Информационные процессы, Том 7, № 2, 2007, стр. 153–167.

Система BMAP/G/1/r с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом[1]

Т.А. Милованова

Российский университет Дружбы Народов, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 29.03.2007

Аннотация—Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с групповым марковским входящим потоком, ограниченным накопителем, произвольным распределением времени обслуживания заявки и инверсионным порядком обслуживания с вероятностным приоритетом. Получены формулы для вычисления основных стационарных характеристик очереди.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания (СМО) $BMAP/G/1/r$, в которую поступает групповой марковский поток заявок ($BMAP$). Групповой марковский поток задается матрицами Λ и N_k, $k \geq 1$, порядка l. Элемент $(\Lambda)_{ij}$ матрицы Λ при $i \neq j$ является интенсивностью перехода процесса генерации с фазы i на фазу j, не сопровождаемого появлением новой группы заявок, а элемент $(N_k)_{ij}$ матрицы N_k, $k \geq 1$, — интенсивностью перехода с фазы генерации i на фазу j, при котором в систему поступает новая группа заявок размера k. Положим $\tilde{N}_k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} N_{k+i}$. Элемент $(\tilde{N}_k)_{ij}$ матрицы $\tilde{N}_k$ представляет собой интенсивность перехода процесса генерации заявок с фазы i на фазу j, при котором в систему поступает группа, содержащая, по крайней мере k заявок.

Обозначим через $\Lambda^* = \Lambda + \tilde{N}_1$ инфинитезимальную матрицу процесса генерации заявок. Будем предполагать, что матрица Λ^* неразложима. Через $\vec{\pi}$ обозначим вектор стационарных вероятностей фаз генерации заявок, т.е. стационарных вероятностей состояний марковского процесса с инфинитезимальной матрицей Λ^*. Тогда $\vec{\pi}$ можно найти из системы уравнений равновесия

$$\vec{0} = \vec{\pi}\Lambda^*$$

с условием нормировки

$$\vec{\pi}\vec{1} = 1.$$

Интенсивность входящего в систему потока вычисляется по формуле $\lambda = \vec{\pi}\tilde{N}_1\vec{1}$.

Будем использовать обозначение $R = r + 1$, где R — максимальное число заявок, одновременно находящихся в системе.

Времена обслуживания заявок (длины заявок) независимы в совокупности и имеют функцию распределения $B(x)$ с конечным средним $b = \int\limits_0^{\infty} x\,dB(x) < \infty$, причем для простоты изложения будем считать, что $B(x)$ имеет плотность $b(x) = B'(x)$.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-07-89056)

Будем предполагать, что в моменты прихода заявок в систему становятся известными их длины. Будем считать, что поступившие заявки в группе распределяют места случайным образом, т.е. каждая заявка может оказаться на любом месте в группе размера k с вероятностью $1/k$.

Инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом (*LCFS PP*) определяется следующим образом:

1а. Если в момент поступления группы из k, $k \leq R$, заявок система свободна, то первая заявка из этой группы сразу же начинает обслуживаться, остальные заявки занимают первые $k-1$ мест в очереди.

1б. Если в свободную систему поступает k, $k > R$, заявок, то $k - R$ заявок теряется, $(k - R + 1)$-я заявка из поступившей группы начинает обслуживаться, а остальные заявки из группы становятся в очередь.

2а. Если в системе имеется n, $n < R$, заявок, и поступает группа, содержащая k, $k \leq R - n$, заявок, то первая заявка длины x из этой группы, заставшая на приборе заявку с остаточной длиной y, с вероятностью $d(x,y)$, зависящей только от длин x и y и не зависящей от предыстории функционирования системы, прерывает обслуживание и сама становится на прибор. Остальные $k-1$ заявок из этой группы занимают первое, второе, $\ldots$, $(k-1)$-е места в очереди, а ранее обслуживаемая заявка занимает k-е место в очереди. Заявки, находящиеся в очереди до поступления заявок, становятся после этой заявки с сохранением порядка.

2б. Если в системе имеется n, $n < R$, заявок, и поступает группа, содержащая k, $k \leq R-n$, заявок, то с дополнительной вероятностью $1 - d(x,y)$ заявка на приборе с остаточной длиной y продолжает обслуживаться, а поступившая группа из k заявок с первой заявкой длины x занимает первые k мест в очереди. Остальные заявки, находящиеся в очереди, становятся после группы вновь пришедших заявок с сохранением порядка.

3а. Если в системе находится n, $n < R$, заявок с остаточной длиной заявки на приборе y, поступает группа, содержащая k, $k > R - n$, заявок, и длина первой из них x, то с вероятностью $d(x,y)$ первые $k-R+n$ заявок из этой группы теряются, а первая из оставшихся занимает прибор, остальные из пришедшей группы становятся на первые места в очереди, а обслуживавшаяся на приборе заявка становится за ними. Имевшиеся в очереди до поступления группы заявки становятся за этой заявкой с сохранением порядка.

3б. Если в системе находится n, $n < R$, заявок с остаточной длиной заявки на приборе y, поступает $R - n + 1$ заявок и длина первой из них x, то с дополнительной вероятностью $1 - d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка покидает систему, первая заявка из поступивших становится на прибор, остальные вновь пришедшие заявки становятся в очередь на первые места, а заявки, находившиеся в очереди до момента поступления группы, становятся за этими заявками.

3в. Если в системе находится n, $n < R$, заявок с остаточной длиной заявки на приборе y, поступает группа, содержащая k, $k > R - n + 1$, заявок, и длина первой из них x, то с дополнительной вероятностью $1 - d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка покидает систему вместе с $k-R+n-1$ первыми заявками из поступивших, $(k-R+n)$-я поступившая заявка становится на прибор, остальные вновь пришедшие заявки занимают первые места в очереди, а заявки, находившиеся в очереди до момента поступления группы, становятся за этими заявками с сохранением порядка.

4а. Если в системе находится R заявок с остаточной длиной заявки на приборе y, поступает группа, содержащая k, $k \geq 1$, заявок и длина первой из них x, то с вероятностью $d(x,y)$ все заявки из этой группы теряются и продолжается обслуживание заявки, находящейся на приборе.

4б. Если в системе находится R, заявок с остаточной длиной заявки на приборе y, поступает одна заявка длины x, то с дополнительной вероятностью $1-d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка покидает систему, а вновь поступившая заявка занимает прибор.

4в. Если в системе находится R заявок с остаточной длиной заявки на приборе y, поступает группа, содержащая $k,\ \ k>1$, заявок и длина первой из них x, то с дополнительной вероятностью $1-d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка покидает систему вместе с $k-1$ первыми из вновь поступивших заявками, а последняя из поступивших заявок становится на прибор.

Недообслуженные заявки дообслуживаются.

В настоящей статье получены интегро-дифференциальные уравнения для вычисления стационарных вероятностей состояний.

Отметим, что инверсионная вероятностная дисциплина обслуживания была введена в работах [2, 3]. СМО с различными вариантами этой дисциплины рассматривались в [2–8] и других работах (см. также [1], гл. 7). Как будет показано ниже, методы исследования рассматриваемой в данной работе системы являются дальнейшим развитием методов, использованных для анализа СМО $MAP/G/1/r$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом [6].

2. МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, ОПИСЫВАЮЩИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ

Для исследования системы применим метод введения дополнительных переменных. Рассмотрим случайный процесс $\eta(t)=\zeta(t),\nu(t),\vec{\xi}(t),\ \ t\geq 0$, где $\zeta(t)$ — фаза генерации в момент t, $\nu(t)$ — число заявок в системе в этот момент, а $\vec{\xi}(t)=(\xi_1(t),\ldots,\xi_{\nu(t)}(t))$. Здесь $\xi_1(t),\ldots,\xi_{\nu(t)}(t)$ — (остаточные) длины заявок, находящихся в системе и расположенных в порядке очереди, т.е. $\xi_1(t)$ — длина обслуживаемой на приборе заявки, $\xi_2(t)$ — длина заявки, находящейся в очереди на первом месте, и т.д. В случае $\nu(t)=0$ вектор $\vec{\xi}(t)$ не определяется. Процесс $\eta(t)$ является марковским. Обозначим через $\vec{p}_0$ и $\vec{P}_n(x_1,\ldots,x_n),\ \ 1\leq n\leq R$, предельные (стационарные) вероятности того, что в системе отсутствуют заявки и находится n заявок длин меньше $x_1,\ldots,x_n$, а через $\vec{p}_n(x_1,\ldots,x_n)=\partial^n\vec{P}_n(x_1,\ldots,x_n)/\partial x_1\cdots\partial x_n$ — соответствующие плотности, т.е. смешанные производные функций $\vec{P}_n(x_1,\ldots,x_n)$ по всем аргументам. Здесь и далее координаты векторов соответствуют состояниям процесса $\zeta(t)$ генерации заявок.

3. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ

Для вычисления стационарных вероятностей $\vec{p}_0$ и $\vec{P}_n(x_1,\ldots,x_n)$ обратимся к вспомогательным системам $BMAP/G/1/n$ с $n\ \ (0\leq n\leq r)$ местами ожидания и дисциплиной *LCFS PP*, отличающиеся от исходных только числом мест ожидания. Такие системы будем называть n-системами.

Обозначим через $F_n(x)$ матрицу, элемент $(F_n(x))_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что в конце периода занятости (ПЗ) n-системы, открываемого заявкой длины x фаза генерации будет j, при условии, что в начале этого ПЗ фаза генерации была i.

Через $F_{n,k}(x)$ обозначим матрицу, элемент $(F_{n,k}(x))_{ij}$ которой является условной вероятностью того, что в конце периода занятости (ПЗ) n-системы, открываемого заявкой длины x на приборе и еще $k,\ \ k\leq n$, заявками произвольных длин в очереди, фаза генерации будет j, при условии, что в начале этого ПЗ фаза генерации была i.

Обозначим через $F_{n,k}$ матрицу, элемент $(F_{n,k})_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что в конце периода занятости (ПЗ) n-системы, открываемого заявкой произвольной длины на приборе и еще $k,\ \ k\leq n$, заявками произвольных длин в очереди, фаза генерации будет j, при условии, что в начале этого ПЗ фаза генерации была i.

Очевидно, что $F_{n,0}(x) = F_n(x)$, $F_{n,0} = F_n$ и, кроме того,

$$F_n = \int_0^\infty F_n(x)b(x)\,dx, \qquad F_{n,k} = \int_0^\infty F_{n,k}(x)b(x)dx.$$

$$F_{n,k}(x) = F_{n-k}(x)\prod_{i=1}^{k} F_{n-k+i}, k = \overline{1,n},$$

Матрицы $F_n(x)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$F_0'(x) = \Lambda F_0(x) + \tilde{N}_1 \int_0^\infty b(y)d(y,x)F_0(x)\,dy +$$

$$N_1 \int_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]F_0(y)\,dy + \tilde{N}_2 F_0 \int_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]\,dy, \tag{1}$$

$$F_n'(x) = \Lambda F_n(x) + \sum_{k=1}^{n} N_k \int_0^\infty b(y)\big[d(y,x)F_{n-1,k-1}(y)F_n(x) +$$

$$(1-d(y,x))F_{n-k}(x)F_{n,k-1}(y)\big]\,dy + \tilde{N}_{n+1}F_{n-1,n-1}\int_0^\infty b(y)d(y,x)F_n(x)\,dy +$$

$$N_{n+1}\int_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]F_{n,n}(y)\,dy + \tilde{N}_{n+2}\int_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]F_{n,n}\,dy, \quad n = \overline{1,r}, \tag{2}$$

с очевидным начальным условием

$$F_n(0) = I, \tag{3}$$

где I — единичная матрица.

Уравнение (2) получается следующим образом. За то время, пока длина $x+\Delta$ открывающей ПЗ n-системы заявки уменьшится на Δ, с точностью до вероятности $o(\Delta)$ могут произойти следующие события:

в систему не поступит ни одной заявки (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $I + \Lambda\Delta$), а затем продолжится ПЗ n-системы, открываемый заявкой длины x;

в систему поступит группа из k, $1 \le k \le n$, заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $N_k\Delta$). Первая заявка из этой группы, имеющая длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), встанет на прибор (с вероятностью $d(y,x)$), а другие заявки из группы займут первые $k-1$ мест в очереди и откроют ПЗ $(n-1)$-системы k заявками (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_{n-1,k-1}(y)$), после окончания которого продолжится обслуживание исходной заявки остаточной длины x, снова откроющей ПЗ n-системы (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_n(x)$);

в систему поступит группа из k, $1 \le k \le n$, заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $N_k\Delta$), первая заявка из этой группы, имеющая длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), займет первое место в очереди (с вероятностью $1 - d(y,x)$), а остальные вновь пришедшие заявки встанут за ней с учетом порядка. Исходная заявка остаточной длины x продолжит обслуживание на приборе, но откроет теперь ПЗ $(n-k)$-системы (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_{n-k}(x)$), после окончания которого начнется обслуживание заявки длины y, откроющей ПЗ n-системы k заявками (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_{n,k-1}(y)$);

в систему поступит группа, содержащая, по крайней мере $n+1$ заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $\tilde{N}_{n+1}\Delta$), первая заявка из вновь пришедших будет иметь длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), первые вновь пришедшие заявки до количества n потеряются (с вероятностью $d(y,x)$)), первая заявка из оставшихся вновь пришедших заявок встанет на прибор, другие заявки из группы займут $n-1$ мест в очереди, а недообслуженная заявка остаточной длины x займет n-е место в очереди. Заявка, поступившая на прибор, откроет ПЗ $(n-1)$-системы n заявками (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_{n-1,n-1}(y)$), по окончании которого недообслуженная заявка откроет ПЗ n-системы (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_n(x)$);

в систему поступит группа из $n+1$ заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $N_{n+1}\Delta$), первая заявка будет иметь длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), встанет на прибор (с вероятностью $1-d(y,x)$) и откроет ПЗ n-ситемы n заявками (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_{n,n}(y)$), а исходная заявка остаточной длины x покинет систему;

в систему поступит группа, содержащая, по крайней мере $n+2$ заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $\tilde{N}_{n+2}\Delta$), и первая заявка будет иметь длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$). Заявка остаточной длины x на приборе и первые вновь пришедшие заявки до количества $n+1$ потеряются (с вероятностью $1-d(y,x)$), первая заявка из оставшихся вновь пришедших заявок встанет на прибор, открывая ПЗ n-системы n заявками (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $F_{n,n}$), а другие заявки из группы займут n мест в очереди.

Применяя формулу полной вероятности, получим следующее уравнение

$$F_n(x+\Delta) = (I+\Lambda\Delta)F_n(x) + \sum_{k=1}^{n} N_k\Delta \int_0^\infty b(y)\big[d(y,x)F_{n-1,k-1}(y)F_n(x) +$$

$$(1-d(y,x))F_{n-k}(x)F_{n,k-1}(y)\big]\,dy + \tilde{N}_{n+1}\Delta F_{n-1,n-1}\int_0^\infty b(y)d(y,x)F_n(x)\,dy +$$

$$N_{n+1}\Delta\int_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]F_{n,n}(y)\,dy + \tilde{N}_{n+2}\Delta\int_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]F_{n,n}\,dy + o(\Delta).$$

откуда, выполнив элементарные преобразования и устремив Δ к нулю, приходим к равенству (2).

Уравнение (1) выводится аналогично.

Уравнения (1)–(2) с начальным условием (3) позволяют рекуррентно, начиная с $n=0$ и заканчивая $n=r$, вычислять матрицы $F_n(x)$.

4. СТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Для вычисления стационарных вероятностей состояний воспользуемся методом, предложенным в [5]. Этот метод основан на исключении из рассмотрения тех интервалов времени, когда в системе находится более n заявок, и последующем склеивании оставшихся кусков процесса $\eta(t)$.

Рассмотрим вспомогательные системы второго типа (будем их называть n^*-системами), похожие на систему $BMAP/G/1/n-1$ $(1 \leq n \leq R)$ с $n-1$ местами ожидания и дисциплиной $LCFS\ PP$, но определяемые следующим образом.

1. 0^*-система представляет собой марковский процесс с матрицей интенсивностей переходов $\Lambda + \sum\limits_{k=1}^{r} N_k F_{r,k-1} + \tilde{N}_R F_{r,r}$.

2. n^*-система, $1 \leq n \leq r$, определяется следующим образом.

2а. Если в системе m, $0 \leq m < n$, заявок и поступает группа из k, $1 \leq k \leq n-m$, заявок, то n^*-система определяется так же, как и исходная.

2б. Если в системе 0 заявок и поступает группа из k, $n+1 \leq k < R$, заявок, то $k-n$ заявок теряется, дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,k-n-1}$ и $(k-n+1)$-я заявка начинает обслуживаться.

2в. Если в системе 0 заявок и поступает группа из k, $k \geq R$, заявок, то $k-n$ заявок теряется, дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,r-n}$ и $(k-n+1)$-я заявка начинает обслуживаться.

2г. Если в системе m, $1 \leq m < n$, заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из k, $m-n < k \leq R-m$, заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $d(x,y)$ первые $k+m-n$ поступивших заявок теряются, начинает обслуживаться $(k+m-n+1)$-я заявка, остальные поступившие заявки занимают первые места в очереди, затем становится заявка, обслуживаемая до прихода группы, и за ней становятся остальные ранее находящиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,k+m-n-1}(x)$.

2д. Если в системе m, $1 \leq m \leq n$, заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из $n-m+1$ заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $1-d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка теряется, начинает обслуживаться первая заявка из поступившей группы, остальные поступившие заявки занимают первые места в очереди и за ними становятся ранее находящиеся в системе в очереди заявки. Одновременно дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n}(y)$.

2е. Если в системе m, $1 \leq m \leq n$, заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из k, $n-m+1 < k \leq R-m$, заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $1-d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка и первые $k+m-n-1$ поступивших заявок теряются, начинает обслуживаться $(k+m-n)$-я заявка, остальные поступившие заявки занимают первые места в очереди и за ними становятся ранее находящиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{R-m-k}(y)F_{r-n,k+m-n-2}(x)$.

2ж. Если в системе m, $1 \leq m < n$, заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из k, $k > R-m$, заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $d(x,y)$ первые $k+m-n$ поступивших заявок теряются, начинает обслуживаться $(k+m-n+1)$-я заявка, остальные поступившие заявки занимают первые места в очереди, затем становится заявка, обслуживаемая до прихода группы, и за ней становятся остальные ранее находящиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,k+m-n-1}$.

2з. Если в системе m, $1 \leq m \leq n$, заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из $R-m+1$ заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $1-d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка и первые $R-n$ поступивших заявок теряются, начинает обслуживаться $(R-n+1)$-я заявка из поступившей группы, остальные поступившие заявки занимают первые места в очереди и за ними становятся ранее находящиеся в системе в очереди заявки. Одновременно дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,r-n}(x)$.

2и. Если в системе $m,\ \ 1 \le m \le n$, заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из $k,\ \ k \ge R-m+2$, заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $1-d(x,y)$ обслуживавшаяся ранее заявка и первые $k+m-n-1$ поступивших заявок теряются, начинает обслуживаться $(k+m-n)$-я заявка, остальные поступившие заявки занимают первые места в очереди и за ними становятся ранее находящиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, дополнительно изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,r-n}$.

2к. Если в системе n заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из $k,\ \ k \le R-n$, заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $d(x,y)$ все поступившие заявки теряются, заявка на приборе продолжает обслуживаться, но при этом изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,k-1}(x)$.

2л. Если в системе n заявок, обслуживается заявка остаточной длины y и поступает группа из $k,\ \ k > R-n$, заявок, причем первая заявка в группе имеет длину x, то с вероятностью $d(x,y)$ все поступившие заявки теряются, заявка на приборе продолжает обслуживаться, но при этом изменяется фаза генерации заявок в соответствии с матрицей $F_{r-n,r-n}$.

3. R^*-система совпадает с исходной системой.

Выпишем уравнения для нахождения $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_n(x_1,\ldots,x_n)$.

Вектор $\vec{p}_0$ определяется из системы линейных алгебраических уравнений

$$\vec{p}_0\left(\Lambda + \sum_{k=1}^{r} N_k F_{r,k-1} + \tilde{N}_R F_{r,r}\right) = \vec{0}. \tag{4}$$

Векторы $\vec{p}_n(x_1,\ldots,x_n),\ \ n=\overline{1,R}$, удовлетворяют рекуррентной системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\vec{p}_1{}'(x) = -b(x)\vec{p}_0\left(N_1 + \sum_{k=2}^{r} N_k F_{r-1,k-2} + \tilde{N}_R F_{r-1,r-1}\right) - \vec{p}_1(x)\Lambda - \\
\vec{p}_1(x)\int\limits_0^\infty d(y,x)b(y)\left(\sum_{k=1}^{r} N_k F_{r-1,k-1}(y) + \tilde{N}_R F_{r-1,r-1}\right)dy - \\
b(x)\int\limits_0^\infty [1-d(x,y)]\vec{p}_1(y)N_1F_{r-1}(y)\,dy - \\
b(x)\sum_{k=2}^{r}\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty [1-d(z,y)]\vec{p}_1(y)N_kF_{r-k}(y)F_{r-1,k-2}(z)b(z)\,dy - \\
b(x)\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty [1-d(z,y)]\vec{p}_1(y)N_RF_{r-1,r-1}(z)b(z)\,dy - \\
b(x)\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty [1-d(z,y)]\vec{p}_1(y)\tilde{N}_{R+1}F_{r-1,r-1}b(z)\,dy,
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\vec{p}_n{}'(x_1,\ldots,x_n) = -b(x_1)\cdots b(x_n)\vec{p}_0\left(N_n + \sum_{k=n+1}^{r} N_k F_{r-n,k-n-1} + \tilde{N}_R F_{r-n,r-n}\right) -$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b(x_1)\cdots b(x_k)\vec{p}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)\Bigg(d(x_1,x_{k+1})N_k +$$

$$\sum_{i=k+1}^{R-n+k}\int\limits_0^\infty b(z)d(z,x_{k+1})N_i F_{r-n,i-k-1}(z)\,dz + \int\limits_0^\infty b(z)d(z,x_{k+1})\tilde{N}_{R-n+k+1}F_{r-n,r-n}\,dz\Bigg) -$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b(x_2)\cdots b(x_{k+1})[1-d(x_2,x_1)]\vec{p}_{n-k}(x_1,x_{k+2},\ldots,x_n)N_k -$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b(x_1)\cdots b(x_{k+1})\int\limits_0^\infty \vec{p}_{n-k}(y,x_{k+2},\ldots,x_n)\Bigg([1-d(x_1,y)]N_{k+1}F_{r-n}(y) +$$

$$\sum_{i=k+2}^{R-n+k}\int\limits_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_i F_{n-k+i-1}(y)F_{r-n,i-k-2}(z)\,dz +$$

$$\int\limits_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_{R-n+k+1}F_{r-n,r-n}(z)\,dz +$$

$$\int\limits_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]\tilde{N}_{R-n+k+2}F_{r-n,r-n}dz\Bigg)dy - \vec{p}_n(x_1,\ldots,x_n)\Lambda -$$

$$\vec{p}_n(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_0^\infty b(y)d(y,x_1)\left(\sum_{k=1}^{r-n+1} N_k F_{r-n,k-1}(y) + \tilde{N}_{r-n+2}F_{r-n,r-n}\right)dy -$$

$$b(x_1)\int\limits_0^\infty \vec{p}_n(y,x_2,\ldots,x_n)\Bigg([1-d(x_1,y)]N_1 F_{r-n}(y) +$$

$$\sum_{k=2}^{r-n+1}\int\limits_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_k F_{r-n-k+1}(y)F_{r-n,k-2}(z)\,dz +$$

$$\int\limits_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_{r-n+2}F_{r-n,r-n}(z)\,dz +$$

$$\int\limits_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]\tilde{N}_{r-n+3}F_{r-n,r-n}dz\Bigg)dy, \quad n=\overline{2,R}. \tag{6}$$

Уравнение (4) получается из описания 0^*-системы.

Уравнение (6) получается следующим образом. Пусть n^*-система функционирует в стационарном режиме. Рассмотрим моменты времени t и $t+\Delta$. Тогда для того чтобы в момент времени $t+\Delta$ в системе находилось n заявок, причем длина заявки на приборе равнялась x_1, а длины заявок в очереди были $x_2,\ldots,x_n$, нужно, чтобы было выполнено одно из следующих событий:

в момент t в системе не было заявок (с вероятностью $\vec{p}_0$), а за время Δ в n^*-систему поступила группа из n заявок (с вероятностью $N_n\Delta$) длин $x_1, \ldots, x_n$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)\cdots b(x_n)$);

в момент t в системе не было заявок (с вероятностью $\vec{p}_0$), а за время Δ в n^*-систему поступила группа из k, $n+1 \leq k \leq r$, заявок (с вероятностью $N_k\Delta$), причем первые $k-n$ заявок покинули n^*-систему (в соответствии с матрицей $F_{r-n,k-n-1}$), а оставшиеся заявки имеют длины $x_1, \ldots, x_n$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)\cdots b(x_n)$);

в момент t в системе не было заявок (с вероятностью $\vec{p}_0$), а за время Δ в n^*-систему поступила группа из k, $k \geq R$, заявок (с вероятностью $N_k\Delta$), причем первые $k-n$ заявок покинули n^*-систему (в соответствии с матрицей $F_{r-n,r-n}$), а оставшиеся заявки имеют длины $x_1, \ldots, x_n$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)\cdots b(x_n)$);

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину x_{k+1}, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из k заявок (с вероятностью $N_k\Delta$) длин $x_1, \cdots, x_k$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)\ldots b(x_k)$). Первая поступившая заявка заняла прибор, остальные поступившие заявки заняли первые места в очереди, затем встала заявка, обслуживаемая до прихода группы, и за ней встали остальные ранее находившиеся в системе в очереди заявки (с вероятностью $d(x_1, x_{k+1})$.

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину x_{k+1}, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступило i, $k+1 \leq i \leq R-n+k$, заявок (с вероятностью $N_i\Delta$), первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$), первые $i-k$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $d(z, x_{k+1})$, на прибор встала $(i-k+1)$-я заявка длины x_1 (с плотностью вероятностей $b(x_1)$), остальные поступившие заявки длин $x_2, \ldots, x_k$ (с плотностью вероятностей $b(x_2)\cdots b(x_k)$) заняли первые места в очереди, затем встала заявка, обслуживаемая до прихода группы, и за ней встали остальные ранее находившиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n,i-k-1}(z)$).

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину x_{k+1}, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из i, $i \geq R-n+k+1$, заявок (с вероятностью $N_i\Delta$), первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$), первые $i-k$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $d(z, x_{k+1})$, на прибор встала $(i-k+1)$-я заявка длины x_1 (с плотностью вероятностей $b(x_1)$), остальные поступившие заявки длин $x_2, \ldots, x_k$ (с плотностью вероятностей $b(x_2)\cdots b(x_k)$) заняли первые места в очереди, затем встала заявка, обслуживаемая до прихода группы, и за ней встали остальные ранее находившиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n,r-n}$).

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину x_1, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(x_1, x_{k+2}, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из k заявок (с вероятностью $N_k\Delta$) длин $x_2, \ldots, x_{k+1}$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)\cdots b(x_k)$). Продолжилось обслуживание заявки, находящейся на приборе, поступившие заявки заняли первые места в очереди, за ними встали остальные ранее находившиеся в системе в очереди заявки (с вероятностью $1-d(x_2, x_1)$).

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(y, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступило $k+1$

заявок (с вероятностью $N_{k+1}\Delta$) длин $x_1, \dots x_{k+1}$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)\cdots b(x_{k+1})$. Заявка, находившаяся на приборе, покинула n^*-систему (с вероятностью $1-d(x_1,y)$), на прибор встала первая пришедшая заявка, остальные поступившие заявки заняли первые места в очереди, за ними встали остальные ранее находившиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n}(y)$).

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \le k \le n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \dots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(y, \dots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из i, $k+2 \le i \le R-n+k$, заявок (с вероятностью $N_i\Delta$), причем первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$). Заявка, находившаяся на приборе, и первые $i-k-1$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $1-d(z,y)$, на прибор встала $(i-k+2)$-я заявка длины x_1 (с плотностью вероятностей $b(x_1)$), остальные поступившие заявки длин $x_2, \dots, x_{k+1}$ (с плотностью вероятностей $b(x_2)\cdots b(x_{k+1})$) заняли первые места в очереди и за ними встали ранее находившиеся в системе в очереди заявки. Кроме того изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n,i-k-2}(z)$).

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \le k \le n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \dots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(y, \dots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из $R-n+k+1$ заявок (с вероятностью $N_{R-n+k+1}\Delta$), причем первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$). Заявка, находившаяся на приборе, и первые $R-n$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $1-d(z,y)$), на прибор встала $(R-n+1)$-я заявка длины x_1 (с плотностью вероятностей $b(x_1)$), остальные поступившие заявки длин $x_2, \dots, x_{k+1}$ (с плотностью вероятностей $b(x_2)\cdots b(x_{k+1})$) заняли первые места в очереди и за ними встали ранее находившиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n,r-n}(z)$).

в момент t в системе находилось $n-k$, $1 \le k \le n-1$, заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_{k+2}, \dots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_{n-k}(y, \dots, x_n)$), а за время Δ поступило i, $i \ge R-n+k+2$, заявок (с вероятностью $N_i\Delta$), причем первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$). Заявка, находившаяся на приборе, и первые $i-k-1$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $1-d(z,y)$), на прибор встала $(i-k+2)$-я заявка длины x_1 (с плотностью вероятностей $b(x_1)$), остальные поступившие заявки длин $x_2, \dots, x_{k+1}$ (с плотностью вероятностей $b(x_2)\cdots b(x_{k+1})$) заняли первые места в очереди и за ними встали ранее находившиеся в системе в очереди заявки. Кроме того, изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n,r-n}$).

в момент t в системе находилось n заявок, причем заявка на приборе имела длину $x_1+\Delta$, первая заявка в очереди имела длину $x_2, \dots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(x_1+\Delta, x_2, \dots, x_n)$), и за время Δ не поступали заявки (с вероятностью $I+\Lambda\Delta$).

в момент t в системе находилось n заявок, причем заявка на приборе имела длину x_1, первая заявка в очереди имела длину $x_2, \dots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(x_1, \cdots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из k, $1 \le k \le r-n+1$, заявок (с вероятностью $N_k\Delta$), причем первая заявка имела длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$). Все поступившие заявки покинули n^*-систему (с вероятностью $d(y,x_1)$, а заявка, находившаяся на приборе, продолжила обслуживание. Изменилась также фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n,k-1}(y)$).

в момент t в системе находилось n, заявок, причем заявка на приборе имела длину x_1, первая заявка в очереди имела длину $x_2, \dots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(x_1, \cdots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из k, $k \geq R-n+1$, заявок (с вероятностью $N_k\Delta$), причем первая заявка имела длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$). Все поступившие заявки покинули n^*-систему (с вероятностью $d(y, x_1)$, а заявка, находившаяся на приборе, продолжила обслуживание. Изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n,r-n}$).

в момент t в системе находилось n заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_2, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступила одна заявка (с вероятностью $N_1\Delta$) длины x_1 (с плотностью вероятностей $b(x_1)$). Заявка, находившаяся на приборе, покинула n^*-систему (с вероятностью $1 - d(x_1, y)$, а на прибор встала поступившая заявка. Кроме того изменяется фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n}(y)$).

в момент t в системе находилось n заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_2, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступила группа из k заявок (с вероятностью $N_k\Delta$), причем первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$). Заявка, находившаяся на приборе, и первые $k-1$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $1 - d(z, y)$), а на прибор встала последняя из поступивших заявок длины $b(x_1)$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)$). Кроме того изменилась фаза генерации новой заявки (с вероятностью $F_{r-n-k+1}(y)F_{k-2}(z)$).

в момент t в системе находилось n заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_2, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступило $r - n + 2$ заявок (с вероятностью $N_{r-n+2}\Delta$), причем первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$). Заявка, находившаяся на приборе, и первые $r - n + 1$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $1 - d(z, y)$), а на прибор встала последняя из поступивших заявок длины x_1 (с плотностью вероятностей $b(x_1)$). Кроме того, изменилась фаза генерации новой заявки (с матричной вероятностью $F_{r-n,r-n}(z)$).

в момент t в системе находилось n заявок, причем заявка на приборе имела длину y, первая заявка в очереди имела длину $x_2, \ldots$, последняя заявка в очереди имела длину x_n (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y, \ldots, x_n)$), а за время Δ поступило k, $k \geq r - n + 3$, заявок (с вероятностью $N_k\Delta$), причем первая заявка имела длину z (с плотностью вероятностей $b(z)$). Заявка, находившаяся на приборе, и первые $k-1$ заявок покинули n^*-систему (с вероятностью $1 - d(z, y)$), а на прибор встала последняя из поступивших заявок длины $b(x_1)$ (с плотностью вероятностей $b(x_1)$). Кроме того, изменилась фаза генерации новой заявки (с матричной вероятностью $F_{r-n,r-n}$).

Теперь по формуле полной вероятности получаем равенство

$$\vec{p}_n(x_1, \ldots, x_n) = b(x_1) \cdots b(x_n)\vec{p}_0\left(N_n\Delta + \sum_{k=n+1}^{r} N_k\Delta F_{r-n,k-n-1} + \tilde{N}_R\Delta F_{r-n,r-n}\right) +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b(x_1) \cdots b(x_k)\vec{p}_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)\Bigg(d(x_1, x_{k+1})N_k\Delta +$$

$$\sum_{i=k+1}^{R-n+k} \int_0^\infty b(z)d(z, x_{k+1})N_i\Delta F_{r-n,i-k-1}(z)\,dz + \int_0^\infty b(z)d(z, x_{k+1})\tilde{N}_{R-n+k+1}\Delta F_{r-n,r-n}dz\Bigg) +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b(x_2) \cdots b(x_{k+1})[1 - d(x_2, x_1)]\vec{p}_{n-k}(x_1, x_{k+2}, \ldots, x_n)N_k\Delta -$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b(x_1)\cdots b(x_{k+1}) \int_0^\infty \vec{p}_{n-k}(y, x_{k+2}, \ldots, x_n)\Bigg([1-d(x_1,y)]N_{k+1}\Delta F_{r-n}(y) +$$

$$\sum_{i=k+2}^{R-n+k} \int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_i \Delta F_{n-k+i-1}(y) F_{r-n,i-k-2}(z)\,dz +$$

$$\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_{R-n+k+1}\Delta F_{r-n,r-n}(z)\,dz +$$

$$\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]\tilde{N}_{R-n+k+2}\Delta F_{r-n,r-n} dz\Bigg) dy + \vec{p}_n(x_1+\Delta, \ldots, x_n)(I + \Lambda\Delta +$$

$$\vec{p}_n(x_1, \ldots, x_n) \int_0^\infty b(y) d(y, x_1)\left(\sum_{k=1}^{r-n+1} N_k \Delta F_{r-n,k-1}(y) + \tilde{N}_{r-n+2}\Delta F_{r-n,r-n}\right) dy +$$

$$b(x_1)\int_0^\infty \vec{p}_n(y, x_2, \ldots, x_n)\Bigg([1-d(x_1,y)]N_1\Delta F_{r-n}(y) +$$

$$\sum_{k=2}^{r-n+1} \int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_k\Delta F_{r-n-k+1}(y) F_{r-n,k-2}(z)\,dz +$$

$$\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_{r-n+2}\Delta F_{r-n,r-n}(z)\,dz \ + \int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]\tilde{N}_{r-n+3}\Delta F_{r-n,r-n} dz\Bigg) dy + o(\Delta).$$

Производя элементарные преобразования и устремляя Δ к нулю, приходим к уравнению (6). Уравнение (5) выводится аналогично уравнению (6).

Однако в большинстве случаев достаточно знать только $\vec{P}_n(x) = \vec{P}_n(x, \infty, \ldots, \infty)$, $1 \le n \le R$, — стационарные вероятности того, что в системе находится n заявок и остаточная длина заявки на приборе меньше x. Тогда $\vec{P}_n(x)$ имеют производные $\vec{p}_n(x) = \vec{P}'_n(x) = \vec{p}_n(x, \infty, \ldots, \infty)$. Интегрируя систему (6) по $x_2, \ldots, x_n$ в пределах от 0 до бесконечности, получим:

$$
\begin{aligned}
&\vec{p}_n{}'(x) = -b(x)\vec{p}_0\left(N_n + \sum_{k=n+1}^{r} N_k F_{r-n,k-n-1} + \tilde{N}_R F_{r-n,r-n}\right) - \\
&b(x)\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\infty \vec{p}_{n-k}(y)\left(d(x,y)N_k + \sum_{i=k+1}^{R-n+k}\int_0^\infty b(z)d(z,y)N_i F_{r-n,i-k-1}(z)\,dz + \right. \\
&\left.\int_0^\infty b(z)d(z,y)\tilde{N}_{R-n+k+1}F_{r-n,r-n}dz\right)dy - \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]\vec{p}_{n-k}(x)N_k - \\
&b(x)\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\infty \vec{p}_{n-k}(y)\left([1-d(x,y)]N_{k+1}F_{r-n}(y) + \right. \\
&\sum_{i=k+2}^{R-n+k}\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_i F_{n-k+i-1}(y)F_{r-n,i-k-2}(z)\,dz + \\
&\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_{R-n+k+1}F_{r-n,r-n}(z)\,dz + \\
&\left.\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]\tilde{N}_{R-n+k+2}F_{r-n,r-n}dz\right)dy - \vec{p}_n(x)\Lambda - \\
&\vec{p}_n(x)\int_0^\infty b(y)d(y,x)\left(\sum_{k=1}^{r-n+1} N_k F_{r-n,k-1}(y) + \tilde{N}_{r-n+2}F_{r-n,r-n}\right)dy - \\
&b(x)\int_0^\infty \vec{p}_n(y)\left([1-d(x,y)]N_1 F_{r-n}(y) + \right. \\
&\sum_{k=2}^{r-n+1}\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_k F_{r-n-k+1}(y)F_{r-n,k-2}(z)\,dz + \\
&\left.\int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]N_{r-n+2}F_{r-n,r-n}(z)\,dz + \int_0^\infty b(z)[1-d(z,y)]\tilde{N}_{r-n+3}F_{r-n,r-n}dz\right)dy.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Начальное условие для уравнения (7) определяется предельным соотношением

$$\lim_{x\to\infty}\vec{p}_n(x) = \vec{0}.$$

Постоянная, с точностью до которой решаются уравнения (4), (5), (7), находится из условия нормировки.

5. СТАЦИОНАРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ПОТЕРИ

Пусть α_1–стационарная вероятность потери произвольной заявки при поступлении новой группы заявок. Тогда для того чтобы произвольная заявка из поступившей группы потерялась при поступлении, необходимо выполнение одного из следующих условий:

если в системе отсутствуют заявки (с вероятностью $\vec{p}_0$), поступает группа из k, $k > R$, заявок (с интенсивностью N_k) и первые $k - R$ заявки теряются;

если в системе n, $0 < n < R+1$, заявок и заявка на приборе имеет остаточную длину y (с вероятностью $\vec{p}_n(y)$), поступает группа из k, $k > R - n$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имеет длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$) и первые $k-R+n$ заявки теряются (с вероятностью $d(x,y)$);

если в системе n, $0 < n < R+1$, заявок и заявка на приборе имеет остаточную длину y (с вероятностью $\vec{p}_n(y)$), поступает группа из k, $k > R - n$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имеет длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$) и первые $k - R + n - 1$ заявки теряются (с вероятностью $1 - d(x,y)$).

Отсюда получаем следующее уравнение:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda}\Bigg[\vec{p}_0 \sum_{k=R+1}^{\infty} N_k(k-R) +$$

$$\sum_{n=1}^{R} \int_0^{\infty} \vec{p}_n(y) \sum_{k=R-n+1}^{\infty} N_k \Bigg((k-R+n) \int_0^{\infty} d(x,y) b(x)\, dx +$$

$$(k-R+n-1) \int_0^{\infty} [1-d(x,y)] b(x)\, dx \Bigg) dy\Bigg] \vec{1}.$$

Пусть α_2 — стационарная вероятность потери принятой в систему заявки. Учитывая, что заявка, принятая в систему, может быть потеряна недообслуженной только с прибора (это происходит при поступлении в систему группы новых заявок (с интенсивностью N_k), когда не для всех новых заявок “хватает” места в системе, то заявка с прибора и новые заявки, которым не досталось места покидают систему (с вероятностью $1-d(x,y)$), получим следующее выражение для вероятности α_2:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\lambda(1-\alpha_2)} \Bigg(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \vec{p}_n(y) \sum_{k=R-n+1}^{\infty} N_k [1-d(x,y)] b(x)\, dx\, dy \Bigg) \vec{1}.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена однолинейная СМО с групповым марковским входящим потоком, ограниченным накопителем, произвольным распределением времени обслуживания заявки и дисциплиной обслуживания LCLS PP. Получены формулы для вычисления основных стационарных показателей функционирования системы, связанных с распределением очереди. Полученные соотношения могут быть использованы для написания программы вычисления стационарных вероятностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагоненко В.А. О характеристиках одной нестандартной системы массового обслуживания. I *Изв. АН СССР. Технич. кибернет.* 1981, № 1, стр. 187–195.
2. Нагоненко В.А. О характеристиках одной нестандартной системы массового обслуживания. II *Изв. АН СССР. Технич. кибернет.* 1981, № 3, стр. 91–99.
3. Нагоненко В.А., Печинкин А.В. О большой загрузке в системе с инверсионным обслуживанием и вероятностным приоритетом. *Изв. АН СССР. Технич. кибернет.* 1982, № 1, стр. 86–94.

4. Нагоненко В.А., Печинкин А.В. О малой загрузке в системе с инверсионным обслуживанием и вероятностным приоритетом. *Изв. АН СССР. Технич. кибернет.* 1984, № 6, стр. 86–94.

5. Печинкин А.В. Об одной инвариантной системе массового обслуживания. *Math. Operationsforsch. und Statist. Ser. Optimization*, 1983, vol. 14, № 3, s. 433–444.

6. Печинкин А.В., Свищева Т.А. Система $MAP/G/1/r$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом. *Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика*, 2000, № 1, стр. 119–143.

7. Печинкин А.В., Свищева Т.А. Система $MAP/G/1/\infty$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом. *Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика*, 2003, № 1, стр. 109–118.

8. Таташев О.Г. Одна инверсионная дисциплина обслуживания в системе с групповым поступлением. *Автоматика и вычисл. техника*, 1995, № 1, стр. 53–59.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И.Венец