Информационные процессы, Том 7, № 2, 2007, стр. 138–152.
© *2007 Печинкин.*

МАРКОВСКАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА КОНЕЦ ОЧЕРЕДИ[1]

А.В.Печинкин

Институт проблем информатики, Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 26.02.2007

Аннотация—Рассматривается многолинейная СМО с конечным накопителем, марковским входящим потоком и марковским (общим) процессом обслуживания всех заявок на приборах с числом состояний процесса и интенсивностями переходов между фазами, зависящими от числа заявок в системе. На систему дополнительно поступает марковский поток отрицательных заявок, при этом поступившая отрицательная заявка "убивает" одну положительную заявку в конце очереди. Получен рекуррентный алгоритм для вычисления стационарных вероятностей состояний системы и предложен метод расчета стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания положительной заявки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время среди аналитических моделей инфотелекоммуникационных систем значительное место занимают системы и сети массового обслуживания (СМО) и (СеМО) с отрицательными заявками, введенными в рассмотрение Е. Геленбе [1, 2]. Отрицательная заявка при поступлении в СМО или в некоторый узел СеМО, "убивает" (разрушает) одну обычную (положительную) заявку, ожидающую в очереди, после чего обе заявки мгновенно покидают систему, уменьшая число ожидающих положительных заявок (если они были в очереди) на единицу. В дальнейшем понятие отрицательной заявки было распространено на случай, когда она может "убивать" группу заявок из очереди или полностью опустошать очередь (катастрофы), были также введены понятия триггера, выталкивающего положительную заявку из одного узла сети в другой, и сигнала, который с заданной вероятностью может быть либо отрицательной заявкой (в традиционном смысле), либо триггером (см., например, книгу [3]). Обширная библиография публикаций в области исследования СеМО и СМО с отрицательными заявками, или так называемых G-сетей и G-систем, включая известные обобщения понятия отрицательной заявки, содержится в обзорах [4, 5].

Что же касается исследований в области G-сетей, то они ограничены, в основном, классом BCMP-сетей ([6]) и их модификаций, предполагающих пуассоновские потоки как положительных, так и отрицательных заявок и позволяющих получить стационарное распределений вероятностей состояний сети в мультипликативной форме.

Однако предположения о пуассоновости потоков и специальном виде функций распределения времени обслуживания для G-систем не являются обязательными, и публикации по G-системам посвящены СМО с более сложными процессами поступления как положительных, так и отрицательных заявок, а также с достаточно общими процессами обслуживания. Поскольку данная работа посвящена анализу многолинейной G-системы, ниже мы ограничимся кратким обзором многолинейных СМО с отрицательными заявками.

[1] Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований № 06-07-89056 и № 05-07-90103.

СМО с одним прибором, накопителем конечной емкости и повторными заявками, на которую поступает поток типа MMAP (Marked Markovian Arrival Process), а времена обслуживания распределены экспоненциально (заметим, что обслуживание повторных заявок в некотором смысле аналогично обслуживанию в многолинейной системе), рассмотрена в [7]. С учетом двух типов отрицательных заявок и катастрофических сбоев в этой работе получен приближенный метод для расчета стационарного распределения вероятностей состояний системы.

В [8] для системы $M/M/n/0$ с повторными заявками в предположении, что отрицательная заявка "убивает" случайное число заявок, найдено стационарное распределение вероятностей состояний системы и исследован нестационарный режим в условиях большой нагрузки.

Многолинейная СМО с рекуррентным входящим потоком положительных заявок, марковским входящим потоком отрицательных заявок, накопителем конечной емкости и марковским процессом обслуживания всех заявок на приборах рассмотрена в [9]. При этом предполагается, что число состояний процесса и интенсивности переходов между фазами зависят от числа заявок в системе, а поступившая отрицательная заявка удаляет группу положительных заявок в начале очереди. Разработан рекуррентный матричный алгоритм для расчета стационарных вероятностей состояний.

Наконец, в [10] рассмотрена многолинейная СМО с неограниченным накопителем, марковским входящим потоком и марковским (общим) процессом обслуживания, аналогичным рассмотренному в работе [9]. Поток отрицательных заявок является марковским; при этом, в отличие от [9], поступившая отрицательная заявка "убивает" одну положительную заявку в конце очереди. Получен рекуррентный алгоритм для вычисления стационарных вероятностей состояний системы и предложен метод расчета стационарной функции распределения времени ожидания начала обслуживания положительной заявки.

В настоящей статье рассмотрена та же самая многолинейная СМО, что и в [10], но с ограниченным накопителем. Получены алгоритмы для вычисления основных стационарных показателей функционирования системы.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим следующую систему массового обслуживания.

Поступающий в систему поток (процесс генерации) заявок двух типов является марковским с числом состояний (фаз генерации заявок) I. Заявки первого типа будем называть положительными, или просто заявками, а второго типа — отрицательными. Матрицу интенсивностей поступления положительных заявок обозначим через Λ_1, матрицу интенсивностей поступления отрицательных заявок — через Λ_0, матрицу интенсивностей изменения состояний процесса генерации заявок без поступления заявок — через Λ, а инфинитезимальную матрицу процесса изменения фаз генерации марковского потока — через $\tilde{\Lambda} = \Lambda + \Lambda_0 + \Lambda_1$. Если в системе находится S (положительных) заявок и поступает новая (положительная) заявка, то эта заявка теряется.

Обозначим через $\vec{\pi}_{\text{in}} = (\pi_{\text{in}1}, \dots, \pi_{\text{in}I})$ вектор-строку стационарных вероятностей состояний процесса изменения фаз генерации марковского потока, который можно найти из системы уравнений равновесия (СУР)

$$\vec{\pi}_{\text{in}}\tilde{\Lambda} = \vec{\pi}_{\text{in}}$$

с условием нормировки

$$\vec{\pi}_{\text{in}}\vec{1} = 1.$$

Через $\vec{1} = (1, \dots, 1)^T$ здесь и далее будем обозначать вектор-столбец из единиц, размерность которого определяется из контекста (в данном случае равна I). Кроме того, через $\lambda_1 = \vec{\pi}_{\text{in}}\Lambda_1\vec{1}$

и $\lambda_0 = \vec{\pi}_{\text{in}}\Lambda_0\vec{1}$ обозначим стационарные интенсивности поступления положительных и отрицательных заявок.

Положительные заявки обслуживаются следующим образом. Имеется некоторое положительное целое число R, которое назовем числом обслуживающих приборов (смысл этого названия станет очевиден в разделе 6, где будет рассмотрена многолинейная система с фазовым распределением времени обслуживания заявки). Далее будем считать, что если в системе имеется r заявок, то первые $\min\{r, R\}$ из них находятся на приборах. Кроме того, имеется набор положительных целых чисел (чисел фаз обслуживания) J_r, $r = \overline{0, R}$. Если в системе находится r, $R < r \le S$, заявок и процесс обслуживания пребывает в состоянии i, $i = \overline{1, J_R}$, то за "малое" время Δ с вероятностью $\mu_{1,R+1,i,j}\Delta + o(\Delta)$, $j = \overline{1, J_R}$, не зависящей от всего процесса функционирования системы, заканчивается обслуживание одной из R заявок, находящихся на приборах, фаза обслуживания изменяется на j-ю, на освободившийся прибор становится первая заявка из очереди, а остальные заявки в очереди сдвигаются с сохранением порядка. Кроме того, с вероятностью $\mu_{0,R+1,i,j}\Delta + o(\Delta)$, $j = \overline{1, J_R}$, $j \ne i$, также не зависящей от процесса функционирования системы, фаза обслуживания изменяется на j-ю, но не заканчивается обслуживание ни одной из заявок.

Случай $1 \le r \le R$ отличается от предыдущего только тем, что за "малое" время Δ вероятность окончания обслуживания заявки на одном из приборов (теперь все заявки находятся на приборах) равна $\mu_{1rij}\Delta + o(\Delta)$, $i = \overline{1, J_r}$, $j = \overline{1, J_{r-1}}$, а вероятность просто изменения фазы обслуживания на j-ю равна $\mu_{0rij}\Delta + o(\Delta)$, $i, j = \overline{1, J_r}$, $j \ne i$.

Наконец, в случае $r = 0$ (в системе отсутствуют заявки) за "малое" время Δ может только с вероятностью $\mu_{00ij}\Delta + o(\Delta)$, $i, j = \overline{1, J_0}$, $j \ne i$, измениться с i-й на j-ю фаза обслуживания.

Кроме того, если в системе находится r, $0 \le r < R$, заявок и поступает новая (положительная) заявка, то с вероятностью ω_{rij}, $i = \overline{1, J_r}$, $j = \overline{1, J_{r+1}}$, фаза обслуживания изменяется с i-й на j-ю. Матрицу из элементов ω_{rij} будем обозначать через Ω_r. Заметим, что матрица Ω_r является стохастической.

Далее положим $J_R = J$ и будем обозначать матрицы из элементов μ_{1rij} и μ_{0rij}, $r = \overline{1, R}$, через M_{1r} и M_{0r}, матрицы из элементов $\mu_{1,R+1,i,j}$ и $\mu_{0,R+1,i,j}$ — через M_1 и M_0, а матрицу из элементов μ_{00ij} — через M_{00}.

Отрицательные заявки действуют следующим образом. Если в системе находится r, $R < r \le S$ (положительных) заявок (т.е. в очереди имеются заявки), то поступающая в систему отрицательная заявка "убивает" последнюю (положительную) заявку из очереди и обе они покидают систему. Если же в системе находится $r \le R$ (положительных) заявок (т.е. очередь отсутствует), то поступающая в систему отрицательная заявка просто покидает систему, не оказывая на нее никакого воздействия.

Далее будем предполагать, что марковский процесс с непрерывным временем и конечным множеством состояний, описывающий функционирование рассматриваемой системы, является неприводимым. Это условие элементарно может быть выражено через исходные параметры системы.

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЧЕРЕДИ

Поскольку стационарное распределение числа заявок в рассматриваемой системе совпадает с аналогичным распределением в системе, отличающейся от нашей только тем, что отрицательная заявка уничтожает первую (а не последнюю) заявку в очереди (см. [9]), ограничимся кратким изложением алгоритма вычисления этой характеристики.

Будем обозначать через $A \otimes B$ кронекерово произведение матриц A и B.

Введем матрицы

$$\begin{cases} N_1 = \Lambda_1 \otimes E_J, \\ N_0 = \Lambda_0 \otimes E_J + E_I \otimes M_1, \\ \tilde{N} = \Lambda \otimes E_J + E_I \otimes M_0, \\ N_{1r} = \Lambda_1 \otimes \Omega_r, \quad r = \overline{0, R-1}, \\ N_{0r} = E_I \otimes M_{1r}, \quad r = \overline{1, R}, \\ \tilde{N}_r = (\Lambda + \Lambda_0) \otimes E_{J_r} + E_I \otimes M_{0r}, \quad r = \overline{0, R-1}, \\ \tilde{N}_R = (\Lambda + \Lambda_0) \otimes E_J + E_I \otimes M_{0R}, \\ \tilde{N}_S = (\Lambda + \Lambda_1) \otimes E_J + E_I \otimes M_0, \end{cases}$$

где E_i — единичная матрица порядка i.

Через $\vec{p}_r$, $0 \le r \le S$, обозначим вектор-строку, координатами которой p_{rn}, где $n = \overline{1, IJ_r}$ при $r = \overline{0, R-1}$ и $n = \overline{1, IJ}$ при $R \le r \le S$, являются стационарные вероятности того, что в системе находится r заявок, а фазы процессов генерации и обслуживания заявок равны i и j. Здесь $n = (\vec{e}_i^{\,\prime} \otimes \vec{e}_j^{\,\prime\prime})\vec{r}_r$, $\vec{r}_r = (1, 2, \ldots, IJ_r)^T$ — вектор-столбец размерности IJ_r или IJ, а $\vec{e}_i^{\,\prime}$ и $\vec{e}_j^{\,\prime\prime}$ — вектор-строки размерностей I и J_r или I и J, в которых соответственно i-я и j-я координаты равны единице, а остальные нулю (это позволит нам в дальнейшем использовать кронекерово произведение матриц). Далее n будем называть фазой генерации-обслуживания заявок.

СУР для определения стационарных вероятностей состояний имеет вид

$$\begin{cases} 0 = \vec{p}_0 \tilde{N}_0 + \vec{p}_1 N_{01}, \\ 0 = \vec{p}_{r-1} N_{1,r-1} + \vec{p}_r \tilde{N}_r + \vec{p}_{r+1} N_{0,r+1}, \quad r = \overline{1, R-1}, \\ 0 = \vec{p}_{R-1} N_{1,R-1} + \vec{p}_R \tilde{N}_R + \vec{p}_{R+1} N_0, \\ 0 = \vec{p}_{r-1} N_1 + \vec{p}_r \tilde{N} + \vec{p}_{r+1} N_0, \quad r = \overline{R+1, S-1}, \\ 0 = \vec{p}_{S-1} N_1 + \vec{p}_S \tilde{N}_S \end{cases} \tag{1}$$

с условием нормировки

$$\sum_{r=0}^{S} \vec{p}_r \vec{1} = 1. \tag{2}$$

СУР (1) можно решить различными способами (см., например, [11]). Однако, как показывает практика, наиболее эффективным является метод, базирующийся на последовательном исключении состояний марковского процесса. Именно этот метод лежит в основе приводимого ниже алгоритма.

Обозначим через $\tilde{\nu}_{ri}$, $r = \overline{0, R}$, $i = \overline{1, IJ_r}$, и $\tilde{\nu}_i$, $\tilde{\nu}_{Si}$, $i = \overline{1, IJ}$, диагональные элементы матриц $\tilde{N}_r$, $\tilde{N}$ и $\tilde{N}_S$. Введем матрицы $\tilde{Q}_r$, $r = \overline{0, R}$, Q_{1r}, $r = \overline{0, R}$, Q_{0r}, $r = \overline{0, R}$, и $\tilde{Q}$, Q_1, Q_0, $\tilde{Q}_S$, Q_{0S}. Элемент $\tilde{q}_{rij}$, $r = \overline{1, R-1}$, $i, j = \overline{1, IJ_r}$, $j \ne i$, матрицы $\tilde{Q}_r$ определяется формулой $\tilde{q}_{rij} = \tilde{\nu}_{rij} / \tilde{\nu}_{ri}$, элемент $\tilde{q}_{rii} = 0$. Элементы q_{1rij}, $i = \overline{1, IJ_r}$, $j = \overline{1, IJ_{r+1}}$, и q_{0rij}, $i = \overline{1, IJ_r}$, $j = \overline{1, IJ_{r-1}}$, матриц Q_{1r} и Q_{0r} определяются формулами $q_{1rij} = \nu_{1rij} / \tilde{\nu}_{ri}$ и $q_{0rij} = \nu_{0rij} / \tilde{\nu}_{ri}$. Аналогично определяются остальные матрицы $\tilde{Q}$, Q_1, Q_0, $\tilde{Q}_S$ и Q_{0S}. Эти матрицы имеют очень простой вероятностный смысл. Например, элемент $\tilde{q}_{ij}$ матрицы $\tilde{Q}$ равен вероятности того, что в момент изменения состояния системы (в системе имеется более R заявок) произойдет только изменение либо фазы процесса генерации заявок (без поступления заявки), либо фазы процесса обслуживания (без окончания обслуживания заявки), элемент q_{1ij} матрицы Q_1 — вероятности того, что в момент изменения состояния системы в систему поступит (положительная) заявка (естественно, изменится фаза процесса генерации заявок), элемент q_{0ij} матрицы Q_0 — вероятности того, что в момент изменения состояния системы либо в систему поступит отрицательная заявка (уменьшив на единицу число положительных заявок), либо окончится обслуживание положительной заявки (также уменьшив на единицу число положительных заявок).

Обозначим через A_r, $r = \overline{0, S-1}$, матрицу, элементом a_{rij} ($i = \overline{1, IJ_{r+1}}$, $j = \overline{1, IJ_r}$ при $r = \overline{0, R-1}$ и $i, j = \overline{1, IJ}$ при $r = \overline{R, S-1}$) которой является вероятность того, что в тот момент, когда в системе впервые останется r заявок, фаза генерации-обслуживания заявок будет j, при условии, что в начальный момент в системе было $r+1$ заявок и фаза генерации-обслуживания заявок была i. Матрицы A_r удовлетворяют уравнениям

$$A_{S-1} = Q_{0S} + \tilde{Q}_S A_{S-1},$$

$$A_r = Q_0 + \tilde{Q} A_r + Q_1 A_{r+1} A_r, \quad r = \overline{R, S-2},$$

$$A_{R-1} = Q_{0,R} + \tilde{Q}_R A_{R-1} + Q_{1,R} A A_{R-1},$$

$$A_r = Q_{0,r+1} + \tilde{Q}_{r+1} A_r + Q_{1,r+1} A_{r+1} A_r, \quad r = \overline{0, R-2},$$

т.е. определяются формулами

$$A_{S-1} = (E_{IJ} - \tilde{Q}_S)^{-1} Q_{0,S},$$

$$A_r = (E_{IJ} - \tilde{Q} - Q_1 A_{r+1})^{-1} Q_0, \quad r = \overline{R, S-2},$$

$$A_{R-1} = (E_{IJ} - \tilde{Q}_R - Q_{1,R} A)^{-1} Q_{0,R},$$

$$A_r = (E_{IJ_{r+1}} - \tilde{Q}_{r+1} A_r Q_{1,r+1} A_{r+1})^{-1} Q_{0,r+1}, \quad r = \overline{0, R-2}.$$

Теперь стационарные вероятности состояний системы можно определить, последовательно решая уравнения

$$\vec{p}_0(\tilde{N}_0 + N_{10} A_0) = 0,$$

$$\vec{p}_r(\tilde{N}_r + N_{1r} A_r) + \vec{p}_{r-1} N_{1,r-1} = 0, \quad r = \overline{1, R-1}, \tag{3}$$

$$\vec{p}_R(\tilde{N}_R + N_1 A_R) + \vec{p}_{R-1} N_{1,R-1} = 0, \tag{4}$$

$$\vec{p}_r(\tilde{N} + N_1 A_r) + \vec{p}_{r-1} N_1 = 0, \quad r = \overline{R+1, S-1}, \tag{5}$$

и последнее уравнение системы (1) с учетом условия нормировки (2). В частности, из (3)–(5) и последнего уравнения системы (1) имеем

$$\vec{p}_r = -\vec{p}_{r-1} N_{1,r-1} (\tilde{N}_r + N_{1r} A_r)^{-1}, \quad r = \overline{1, R-1},$$

$$\vec{p}_R = -\vec{p}_{R-1} N_{1,R-1} (\tilde{N}_R + N_1 A_R)^{-1},$$

$$\vec{p}_r = -\vec{p}_{r-1} N_1 (\tilde{N} + N_1 A_r)^{-1}, \quad r = \overline{R+1, S-1},$$

$$\vec{p}_S = -\vec{p}_{S-1} N_1 \tilde{N}_S^{-1}.$$

В заключение этого раздела приведем выражения для стационарных вероятностей π_{kill} “убийства” заявки (отрицательной заявкой), π_{los} потери заявки из-за переполнения накопителя и π_{imm} того, что пришедшая в систему заявка сразу же поступит на прибор:

$$\pi_{\mathrm{kill}} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{r=R+1}^{S} \vec{p}_r (\Lambda_0 \otimes E_J) \vec{1},$$

$$\pi_{\mathrm{los}} = \frac{1}{\lambda_1} \vec{p}_S (\Lambda_1 \otimes E_J) \vec{1},$$

$$\pi_{\mathrm{imm}} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{r=0}^{R-1} \vec{p}_r (\Lambda_1 \otimes E_J) \vec{1}.$$

4. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ НАЧАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВКИ

Найдем сначала стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания обслуженной заявки (т.е. положительной заявки, не потерянной из-за переполнения накопителя и не “убитой” отрицательной заявкой до момента поступления ее на прибор). Для этого обозначим через $\vec{W}_{rk}(t),\ r=\overline{R+1,S},\ k=\overline{r,S}$, условную вероятность того, что (положительная) заявка не будет “убита” и поступит на прибор до момента t, при условии, что в начальный момент 0 эта заявка находится $(r-R)$-й в очереди и всего в очереди имеется $k-R$ заявок. Координата $W_{rkn}(t),\ n=\overline{1,IJ}$, вектор-столбца $\vec{W}_{rk}(t)$ соответствует фазе генерации-обслуживания заявок в момент 0 (см. выше). Тогда

$$\vec{W}'_{rk}(t)=\int\limits_0^t(e^{\Lambda x}\otimes e^{M_0x})\big[(\Lambda_0\otimes E_J)\vec{W}'_{r,k-1}(t-x)+(\Lambda_1\otimes E_J)\vec{W}'_{r,k+1}(t-x)+$$

$$(E_I\otimes M_1)\vec{W}'_{r-1,k-1}(t-x)\big]\,dx,\quad r=\overline{R+1,S-2},\quad k=\overline{r+1,S-1},\tag{6}$$

$$\vec{W}'_{rr}(t)=\int\limits_0^t(e^{\Lambda x}\otimes e^{M_0x})\big[(\Lambda_1\otimes E_J)\vec{W}'_{r,r+1}(t-x)+$$

$$(E_I\otimes M_1)\vec{W}'_{r-1,r-1}(t-x)\big]\,dx,\quad r=\overline{R+1,S-1},\tag{7}$$

$$\vec{W}'_{rS}(t)=\int\limits_0^t(e^{(\Lambda+\Lambda_1)x}\otimes e^{M_0x})\big[(\Lambda_0\otimes E_J)\vec{W}'_{r,S-1}(t-x)+$$

$$(E_I\otimes M_1)\vec{W}'_{r-1,S-1}(t-x)\big]\,dx,\quad r=\overline{R+1,S-1},\tag{8}$$

$$\vec{W}'_{SS}(t)=\int\limits_0^t(e^{(\Lambda+\Lambda_1)x}\otimes e^{M_0x})(E_I\otimes M_1)\vec{W}'_{S-1,S-1}(t-x)\,dx.\tag{9}$$

Здесь для единообразия записи положено

$$\vec{W}'_{Rk}(t)=\Delta(t)\vec{1},\quad k=\overline{R,S-1},\tag{10}$$

где $\Delta(t)$ — Δ-функция Дирака.

В терминах преобразований Лапласа–Стилтьеса (ПЛС)

$$\vec{\psi}_{rk}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\vec{W}'_{rk}(t)\,dt$$

уравнения (6)–(10) запишутся в виде:

$$\vec{\psi}_{rk}(s)=\big[(\Lambda\oplus M_0)+sE_{IJ}\big]^{-1}\big[(\Lambda_0\otimes E_J)\vec{\psi}_{r,k-1}(s)+(\Lambda_1\otimes E_J)\vec{\psi}_{r,k+1}(s)+$$

$$(E_I\otimes M_1)\vec{\psi}_{r-1,k-1}(s)\big],\quad r=\overline{R+1,S-2},\quad k=\overline{r+1,S-1},\tag{11}$$

$$\vec{\psi}_{rr}(s)=\big[(\Lambda\oplus M_0)+sE_{IJ}\big]^{-1}\big[(\Lambda_1\otimes E_J)\vec{\psi}_{r,r+1}(s)+(E_I\otimes M_1)\vec{\psi}_{r-1,r-1}(s)\big],\quad r=\overline{R+1,S-1},\tag{12}$$

$$\vec{\psi}_{rS}(s)=\big[((\Lambda+\Lambda_1)\oplus M_0)+sE_{IJ}\big]^{-1}\big[(\Lambda_0\otimes E_J)\vec{\psi}_{r,S-1}(s)+$$

$$(E_I \otimes M_1)\vec{\psi}_{r-1,S-1}(s)\big], \quad r = \overline{R+1, S-1}, \tag{13}$$

$$\vec{\psi}_{SS}(s) = \big[((\Lambda + \Lambda_1) \oplus M_0) + sE_{IJ}\big]^{-1}(E_I \otimes M_1)\vec{\psi}_{S-1,S-1}(s), \tag{14}$$

где

$$\vec{\psi}_{Rk}(s) = \vec{1}, \quad k = \overline{R, S-1}, \tag{15}$$

а $\oplus$ — символ кронекеровой суммы матриц.

Система линейных уравнений (11)–(14) может быть решена рекуррентно, начиная с $r = R+1$ и кончая $r = S$. При этом для каждого r используется метод прогонки: на прямом ходе сначала из уравнения (13) при $r = R+1$ с учетом (15) выражаем $\vec{\psi}_{R+1,S}(s)$ через $\vec{\psi}_{R+1,S-1}(s)$ и подставляем в (11) при $r = R+1$ и $k = S-1$. Из полученного соотношения, опять-таки с учетом (15), выражаем $\vec{\psi}_{R+1,S-1}(s)$ через $\vec{\psi}_{R+1,S-2}(s)$ и подставляем в (11) при $r = R+1$ и $k = S-2$. Продолжая эту процедуру, вычисляем $\vec{\psi}_{R+1,k}(s)$, $k = \overline{R+2, S}$, как функции от $\vec{\psi}_{R+1,R+1}(s)$, а $\vec{\psi}_{R+1,R+1}(s)$ определяем из уравнения (12). На обратном ходе прогонки с помощью полученных соотношений находим окончательные выражения для $\vec{\psi}_{R+1,k}(s)$, $k = \overline{R+2, S}$. Затем таким же образом находим $\vec{\psi}_{R+2,k}(s)$, $k = \overline{S, R+2}$ и т.д. Наконец, из уравнения (14) определяем $\vec{\psi}_{S,S}(s)$.

Однако реально система (11)–(14) может быть использована только для определения моментов соответствующих условных распределений.

Теперь мы можем выписать функцию $W(t)$ стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания обслуженной заявки:

$$W(t) = 1 - \frac{1}{(1-\pi_{\text{kill}}-\pi_{\text{los}})\lambda_1}\int\limits_t^{\infty}\sum_{r=R}^{S-1}\vec{p}_r(\Lambda_1 \otimes E_J)\vec{W}'_{r+1,r+1}(x)\,dx, \quad x > 0, \tag{16}$$

В терминах ПЛС $\psi(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}dW_{rk}(t)$ это распределение имеет вид

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{(1-\pi_{\text{kill}}-\pi_{\text{los}})\lambda_1}\sum_{r=R}^{S-1}\vec{p}_r\big[\Lambda_1 \otimes E_J)(\vec{\psi}_{r+1,r+1}(0) - \vec{\psi}_{r+1,r+1}(s)\big].$$

Обратимся к вычислению стационарного распределения времени пребывания в системе “убитой” заявки (т.е. не потерянной из-за переполнения накопителя положительной заявки, “убитой” отрицательной заявкой до момента поступления ее на прибор). Для этого обозначим через $\vec{G}_{rk}(t)$, $r = \overline{R+1, S}$, $k = \overline{r, S}$, вектор-столбец из условных вероятностей $G_{rkn}(t)$, $n = \overline{1, IJ}$, того, что (положительная) заявка будет “убита” до момента t, при условии, что в начальный момент 0 эта заявка находится $(r-R)$-й в очереди и всего в очереди имеется $k-R$ заявок (как и прежде, векторная запись соответствует фазе генерации-обслуживания заявок в момент 0). Тогда

$$\vec{G}'_{rk}(t) = \int\limits_0^t (e^{\Lambda x} \otimes e^{M_0 x})\big[(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{G}'_{r,k-1}(t-x) + (\Lambda_1 \otimes E_J)\vec{G}'_{r,k+1}(t-x) +$$

$$(E_I \otimes M_1)\vec{G}'_{r-1,k-1}(t-x)\big]\,dx, \quad r = \overline{R+1, S-2}, \quad k = \overline{r+1, S-1}, \tag{17}$$

$$\vec{G}'_{rr}(t) = (e^{\Lambda t} \otimes e^{M_0 t})(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{1} + \int\limits_0^t (e^{\Lambda x} \otimes e^{M_0 x})\big[(\Lambda_1 \otimes E_J)\vec{G}'_{r,r+1}(t-x) +$$

$$(E_I \otimes M_1)\vec{G}'_{r-1,r-1}(t-x)\big]\,dx, \quad r = \overline{R+1, S-1}, \tag{18}$$

$$\vec{G}'_{rS}(t) = \int\limits_0^t (e^{(\Lambda+\Lambda_1)x} \otimes e^{M_0 x})\big[(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{G}'_{r,S-1}(t-x) +$$

$$(E_I \otimes M_1)\vec{G}'_{r-1,S-1}(t-x)\big]\,dx, \quad r = \overline{R+1, S-1}, \tag{19}$$

$$\vec{G}'_{SS}(t) = (e^{\Lambda t} \otimes e^{M_0 t})(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{1} + \int\limits_0^t (e^{(\Lambda+\Lambda_1)x} \otimes e^{M_0 x})(E_I \otimes M_1)\vec{G}'_{S-1,S-1}(t-x)\,dx. \tag{20}$$

Здесь для единообразия записи положено

$$\vec{G}'_{Rk}(t) = \vec{0}_{IJ}, \quad k = \overline{R, S-1}, \tag{21}$$

где $\vec{0}_{IJ}$ — нулевой вектор размерности IJ.

Вводя ПЛС $\vec{\gamma}_{rk}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} d\vec{G}_{rk}(t)$, получаем из (17)–(21):

$$\vec{\gamma}_{rk}(s) = \big[(\Lambda \oplus M_0) + sE_{IJ}\big]^{-1}\big[(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{\gamma}_{r,k-1}(s) + (\Lambda_1 \otimes E_J)\vec{\gamma}_{r,k+1}(s) +$$

$$(E_I \otimes M_1)\vec{\gamma}_{r-1,k-1}(s)\big], \quad r = \overline{R+1, S-2}, \quad k = \overline{r+1, S-1}, \tag{22}$$

$$\vec{\gamma}_{rr}(s) = \big[(\Lambda \oplus M_0) + sE_{IJ}\big]^{-1}\big[(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{1} + (\Lambda_1 \otimes E_J)\vec{\gamma}_{r,r+1}(s) +$$

$$(E_I \otimes M_1)\vec{\gamma}_{r-1,r-1}(s)\big], \quad r = \overline{R+1, S-1}, \tag{23}$$

$$\vec{\gamma}_{rS}(s) = \big[((\Lambda + \Lambda_1) \oplus M_0) + sE_{IJ}\big]^{-1}\big[(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{\gamma}_{r,S-1}(s) +$$

$$(E_I \otimes M_1)\vec{\gamma}_{r-1,S-1}(s)\big], \quad r = \overline{R+1, S-1}, \tag{24}$$

$$\vec{\gamma}_{SS}(s) = \big[((\Lambda + \Lambda_1) \oplus M_0) + sE_{IJ}\big]^{-1}\big[(\Lambda_0 \otimes E_J)\vec{1} + (E_I \otimes M_1)\vec{\gamma}_{S-1,S-1}(s)\big], \tag{25}$$

где

$$\vec{\gamma}_{Rk}(s) = \vec{0}_{IJ}, \quad k = \overline{R, S-1}. \tag{26}$$

Система (22)–(25) с учетом (26) может быть решена тем же способом, что и система (11)–(14).

Функция $G(t)$ стационарного распределения времени пребывания в системе "убитой" заявки имеет вид:

$$G(t) = \frac{1}{\pi_{\text{kill}}\lambda_1} \int\limits_0^t \sum_{r=R}^{S-1} \vec{p}_r(\Lambda_1 \otimes E_J)\vec{G}'_{r+1,r+1}(x)\,dx, \quad x > 0,$$

или в терминах ПЛС $\gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} dG(t)$:

$$\gamma(s) = \frac{1}{\pi_{\text{kill}}\lambda_1} \sum_{r=R}^{S-1} \vec{p}_r(\Lambda_1 \otimes E_J)\vec{\gamma}_{r+1,r+1}(s).$$

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗЛОЖЕНИЕМ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В этом разделе на примере стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания обслуженной заявки покажем, как можно в явном виде вычислить стационарные распределения характеристик, связанных с временем пребывания заявки в системе.

Прежде всего, для сокращения записи введем функции

$$D_0 = \Lambda \oplus M_0, \qquad D_1 = (\Lambda + \Lambda_1) \oplus M_0,$$

$$B_0 = \Lambda_0 \otimes E_J, \qquad B_1 = \Lambda_1 \otimes E_J, \qquad B_2 = E_I \otimes M_1.$$

Тогда уравнения (6)–(9) с учетом (10) перепишутся в виде

$$\vec{W}'_{R+1,k}(t) = \int\limits_0^t e^{D_0 x}\big[B_0 \vec{W}'_{R+1,k-1}(t-x) + B_1 \vec{W}'_{R+1,k+1}(t-x)\big]\,dx + e^{D_0 x} B_2 \vec{1}, \quad k = \overline{R+2, S-1}, \tag{27}$$

$$\vec{W}'_{R+1,R+1}(t) = \int\limits_0^t e^{D_0 x} B_1 \vec{W}'_{R+1,R+2}(t-x)\,dx + e^{D_0 x} B_2 \vec{1}, \tag{28}$$

$$\vec{W}'_{R+1,S}(t) = \int\limits_0^t e^{D_1 x} B_0 \vec{W}'_{R+1,S-1}(t-x)\,dx + e^{D_1 x} B_2 \vec{1}, \tag{29}$$

$$\vec{W}'_{rk}(t) = \int\limits_0^t e^{D_0 x}\big[B_0 \vec{W}'_{r,k-1}(t-x) + B_1 \vec{W}'_{r,k+1}(t-x) +$$

$$B_2 \vec{W}'_{r-1,k-1}(t-x)\big]\,dx, \quad r = \overline{R+2, S-2}, \quad k = \overline{r+1, S-1}, \tag{30}$$

$$\vec{W}'_{rr}(t) = \int\limits_0^t e^{D_0 x}\big[B_1 \vec{W}'_{r,r+1}(t-x) + B_2 \vec{W}'_{r-1,r-1}(t-x)\big]\,dx, \quad r = \overline{R+2, S-1}, \tag{31}$$

$$\vec{W}'_{rS}(t) = \int\limits_0^t e^{D_1 x}\big[B_0 \vec{W}'_{r,S-1}(t-x) + B_2 \vec{W}'_{r-1,S-1}(t-x)\big]\,dx, \quad r = \overline{R+2, S-1}, \tag{32}$$

$$\vec{W}'_{SS}(t) = \int\limits_0^t e^{D_1 x} B_2 \vec{W}'_{S-1,S-1}(t-x)\,dx. \tag{33}$$

Векторные функции $\vec{W}'_{rk}(t)$ будем искать в виде степенных рядов

$$\vec{W}'_{rk}(t) = e^{-at} \sum_{m=r-R-1}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \vec{W}_{rkm}, \quad r = \overline{R+1, S}, \quad k = \overline{r, S}, \tag{34}$$

где постоянную a определим как сумму модулей минимальных (диагональных) элементов матриц Λ и M_0.

Представляя матрицы $e^{D_0 t}$ и $e^{D_1 t}$ в виде

$$e^{D_0 t} = e^{-at} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} L_0^k, \qquad e^{D_1 t} = e^{-at} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} L_1^k,$$

где

$$L_0 = a\Big(E_{IJ} + \frac{1}{a}D_0\Big), \qquad L_1 = a\Big(E_{IJ} + \frac{1}{a}D_1\Big),$$

получаем из (27)–(29):

$$e^{-at}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\vec{W}_{R+1,k,m} =$$

$$\int_0^t e^{-ax}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}L_0^n\Bigg[B_0 e^{-a(t-x)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a(t-x))^l}{l!}\vec{W}_{R+1,k-1,l} +$$

$$B_1 e^{-a(t-x)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a(t-x))^l}{l!}\vec{W}_{R+1,k+1,l}\Bigg]dx + e^{-at}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}L_0^m B_2\vec{1} =$$

$$e^{-at}\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{a}L_0^n\big(B_0\vec{W}_{R+1,k-1,m-n-1} + B_1\vec{W}_{R+1,k+1,m-n-1}\big) +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}L_0^m B_2\vec{1}\Bigg], \quad k = \overline{R+2, S-1}, \tag{35}$$

$$e^{-at}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\vec{W}_{R+1,R+1,m} =$$

$$\int_0^t e^{-ax}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}L_0^n B_1 e^{-a(t-x)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a(t-x))^l}{l!}\vec{W}_{R+1,R+2,l}\,dx + e^{-at}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}L_0^m B_2\vec{1} =$$

$$e^{-at}\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{a}L_0^n B_1\vec{W}_{R+1,R+2,m-n-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}L_0^m B_2\vec{1}\Bigg], \tag{36}$$

$$e^{-at}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\vec{W}_{R+1,S,m} =$$

$$\int_0^t e^{-ax}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}L_1^n B_0 e^{-a(t-x)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a(t-x))^l}{l!}\vec{W}_{R+1,S-1,l}\,dx + e^{-at}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}L_1^m B_2\vec{1} =$$

$$e^{-at}\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{a}L_1^n B_0\vec{W}_{R+1,S-1,m-n-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}L_1^m B_2\vec{1}\Bigg]. \tag{37}$$

Формулы (35)–(37) дают следующие рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов $\vec{W}_{R+1,k,m}$ степенных рядов (34):

$$\vec{W}_{R+1,k,0} = B_2\vec{1}, \quad k = \overline{R+1, S}; \tag{38}$$

при $k = \overline{R+2, S-1}$

$$\vec{W}_{R+1,k,m} = \frac{1}{a}\big(B_0\vec{W}_{R+1,k-1,m-1} + B_1\vec{W}_{R+1,k+1,m-1}\big) + L_0\vec{W}_{R+1,k,m-1}, \quad m \ge 1; \tag{39}$$

при $k = R+1$

$$\vec{W}_{R+1,k,m} = \frac{1}{a}B_1\vec{W}_{R+1,R+2,m-1} + L_0\vec{W}_{R+1,R+1,m-1}, \quad m \ge 1; \tag{40}$$

при $k = S$

$$\vec{W}_{R+1,S,m} = \frac{1}{a} B_0 \vec{W}_{R+1,S-1,m-1} + L_1 \vec{W}_{R+1,S,m-1}, \quad m \geq 1. \tag{41}$$

Аналогично, из (30)–(32) имеем при $r = \overline{R+2, S-1}$ соотношения

$$e^{-at} \sum_{m=r-R-1}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \vec{W}_{r,k,m} =$$

$$\int\limits_0^t e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} L_0^n \Bigg[B_0 e^{-a(t-x)} \sum_{l=r-R-1}^{\infty} \frac{(a(t-x))^l}{l!} \vec{W}_{r,k-1,l} +$$

$$B_1 e^{-a(t-x)} \sum_{l=r-R-1}^{\infty} \frac{(a(t-x))^l}{l!} \vec{W}_{r,k+1,l} + B_2 e^{-a(t-x)} \sum_{l=r-R-2}^{\infty} \frac{(a(t-x))^l}{l!} \vec{W}_{r-1,k-1,l} \Bigg] dx =$$

$$\frac{e^{-at}}{a} \Bigg[\sum_{m=r-R}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \sum_{n=0}^{m-r+R} L_0^n \big(B_0 \vec{W}_{r,k-1,m-n-1} + B_1 \vec{W}_{r,k+1,m-n-1} \big) +$$

$$\sum_{m=r-R-1}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \sum_{n=0}^{m-r+R+1} L_0^n B_2 \vec{W}_{r-1,k-1,m-n-1} \Bigg], \quad k = \overline{r+1, S-1},$$

$$e^{-at} \sum_{m=r-R-1}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \vec{W}_{r,r,m} =$$

$$\int\limits_0^t e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} L_0^n \Bigg[B_1 e^{-a(t-x)} \sum_{l=r-R-1}^{\infty} \frac{(a(t-x))^l}{l!} \vec{W}_{r,r+1,l} \, dx +$$

$$B_2 e^{-a(t-x)} \sum_{l=r-R-2}^{\infty} \frac{(a(t-x))^l}{l!} \vec{W}_{r-1,r-1,l} \Bigg] dx =$$

$$\frac{e^{-at}}{a} \Bigg[\sum_{m=r-R}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \sum_{n=0}^{m-r+R} L_0^n B_1 \vec{W}_{r,r+1,m-n-1} +$$

$$\sum_{m=r-R-1}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \sum_{n=0}^{m-r+R+1} L_0^n B_2 \vec{W}_{r-1,r-1,m-n-1} \Bigg],$$

$$e^{-at} \sum_{m=r-R-1}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \vec{W}_{r,S,m} =$$

$$\int\limits_0^t e^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} L_1^n B_0 e^{-a(t-x)} \sum_{l=r-R-1}^{\infty} \frac{(a(t-x))^l}{l!} \vec{W}_{r,S-1,l} \, dx +$$

$$B_2 e^{-a(t-x)} \sum_{l=r-R-2}^{\infty} \frac{(a(t-x))^l}{l!} \vec{W}_{r-1,S-1,l} \Bigg] dx =$$

$$\frac{e^{-at}}{a} \Bigg[\sum_{m=r-R}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \sum_{n=0}^{m-r+R} L_1^n B_0 \vec{W}_{r,S-1,m-n-1} +$$

$$\left.\sum_{m=r-R-1}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\sum_{n=0}^{m-r+R+1}L_1^nB_2\vec{W}_{r-1,S-1,m-n-1}\right],$$

приводящие к следующим рекуррентным соотношениям для вычисления коэффициентов $\vec{W}_{r,k,m}$, $R+1<r<S$, степенных рядов (34):

$$\vec{W}_{r,k,r-R-1}=\frac{1}{a}B_2\vec{W}_{r-1,k-1,r-R-2},\quad k=\overline{r,S}; \tag{42}$$

при $k=\overline{r+1,S-1}$

$$\vec{W}_{r,k,m}=\frac{1}{a}\big(B_0\vec{W}_{r,k-1,m-1}+B_1\vec{W}_{r,k+1,m-1}+B_2\vec{W}_{r-1,k-1,m-1}\big)+L_0\vec{W}_{r,k,m-1},\quad m\geq r-R; \tag{43}$$

при $k=r$

$$\vec{W}_{r,r,m}=\frac{1}{a}\big(B_1\vec{W}_{r,r+1,m-1}+B_2\vec{W}_{r-1,r-1,m-1}\big)+L_0\vec{W}_{r,r,m-1},\quad m\geq r-R; \tag{44}$$

при $k=S$

$$\vec{W}_{r,S,m}=\frac{1}{a}\big(B_0\vec{W}_{r,S-1,m-1}+B_2\vec{W}_{r-1,S-1,m-1}\big)+L_1\vec{W}_{r,S,m-1},\quad m\geq r-R. \tag{45}$$

Наконец, из (33) имеем

$$e^{-at}\sum_{m=S-R-1}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\vec{W}_{S,S,m}=$$

$$\int\limits_0^t e^{-ax}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^n}{n!}L_1^nB_2e^{-a(t-x)}\sum_{l=S-R-2}^{\infty}\frac{(a(t-x))^l}{l!}\vec{W}_{S-1,S-1,l}dx=$$

$$\frac{e^{-at}}{a}\sum_{m=S-R-1}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\sum_{n=0}^{m-S+R+1}L_1^nB_2\vec{W}_{S-1,S-1,m-n-1}$$

и

$$\vec{W}_{S,S,S-R-1}=\frac{1}{a}B_2\vec{W}_{S-1,S-1,S-R-2}, \tag{46}$$

$$\vec{W}_{S,S,m}=\frac{1}{a}B_2\vec{W}_{S-1,S-1,m-1}+L_1\vec{W}_{S,S,m-1},\quad m\geq S-R. \tag{47}$$

Далее, представим сумму в правой части (16) в виде

$$\sum_{r=R}^{S-1}\vec{p}_r(\Lambda_1\otimes E_J)\vec{W}'_{r+1,r+1}(t)=e^{-at}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}w_m.$$

Тогда

$$w_m=\sum_{r=0}^{m}\vec{p}_{R+r}(\Lambda_1\otimes E_J)\vec{W}_{R+r+1,R+r+1,m},\quad m=\overline{0,S-R-2},$$

$$w_m=\sum_{r=0}^{S-R-1}\vec{p}_{R+r}(\Lambda_1\otimes E_J)\vec{W}_{R+r+1,R+r+1,m},\quad m\geq S-R-1.$$

Теперь с помощью (16) функцию $W(t)$ стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания обслуженной заявки можно записать в виде

$$W(t)=\frac{1}{1-\pi_{\text{kill}}-\pi_{\text{los}}}\left[(1-\pi_{\text{kill}}-\pi_{\text{los}})-\frac{e^{-at}}{a\lambda_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}W_m\right],\quad x>0,$$

где

$$W_m=\sum_{r=m}^{\infty}w_r,\quad m\geq 0.$$

Замечание к численному нахождению коэффициентов степенных разложений. Коэффициенты $\vec{W}_{r,k,m}$ по формулам (38)–(47) в зависимости от исходных параметров системы удобно вычислять одним из двух способов: либо одновременно для всех r и k рекуррентно по m, начиная от $m=0$, либо последовательно по всем r, начиная от $r=R+1$ и кончая $r=S$, одновременно для всех k рекуррентно по m, начиная от $m=0$.

Подобным образом можно вычислить стационарное распределение $G(t)$ времени пребывания в системе "убитой" заявки. При этом единственным существенным отличием от предыдущего случая является то, что векторные функции $\vec{G}'_{rk}(t)$ нужно искать в виде степенных рядов

$$\vec{G}'_{rk}(t)=e^{-at}\sum_{m=k-r}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\vec{G}_{rkm},\quad r=\overline{R+1,S},\quad k=\overline{r,S},$$

с соответствующими изменениями алгоритмов вычисления коэффициентов $\vec{G}_{r,k,m}$.

6. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

6.1. Обслуживание фазового типа

Рассмотрим многолинейную (R-линейную) СМО с марковским входящим потоком (положительных и отрицательных) заявок, фазовым распределением (PH-распределением) времени обслуживания заявки и указанным выше порядком действия отрицательных заявок. Будем предполагать, что PH-распределение $H(x)$ времени обслуживание заявки каждым прибором характеризуется неприводимым PH-представлением $(\vec{h},\,H)$ порядка S [11].

Покажем, как эта система может быть приведена к общей рассмотренной выше СМО. Для этого можно определить исходные параметры общей СМО следующим образом. Положим $J_r=S^r$, $J=S^R$, $H^*=\vec{h}^{\mathrm{T}}\otimes\vec{1}$. Обозначим через H_{d} диагональную матрицу с элементами $h_{\mathrm{d}ii}=\sum\limits_{j=1}^{S}h_{ij}$ на диагонали. Матрицы из элементов M_{1r}, M_{0r}, M_1 и M_0 зададим соотношениями

$$M_{1r}=H_{\mathrm{d}}\vec{1}\otimes E_S\otimes\ldots\otimes E_S+E_S\otimes H_{\mathrm{d}}\vec{1}\otimes\ldots\otimes E_S+\ldots+E_S\otimes E_S\otimes\ldots\otimes H_{\mathrm{d}}\vec{1},\quad r=\overline{1,R},$$

где число слагаемых и число сомножителей в каждом слагаемом равны r,

$$M_1=H_{\mathrm{d}}H^*\otimes E_S\otimes\ldots\otimes E_S+E_S\otimes H_{\mathrm{d}}H^*\otimes\ldots\otimes E_S+\ldots+E_S\otimes E_S\otimes\ldots\otimes H_{\mathrm{d}}H^*,$$

число слагаемых и число сомножителей R,

$$M_{0r}=H\otimes E_S\otimes\ldots\otimes E_S+E_S\otimes H\otimes\ldots\otimes E_S+\ldots+E_S\otimes E_S\otimes\ldots\otimes H,\quad r=\overline{0,R-1},$$

число слагаемых и число сомножителей r,

$$M_0=H\otimes E_S\otimes\ldots\otimes E_S+E_S\otimes H\otimes\ldots\otimes E_S+\ldots+E_S\otimes E_S\otimes\ldots\otimes H,$$

число слагаемых и число сомножителей R,

$$\Omega_r = \frac{1}{r} H^* \otimes E_S \otimes \ldots \otimes E_S + E_S \otimes H^* \otimes \ldots \otimes E_S + \ldots + E_S \otimes E_S \otimes \ldots \otimes H^*, \quad r = \overline{0, R-1},$$

число слагаемых и число сомножителей $r+1$.

Общее время пребывания обслуженной заявки в системе с обслуживанием фазового типа состоит из времени ожидания начала обслуживания и собственно времени обслуживания. Значит, стационарное распределение $V(t)$ этого времени для обслуженной заявки задается формулой

$$V(t) = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{serv}}} \sum_{r=0}^{R-1} \vec{p}_r (\Lambda_1 \otimes E_{J_r}) \, \vec{1} \, H(t) + \int\limits_0^t H(t-x) W'(x) \, dx.$$

Отметим, что рассмотренный здесь способ нумерации состояний уже при небольшом числе приборов R приводит к очень большому числу состояний J. Гораздо более экономный метод нумерации изложен в [12].

6.2. Независимые потоки положительных и отрицательных заявок

Предположим, что общий входящий марковский поток положительных и отрицательных заявок является суперпозицией двух независимых марковских потоков: потока положительных и потока отрицательных заявок.

Поток положительных заявок определяется матрицами интенсивностей изменения фаз генерации положительных заявок Λ_{pos} с поступлением заявки и $\tilde{\Lambda}_{\mathrm{pos}}$ без поступления заявки порядка I_1.

Поток отрицательных заявок определяется матрицами интенсивностей изменения фаз генерации отрицательных заявок Λ_{neg} с поступлением заявки и $\tilde{\Lambda}_{\mathrm{neg}}$ без поступления заявки порядка I_2.

Для приведения этой системы к рассматриваемой выше СМО нужно положить $I = I_1 I_2$ и

$$\Lambda_1 = \Lambda_{\mathrm{pos}} \otimes E_{I_2},$$

$$\Lambda_0 = E_{I_1} \otimes \Lambda_{\mathrm{neg}},$$

$$\Lambda = \tilde{\Lambda}_{\mathrm{pos}} \oplus \tilde{\Lambda}_{\mathrm{neg}} \tilde{\Lambda}_{\mathrm{pos}} \otimes E_{I_2} + E_{I_1} \otimes \tilde{\Lambda}_{\mathrm{neg}}.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей статье получены математические соотношения и алгоритмы для вычисления основных стационарных характеристик рассматриваемой СМО. Результаты работы могут быть использованы для написания программ и проведения численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelenbe E. Random neural networks with positive and negative signals and product form solution. *Neural Computation*, 1989, vol. 1, pp. 502–510.
2. Gelenbe E. Reseaux neuronaux aleatoires stables. *Comptes-Rendus Acad. Sci. II*, 1990, vol. 310, pp. 177–180.
3. Gelenbe E., Pujolle G. *Introduction to queueing networks.* New-York: John Wiley, 1998.
4. Artalejo J.R. G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks. *Eur. J. Oper. Res.*, 2000, vol. 126, pp. 233–249.

5. Бочаров П.П., Вишневский В.М. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей. *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 5, стр. 46–74.

6. Baskett F., Chandy K.M., Muntz R.R., et al. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. *J. ACM*, 1975, vol. 22, pp. 248–260.

7. Shin Y. Multiserver retrial queue with negative customers and disasters. *Proc. of the Fifth Internat. Workshop on Retrial Queues*. Seoul: Korea University, 2005, pp. 53–60.

8. Anisimov V., Artalejo J. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals. *Queueing Systems*, 2001, vol. 39, pp. 157–182.

9. Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания $G/MSP/n/r$ с потоком отрицательных заявок. *Информационные процессы*, 2005, том 5, № 1, стр. 1–19.

10. Бочаров П.П., Д'Апиче Ч., Мандзо Р., Печинкин А.В. Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками. *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 1, стр. 93–104.

11. Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания.* М.: РУДН, 1995.

12. Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания $SM/MSP/n/r$. *Автоматика и телемеханика*, 2004, № 9, стр. 85–100.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И.Венец