p}^* P, \quad (2)$$

или в развернутом виде

$$\boldsymbol{p}^*_k = \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{p}^*_m \hat{A}^*_{km}, \quad k = \overline{1,K},$$

$$\boldsymbol{p}^*_k = \sum_{m=k-K}^{\infty} \boldsymbol{p}^*_m \hat{A}_{m-k+K}, \quad k > K.$$

с условием нормировки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{p}^*_k \mathbf{1} = 1.$$

## 3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК ПО ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Прежде, чем получить решение СУР, приведем матрицу $P$ переходных вероятностей к определенному виду. Для этого введем новые обозначения

$$\tilde{A}^*_k = \begin{pmatrix}
\hat{A}^*_{K(k-1)+1,1} & \hat{A}^*_{K(k-1)+1,2} & \dots & \hat{A}^*_{K(k-1)+1,K} \\
\hat{A}^*_{K(k-1)+2,1} & \hat{A}^*_{K(k-1)+2,2} & \dots & \hat{A}^*_{K(k-1)+2,K} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hat{A}^*_{K(k-1)+K,1} & \hat{A}^*_{K(k-1)+K,2} & \dots & \hat{A}^*_{K(k-1)+K,K}
\end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix}
\hat{A}_0 & \hat{0} & \dots & 0 \\
\hat{A}_1 & \hat{A}_0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hat{A}_{K-1} & \hat{A}_{K-2} & \dots & \hat{A}_0
\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} \hat{A}_{Kk} & \hat{A}_{Kk} & \dots & \hat{A}_{Kk} \\ \hat{A}_{Kk+1} & \hat{A}_{Kk+1} & \dots & \hat{A}_{Kk+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{Kk+K-1} & \hat{A}_{Kk+K-1} & \dots & \hat{A}_{Kk+K-1} \end{pmatrix}, \quad k \geq 1,$$

Тогда матрицу переходных вероятностей (1) вложенной цепи Маркова можно записать в следующем блочном виде:

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1^* & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{A}_2^* & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{A}_3^* & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & 0 & \dots \\ \tilde{A}_4^* & \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & \dots \\ \tilde{A}_5^* & \tilde{A}_4 & \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3}$$

Вводя вектора $\tilde{\boldsymbol{p}}_k^* = (\boldsymbol{p}_{K(k-1)+1}^*, \boldsymbol{p}_{K(k-1)+2}^*, \dots, \boldsymbol{p}_{K(k-1)+K}^*)$, $k \geq 1$, и $\tilde{\boldsymbol{p}}^* = (\tilde{\boldsymbol{p}}_1^*, \tilde{\boldsymbol{p}}_2^*, \dots)$, можно записать СУР (2) в виде

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_1^* = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{p}}_m^* \tilde{A}_m^*, \tag{4}$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_k^* = \sum_{m=k-1}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{p}}_m^* \tilde{A}_{m-k+1}.$$

Известно, что СУР с матрицей переходных вероятностей (3) имеет единственное, с условием нормировки, решение, которое записывается в виде

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_k^* = \tilde{\boldsymbol{p}}_1^* \tilde{G}^{k-1}, \quad k \geq 2,$$

где $\tilde{G}$ — решение матричного функционального уравнения

$$\tilde{G} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{G}^k \tilde{A}_k. \tag{5}$$

Заметим, что матричное функциональное уравнение (5) имеет единственное решение при $\rho < 1$ в классе матриц, все собственные значения которых по модулю меньше единицы. Это решение является матрицей, все элементы которой положительны, и итерационная процедура $\tilde{G}^{(n)} = \tilde{A}(\tilde{G}^{(n-1)})$ при $n \to \infty$ сходится к нему, если в качестве начальной итерации $\tilde{G}^{(0)}$ взять любую матрицу с собственными значениями, по модулю меньшими единицы. Доказательство этого факта приведено в работе М.Ф.Ньютса [2].

За начальную итерацию $\tilde{G}^{(0)}$, как правило, принимают нулевую матрицу. Это гарантирует монотонную сходимость последовательности $\tilde{G}^{(n)}$ к $\tilde{G}$.

Вектор $\tilde{\boldsymbol{p}}_1^*$ находится из уравнения (4):

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_1^* = \tilde{\boldsymbol{p}}_1^* \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{G}^k \tilde{A}_k^*.$$

Условие нормировки имеет следующий вид:

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_1^*(I-\tilde{G})^{-1}\mathbf{1}=1.$$

В результате решения СУР автоматически формируются векторы $\boldsymbol{p}_i^*$, $i\geq 1$, которые являются составляющими векторов $\tilde{\boldsymbol{p}}_k^*$, $k\geq 1$.

Найдем теперь стационарное распределение числа заявок в системе в моменты непосредственно перед поступлением очередной группы. Обозначим через $p_{ik}^-$, $i=\overline{1,l}$, $k\geq 0$, стационарную вероятность того, что пришедшая в систему группа заявок застанет в ней ровно $k$ заявок и фазу обслуживания $i$, и положим $\boldsymbol{p}_k^-=(p_{1k}^-,\ldots,p_{lk}^-)$, $k\geq 1$.

Поскольку вероятность того, что пришедшая в систему группа, состоящая из $m$, $m=\overline{1,K}$ заявок, застанет в ней $k$, $k\geq 0$, других заявок, равна вероятности того, что сразу после прихода этой группы в системе будет $k+m$ заявок, то для векторов $\boldsymbol{p}_k^-$ справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{p}_k^-=\sum_{m=1}^{K-1-k}\alpha_{k+m}^m\,\boldsymbol{p}_{k+m}^*+\sum_{m=K-k}^{K}l_m\boldsymbol{p}_{k+m}^*,\quad k=\overline{0,K-2},$$

$$\boldsymbol{p}_k^-=\sum_{m=1}^{K}l_m\boldsymbol{p}_{k+m}^*,\quad k\geq K-1,$$

где $\alpha_k^m=l_j\Big/\left(1-\sum\limits_{i=k+1}^{K}l_i\right)$, $m=\overline{1,k}$, $k=\overline{1,K-1}$ — вероятность прихода группы из $m$ заявок при условии, что в пришедшей группе будет не более $k$ заявок.

Нетрудно показать, что выполняется соотношение $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{p}_k^-\mathbf{1}=1$. Действительно, учитывая, что $\sum\limits_{m=1}^{k}\alpha_k^m=1$, $k=\overline{1,K-1}$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{p}_k^-\mathbf{1}=\sum_{k=0}^{K-2}\left(\sum_{m=1}^{K-1-k}\alpha_{k+m}^m\,\boldsymbol{p}_{k+m}^*+\sum_{m=K-k}^{K}l_m\boldsymbol{p}_{k+m}^*\right)\mathbf{1}+\sum_{k=K-1}^{\infty}\sum_{m=1}^{K}l_m\boldsymbol{p}_{k+m}^*\mathbf{1}$$

$$=(\alpha_1^1\,\boldsymbol{p}_1^*+\alpha_2^2\,\boldsymbol{p}_2^*+\ldots+\alpha_{K-1}^{K-1}\,\boldsymbol{p}_{K-1}^*)\mathbf{1}+(\alpha_2^1\,\boldsymbol{p}_2^*+\alpha_3^2\,\boldsymbol{p}_3^*+\ldots+\alpha_{K-1}^{K-2}\,\boldsymbol{p}_{K-1}^*)\mathbf{1}$$

$$+(\alpha_3^1\,\boldsymbol{p}_3^*+\alpha_4^2\,\boldsymbol{p}_4^*+\ldots+\alpha_{K-1}^{K-3}\,\boldsymbol{p}_{K-1}^*)\mathbf{1}+\ldots+\alpha_{K-1}^1\,\boldsymbol{p}_{K-1}^*\mathbf{1}+\sum_{m=2}^{K}\sum_{k=K-m}^{K-2}l_m\boldsymbol{p}_{k+m}^*\mathbf{1}$$

$$+\sum_{m=1}^{K}\sum_{k=K-1}^{\infty}l_m\boldsymbol{p}_{k+m}^*\mathbf{1}=\sum_{m=1}^{K-1}\boldsymbol{p}_m^*\mathbf{1}+l_1\sum_{k=K-1}^{\infty}\boldsymbol{p}_{k+1}^*\mathbf{1}$$

$$+\sum_{m=2}^{K}l_m\left(\sum_{k=K}^{K+m-2}\boldsymbol{p}_k^*+\sum_{k=K+m-1}^{\infty}\boldsymbol{p}_k^*\right)\mathbf{1}=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_k^*\mathbf{1}=1.$$

Для нахождения стационарных вероятностями состояний по времени введем матрицы $T_k$ и $T_k^*$.

Пусть сразу после очередного момента поступления группы заявок в системе оказалось $m$ заявок и фаза обслуживания стала равной $i$. При этом условии элемент $(T_k)_{ij}$, $i,j=\overline{1,l}$, $k>m$, матрицы $T_k$ представляет собой среднее время, проведенное системой, в которой находится $m-k$ заявок и фаза обслуживания равна $j$, на интервале до следующего поступления группы заявок. В свою очередь, элемент $(T_m^*)_{ij}$, $i,j=\overline{1,l}$, матрицы $T_m^*$ представляет собой среднее время, проведенное системой, в которой отсутствуют заявки и фаза обслуживания равна $j$, на интервале до следующего поступления группы заявок.

Матрицы $T_k$ и $T_k^*$ определяются соотношениями

$$T_k=\int\limits_0^\infty(1-A(x))F_k(x)\,dx,$$

$$T_k^*=\int\limits_0^\infty(1-A(x))F_k^*(x)\,dx.$$

Используя результаты теории полумарковских процессов, получаем для векторов $\boldsymbol{p}_k$, $k\ge 0$, стационарных вероятностей состояний по времени формулы

$$\boldsymbol{p}_0=\frac{1}{a}\sum_{m=1}^{R}\boldsymbol{p}_m^*T_m^*, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{p}_k=\frac{1}{a}\sum_{m=k}^{R}\boldsymbol{p}_m^*T_{m-k},\quad k\ge 1. \tag{7}$$

Заметим, что соотношения (6), (7), связывающие стационарные вероятности по времени со стационарными вероятностями по вложенной цепи Маркова, совпадают с аналогичными формулами для системы $G/MSP/1/\infty$, полученными в работе [1].

## 4. ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ НАЧАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ И ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ

Получим характеристики, связанные с временем ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявок и групп заявок в системе.

Обозначим через $\beta_m$, $m=\overline{1,K}$, вероятность того, что пришедшая заявка находится в группе из $m$ заявок. Нетрудно показать, что

$$\beta_m=\frac{ml_m}{l_1+2\,l_2+\ldots+Kl_K},\quad m=\overline{1,K}.$$

Теперь обратимся непосредственно к вычислению стационарных распределений времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания произвольной заявки в системе.

Обозначим через $H_k(x)$, $k\ge 1$, матрицу, элементом $(H_k(x))_{ij}$ которой является вероятность того, что за время $x$ будет обслужено не менее $k$ заявок и в момент окончания обслуживания $k$-й заявки процесс обслуживания перейдет на фазу $j$, при условии, что в начальный момент фаза обслуживания была $i$ и в системе находилось не менее $k$ заявок.

Заметим, что справедливо следующее соотношение, связывающее матрицы $F_k(x)$ и $H_k(x)$, которое непосредственно вытекает из определений этих матриц:

$$H_k(x)\mathbf{1} = \mathbf{1} - \sum_{i=0}^{k-1} F_i(x)\mathbf{1}, \quad k \geq 1.$$

Обозначим через $W_m(x)$ и $V_m(x)$ соответственно стационарные ФР времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки под порядковым номером $m$, $m = \overline{1,K}$, в группе из не менее, чем $m$ заявок, которые могут быть записаны в следующей форме:

$$W_1(x) = \boldsymbol{p}_0^- \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^- H_j(x)\mathbf{1},$$

$$W_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^- H_{j+m-1}(x)\mathbf{1}, \quad m = \overline{2,K},$$

$$V_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^- H_{j+m}(x)\mathbf{1}, \quad m = \overline{1,K}.$$

Найдем вероятность $\beta_m^*$, $m = \overline{1,K}$, того, что произвольная заявка пришла в систему под порядковым номером $m$ в группе из не менее, чем $m$ заявок. Верояность того, что заявка пришла под номером $k$, $k = \overline{1,m}$, при условии, что она поступила в систему в группе ровно из $m$, $m = \overline{1,K}$, заявок равна $1/m$, поэтому

$$\beta_m^* = \sum_{k=m}^{K} \frac{1}{k}\beta_k = \frac{L_m}{l_1 + 2\,l_2 + \ldots + Kl_K},$$

где $L_m = \sum\limits_{k=m}^{K} l_k$, $m = \overline{1,K}$.

Тогда стационарные ФР $W(x)$ и $V(x)$ времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе соответственно можно записать в виде

$$W(x) = \sum_{m=1}^{K} \beta_m^* W_m(x),$$

$$V(x) = \sum_{m=1}^{K} \beta_m^* V_m(x).$$

Найдем теперь стационарное распределение времени пребывания в системе группы, в которой пришла заявка. При этом будем считать временем пребывания в системе группы заявок время, которое прошло с момента поступления этой группы до момента окончания обслуживания последней заявки из этой группы.

Учитывая, что для окончания обслуживания группы, в которой пришла заявка, необходимо, чтобы обслужились все заявки, которые были в системе до поступления группы и все заявки в группе, можно записать ФР $\tilde{V}(x)$ времени пребывания группы в системе, в которой поступила в систему произвольная заявка

$$\tilde{V}(x) = \sum_{m=1}^{K} \beta_m \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{p}_k^- H_{k+m}(x)\mathbf{1}.$$

Таким образом, в настоящей статье получены основные стационарные характеристики для СМО $G^{[X]}/MSP/1/\infty$ с групповым поступлением заявок, включая распределения времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания произвольной заявки в системе, а также распределение времени пребывания в системе группы заявок, в которой пришла заявка. Результаты, полученные в настоящей статье, являются обобщением результатов, полученных для в работах [1, 2, 3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бочаров П. П., Д'Апиче Ч., А. В. Печинкин, Салерно С. Система массового обслуживания *G/MSP/1/r. Автоматика и телемеханика*, 2003, № 2, стр. 127–143.

2. Neuts M.F. *Matrix-geometric solutions in stochastic models. An algorithmic approach.* New York: Dover Publications, 1994.

3. Бочаров П.П. Стационарное распределение конечной очереди с рекуррентным потоком и марковским обслуживанием. *Автоматика и телемеханика*, 1996, № 9, стр. 66–78.

4. Печинкин А.В., Тришечкин С.И. Система $SM_2/MSP/1/r$ с дисциплиной случайного выбора заявки на обслуживание и общим накопителем. *Системы и средства информатики: спец. выпуск.* М.: ИПИ РАН, 2002, стр. 160–180.

5. Чаплыгин В.В. Система массового обслуживания *G/BMSP/1/r. Информационные процессы*, 2003, Т. 3, № 2, стр. 97–108.

6. Чаплыгин В.В. Система массового обслуживания *SM/MSP/1/r. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, Сер. «Естественные науки»*, 2004, № 2, стр. 60–74.

7. *Печинкин А.В., Чаплыгин В.В.* Стационарные характеристики системы массового обслуживания *G/MSP/n/r. Вестник РУДН, Сер. «Прикладная математика и информатика»*, 2003, № 1, стр. 119–143.

8. Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Исследование системы массового обслуживания *SM/MSP/n/r. Труды международного семинара «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети. Теория и приложения (DCCN-2003)»*. Москва, 2003, стр. 58–65.

9. Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания *SM/MSP/n/r. Автоматика и телемеханика*, 2004, № 9, стр. 85–100.

10. Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Математическая модель для расчета многолинейных СМО. *II научная сессия Института проблем информатики Российской академии наук. Тезисы докладов.* Москва, 2005, стр. 94–96.

11. Чаплыгин В.В. Система массового обслуживания *G/MSP/n/r* с потоком отрицательных заявок. *Информационные процессы*, 2005, Т. 5, № 1, стр. 1–19.

12. Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания.* М.: РУДН, 1995.