

Математическое моделирование поверхностного стока и переноса загрязнений¹

В.Г.Гитис, Е.Н.Петрова, С.А.Пирогов, Е.Ф.Юрков

Институт проблем передачи информации, Российская Академия наук, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 20.04.2007

Аннотация—Моделирование природных и техногенных процессов в разнообразных геоморфологических условиях является одним из основных средств прогнозирования и предупреждения неблагоприятного развития экологического состояния городской среды. Одной из причин, ухудшающих экологию города, является загрязнение городской территории. Настоящая работа посвящена математическому моделированию распространения загрязнений, переносимых с водой. Модель весьма сложного процесса распространения загрязнений представляется в виде совокупности четырёх более простых моделей, а именно: поверхностного стока воды, просачивания её в почву, переноса загрязнителя с поверхностным стоком и осаждения (аккумуляции) загрязнителя на поверхности почвы. Модель основана на использовании уравнения диффузии, содержащего дополнительные слагаемые в правой части: одно из них отражает влияние рельефа местности, а другое, зависящее от литологической структуры территории, задает интенсивность поглощения загрязнений поверхностью почвы. Это уравнение выполняется в двумерной области, физически соответствующей участку поверхности, покрытому водой. И форма границы, и топология этой области меняются со временем (поскольку появляются "острова" сухой поверхности, окруженные водой).

1. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование природных и техногенных процессов в разнообразных геоморфологических условиях является одним из основных средств прогнозирования и предупреждения неблагоприятного развития экологического состояния городской среды. Одной из причин, ухудшающих экологию города, является загрязнение городской территории. Настоящая работа посвящена математическому моделированию распространения загрязнений, переносимых с водой. Существует несколько альтернативных подходов к моделированию распространения загрязнений, взвешенных или растворённых в воде. Один класс моделей предполагает возможность численного решения уравнений двумерной или трёхмерной гидродинамики (уравнений Сен-Венана или Навье-Стокса) с последующим моделированием распространения загрязнений вдоль линий тока полученного решения [1, 2]. Однако численное моделирование поведения решений двумерной и тем более трёхмерной гидродинамики представляет значительные трудности [3, 4]. Кроме того, в двумерном случае возникает необходимость экспериментальной оценки коэффициента трения (коэффициента Маннинга), который определяется свойствами шероховатости поверхности дна, а также зависит от характера течения — ламинарного, турбулентного или сверх-турбулентного (струйного) [5]. Поскольку заранее определить характер течения затруднительно, то возникает необходимость выбора адекватной модели для каждой экспериментальной ситуации, что представляет дополнительную трудность. Другой класс моделей (более простой с математической точки зрения) основан на использовании уравнений

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 04-07-90155.

диффузионного типа, т.е. линейных параболических уравнений второго порядка. Эти уравнения используются, например, для описания распространения примесей в больших массивах воды с подводными течениями. При этом считается известным (стационарное) поле скоростей воды и матрица коэффициентов диффузии [6]. Имеется достаточно много работ, в которых рассматриваются процессы диффузионного распространения загрязнителей, растворённых в подземных водах (см. [7] и приведённые там ссылки). Однако этот класс моделей непосредственно не применим для описания распространения загрязнений с поверхностным стоком, поскольку не учитывается влияние рельефа. Поэтому мы рассматриваем модель, описываемую нелинейным уравнением, которое превращается в уравнение диффузии только в том случае, когда слой воды достаточно глубок. Если же глубина слоя мала, то перенос загрязнения происходит строго вдоль линий тока воды. Таким образом, мы "сшиваем" два уравнения, каждое из которых выполняется в своей (зависящей от времени) области; одно из них является диффузионным, а другое — уравнением переноса в заданном направлении. При этом само направление меняется со временем, т.е. течение воды не является стационарным. Чтобы упростить решение поставленной задачи, модель весьма сложного процесса распространения загрязнений представляется в виде совокупности четырёх более простых моделей, а именно: поверхностного стока воды, просачивания её в почву, переноса и осаждения (аккумуляции) загрязнителя на поверхности почвы. Описание предлагаемых ниже моделей начнём с изложения физических предпосылок модели поверхностного стока.

2. МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА ВОДЫ

Жидкость, находящаяся в неравновесном состоянии, стремится выровнять свой поверхностный уровень под действием силы тяжести и гидравлического давления. Перемещаясь от более высокого к более низкому уровню, жидкость прекращает своё течение, когда уровень её поверхности становится горизонтальным. Найдём силу, действующую в результате двух указанных причин (тяжести и давления) на элемент жидкости. Пусть $H = H(x, y)$ — (абсолютный) уровень поверхности воды в какой-либо момент времени. Гидростатическое давление в точке с координатами x, y, z определяется высотой столба жидкости $H - z$ над этой точкой и равно $p = p(x, y, z) = p_0 + \rho g(H - z)$, где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Потенциальная энергия единицы объёма жидкости равна $\varphi = \varphi(x, y, z) = \rho g z$. Заметим, что сумма $p + \varphi = p_0 + \rho g H(x, y)$ не зависит от вертикальной координаты. В гидростатическом приближении сила, действующая на единичный объём жидкости, записывается через градиенты полей p и φ (см., например, [8]): $\mathbf{F} = -\nabla p - \nabla \varphi$. Поэтому

$$\mathbf{F} = -\rho g \nabla H, \quad (1)$$

где $\nabla H = \nabla H(x, y) = (\partial H / \partial x, \partial H / \partial y)$. Таким образом, сила, действующая на элемент жидкости, пропорциональна (со знаком минус) градиенту поверхностного уровня воды, параллельна горизонту и не меняется по высоте, т.е. поле сил \mathbf{F} , по существу, двумерно. При перемещении на элемент жидкости действует направленная против движения сила сопротивления \mathbf{F}_v . Примем прямо пропорциональную зависимость этой силы от скорости жидкости \mathbf{v} , $\mathbf{F}_v = -k\mathbf{v}$ (k — коэффициент пропорциональности). Считая, что две эти силы уравновешивают друг друга ($\mathbf{F} + \mathbf{F}_v = \mathbf{0}$), т.е. пренебрегая ускорением движения жидкости, имеем $\mathbf{F} = k\mathbf{v}$, поэтому с учётом (1)

$$\mathbf{v} = -(\rho g / k) \nabla H.$$

Будем считать, что с такой скоростью течёт только поверхностный слой воды глубиной λ , составляющий некоторую часть от полной глубины $h = h(x, y)$, а лежащий ниже слой воды (глубиной $h - \lambda$) остаётся неподвижным. Рассмотрим площадку прямоугольной формы с единичным основанием, опирающимся на дно, и произвольной, однако большей, чем h высотой.

Плоскость прямоугольной площадки параллельна оси z и перпендикулярна скорости течения. Введём вектор потока воды $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{v}$, величина которого равна объёму воды, протекающему за единицу времени через прямоугольную площадку; направление потока \mathbf{j} совпадает с направлением скорости \mathbf{v} . Обозначая $D = \lambda \rho g / k$, имеем

$$\mathbf{j} = -(\lambda \rho g / k) \nabla H = -D \nabla H. \quad (2)$$

Таким образом, поток оказывается пропорциональным ∇H . Выражение вида (2) возникает в различных физических задачах, например, в термодинамике оно описывает связь между тепловым потоком и температурой, а в статистической механике — процесс диффузии частиц. Здесь это выражение будет рассматриваться как модель потока для достаточно больших глубин h , так как для малых значений h , как будет ясно из дальнейшего, оно нуждается в корректировке.

Из выражения (2) следует, что величина средней скорости потока равна

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{j}}{h} = -\frac{D}{h} \nabla H \quad (3)$$

и поэтому при малых значениях h она оказывается произвольно большой, что противоречит физике стока. Чтобы избежать этого противоречия, скорректируем это уравнение. Введём в качестве множителя в правую часть уравнения (3) монотонную функцию $f(h)$ с условиями $f(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $f(h) \rightarrow 1$ при $h \rightarrow \infty$ такую, чтобы при малых h произведение сомножителей оказалось бы константой. Для уточнения терминов "малые" и "большие" значения h заметим, что при выводе уравнения (2) мы исходили из естественного условия $h > \lambda$. Для равнинного поверхностного стока величина ∇H не может иметь больших значений, поэтому принимается условие $\nabla H < 1$, откуда следует неравенство $h > \lambda |\nabla H|$. Последнее неравенство определяет область "больших" значений h ; соответственно "малыми" считаются значения h , отвечающие противоположному неравенству.

Из бесконечного разнообразия функций $f(h)$, удовлетворяющих сформулированным условиям, мы выбрали монотонно неубывающую, линейно растущую при малых h функцию вида

$$f(h) = \min\left(\frac{h}{\lambda |\nabla H|}, 1\right) = \begin{cases} \frac{h}{\lambda |\nabla H|}, & h \leq \lambda |\nabla H|, \\ 1, & h > \lambda |\nabla H|. \end{cases}$$

Скорректированная средняя скорость потока оказывается тогда равной

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -f(h) \frac{D}{h} \nabla H = -D \min\left(\frac{|\nabla H|}{h}, \frac{1}{\lambda}\right) \frac{\nabla H}{|\nabla H|}, \quad (4)$$

т.е. при малых h величина средней скорости потока равна константе $c = D/\lambda$, а при больших h совпадает с (3). Для любых h направление потока противоположно направлению вектора ∇H . С учётом сделанной корректировки модель вектора потока принимает вид:

$$\mathbf{j} = -\min(D|\nabla H|, ch) \frac{\nabla H}{|\nabla H|}. \quad (5)$$

Для описания движения потока воды при условии, что нет внешних источников её поступления, используем дифференциальную форму уравнения неразрывности несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}) = -\partial h / \partial t, \quad (6)$$

где $\operatorname{div}(\mathbf{j}) = \partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y$ — дивергенция "плоского" потока \mathbf{j} . Применительно к нашей модели это уравнение можно проинтерпретировать, рассмотрев воображаемый прямоугольный

цилиндр произвольной (но большей, чем h) высоты, опирающийся на дно своим основанием с единичной площадью. Тогда уравнение (6) означает, что скорость истечения жидкости из цилиндра (левая часть уравнения) должна равняться скорости уменьшения количества жидкости в нём (правая часть).

Поток воды перемещается по твёрдой поверхности, высоту которой обозначим R (Рис. 1).

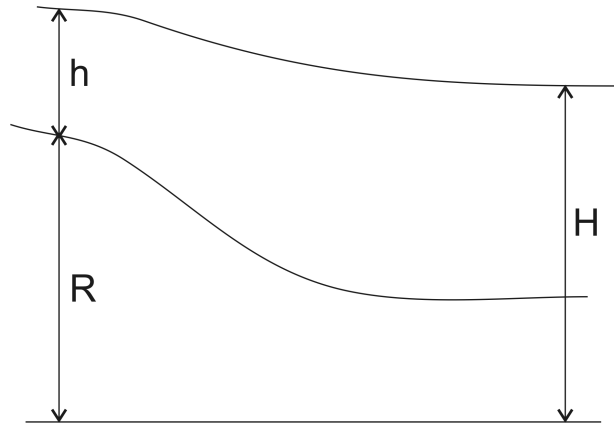


Рис. 1. Вода над твердой поверхностью. R — абсолютная высота рельефа, H — абсолютная высота поверхности воды, h — глубина водного слоя.

Так как абсолютная высота H и глубина h уровня воды связаны с высотой рельефа R соотношением $H(x, y, t) = h(x, y, t) + R(x, y)$, то $\partial H/\partial t = \partial h/\partial t$ и уравнение (6) с учётом (5) можно записать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\min \left(D, \frac{c}{|\nabla H|} h \right) \nabla H \right). \quad (7)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (7) описывает изменение уровня воды H во времени и пространстве. Не вдаваясь в детали, укажем способ численного решения уравнения (7), основанный на разностной аппроксимации правой части этого уравнения. Наложим на рассматриваемую территорию сетку с квадратной ячейкой. Пять ячеек такой сетки изображены на Рис. 2. Предлагаемая аппроксимация окажется тем точнее, чем меньше размер ребра ячейки d . Найдём дивергенцию поля (т.е. правую часть уравнения (7)) в точке (x, y) , вычислив поток жидкости через границы центральной ячейки, показанной на рисунке.

Введем следующие обозначения: k — номер ребра центральной ячейки ($k = 1, \dots, 4$), \mathbf{j}_k — вектор потока поля \mathbf{j} в средней точке k -го ребра, ∇H_k — градиент поля H в этой точке, H_0 и H_k — уровни воды в центральной и соседней ячейке со стороны k -го ребра. Для малого d поток вектора поля \mathbf{j} через k -е ребро равен скалярному произведению $\Phi_k = (\mathbf{j}_k \cdot \mathbf{e}_k)$, где \mathbf{e}_k — вектор длины d , направленный из центральной ячейки перпендикулярно k -му ребру (см. Рис. 2). Аналогично, поток векторного поля ∇H через то же ребро равен $(\nabla H_k \cdot \mathbf{e}_k)$, что можно аппроксимировать разностью $H_k - H_0$. С учётом (5) имеем разностную аппроксимацию потока

$$\Phi_k = -\min(D|\nabla H_k|, ch_k) \frac{H_k - H_0}{|\nabla H_k|}. \quad (8)$$

В этом выражении h_k — высота столба жидкости в той их двух соседних ячеек, где уровень воды H больше (это соглашение позволяет избежать отрицательных значений h при моделировании); для оценки модуля $|\nabla H_k|$ можно воспользоваться сглаженной разностной аппроксимацией градиента.

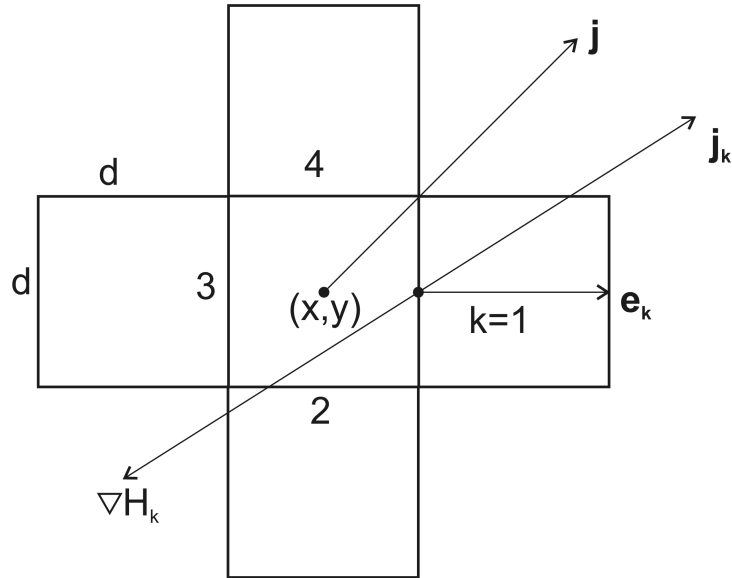


Рис. 2. Сетка с квадратной ячейкой. k — номер ребра, d — размер ребра, j_k — вектор поля j на k -м ребре ячейки, H_k — градиент скалярного поля H на k -м ребре ячейки, e_k — вектор длины d , перпендикулярный k -му ребру ячейки

Полный поток из центральной ячейки $\Phi = \sum_{k=1}^4 \Phi_k$. Поскольку дивергенция есть суммарный поток из единичной ячейки, находим искомую аппроксимацию правой части (7) в точке (x, y) :

$$\operatorname{div} j = \frac{1}{d^2} \Phi = -\frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^4 \min(D |\nabla H_k|, ch_k) \frac{H_k - H_0}{|\nabla H_k|}. \quad (9)$$

Заменяя левую часть (7) отношением $(H(t+\tau) - H(t))/\tau$, получим разностную аппроксимацию уравнения (7) в виде

$$H(t + \tau) = H(t) - a \sum_{k=1}^4 \min(d |\nabla H_k|, bh_k) \frac{H_k - H_0}{d |\nabla H_k|} \quad (10)$$

с безразмерными коэффициентами $a = \tau D/d^2$ и $b = cd/D$. Выражение (10) представляет собой реализацию численного метода решения уравнения (7), когда последовательно вычисляются конфигурации поля $H = H(x, y, t)$ для дискретных точек пространственно-временной сетки размером $(d \times d \times \tau)$. Теоретический анализ показал, что коэффициенты a и b должны удовлетворять неравенствам $a \leq 1/4$, $ab \leq 1/4$, чтобы избежать неустойчивых решений. Как показали эксперименты, при нарушении этих условий возникает процесс автоколебаний, что проявляется в виде ложных поверхностных волн, которые с течением времени могут нарастать.

3. МОДЕЛЬ ПРОСАЧИВАНИЯ ВОДЫ В ПОЧВУ

Рассмотренная выше модель поверхностного стока воды не учитывает эффекта её просачивания в почву, который существенно влияет на характер распространения загрязнения. Мы рассматриваем две разновидности модели просачивания (фильтрации) воды в почву.

Модель экспоненциальной фильтрации. Согласно этой модели, скорость фильтрации воды $v_f(t)$ пропорциональна глубине $h(t)$ в каждый момент времени, т.е. $\partial h(t)/\partial t = -\beta h(t)$,

что эквивалентно уравнению $h(t) = h(0)e^{-\beta t}$. Коэффициент пропорциональности β (показатель затухания экспоненциального процесса) зависит от свойств почвы и может изменяться от ячейки к ячейке. Показатель β , начальный уровень воды $h(0)$ и начальная скорость фильтрации $v_f(0)$ связаны соотношением: $\beta = v_f(0)/h(0)$. Заменив t на $t + \tau$, получим рекуррентную форму записи этого процесса:

$$h(t + \tau) = h(t)e^{-\beta\tau}.$$

Модель линейной фильтрации. В рамках этой модели скорость фильтрации не меняется со временем, обозначим ее v_{f0} . Процесс фильтрации линеен, $h(t) = h(0) - v_{f0}t$, и длится $h(0)/v_{f0}$ единиц времени. Рекуррентная запись этого процесса имеет вид

$$h(t + \tau) = h(t) - v_{f0}\tau.$$

При моделировании рассматриваемых здесь процессов скорости просачивания задавались в виде полей. Пример поля скоростей просачивания воды в почву дан на Рис. 6.

4. МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА И АККУМУЛЯЦИИ ЗАГРЯЗНИТЕЛЯ

Мы предполагаем, что загрязнитель находится во взвешенном состоянии в воде, и в ходе поверхностного стока часть взвешенного в воде загрязнителя выпадает в осадок и оседает на поверхности почвы, не проникая вглубь. Мы предполагаем также, что

- частицы взвешенного в воде загрязнителя переносятся с той же скоростью, что и содержащая их вода (так называемый пассивный перенос),
- выпавший в осадок и осевший на поверхности почвы загрязнитель никуда в дальнейшем не перемещается,
- концентрация взвешенного в воде загрязнителя не меняется вдоль вертикальной координаты.

Опишем динамику переноса загрязнителя, не учитывая пока процесс образования осадка. Обозначим через G количество загрязнителя, находящегося в виде взвеси в столбе воды высотой h над данным единичным элементом площади в данный момент времени. Соответствующая концентрация загрязнителя в этом месте равна $g = G/h$. Характер переноса загрязнения опишем (векторным) полем потока загрязнения $\mathbf{j}_G = g\mathbf{j}$. Вектор потока загрязнения \mathbf{j}_G направлен по течению воды и равен по величине количеству загрязнителя, переносимому с водой за единицу времени через единичную границу перпендикулярно течению. Точно так же, как и функция h в уравнении неразрывности (4), функция G удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_G) = -\partial G/\partial t, \quad (11)$$

левая часть которого, как и для жидкости, является двумерной дивергенцией векторного поля \mathbf{j}_G . Конечно-разностную аппроксимацию уравнения переноса (11) можно получить очевидным видоизменением уравнений (8)–(10). Для этого поток жидкости Φ_k через ребро квадратной ячейки в выражении (8) следует заменить потоком загрязнения, умножив Φ_k на соответствующую величину концентрации загрязнителя g .

Опишем теперь динамику переноса с учётом процесса аккумуляции загрязнителя. В рассматриваемой нами модели процесс осаждения загрязнителя увязывается с процессом просачивания воды в почву. Считается, что в осадок переходит всё то количество взвешенного загрязнителя, которое содержится в объёме отфильтрованной части воды. Кроме того, дополнительно допускается, что независимо от процесса фильтрации часть взвешенного загрязнителя осаждаётся под действием собственной тяжести со скоростью v_r . Используя для скорости

просачивания воды обозначение v_f , получим, что количество оседающего за время τ загрязнителя в расчёте на единичную площадь равно $g(v_f + v_r)\tau$. На эту величину уменьшается количество взвешенного в воде загрязнителя G , поэтому динамика величины G с учётом процесса осаждения описывается уравнением

$$G(t + \tau) = G(t) - g(t)(v_f + v_r)\tau,$$

где величина G находится в свою очередь из уравнения переноса. Схематическая связь между рассмотренными выше процессами (поверхностный сток, просачивание, перенос и аккумуляция загрязнителя) показана на Рис. 3.

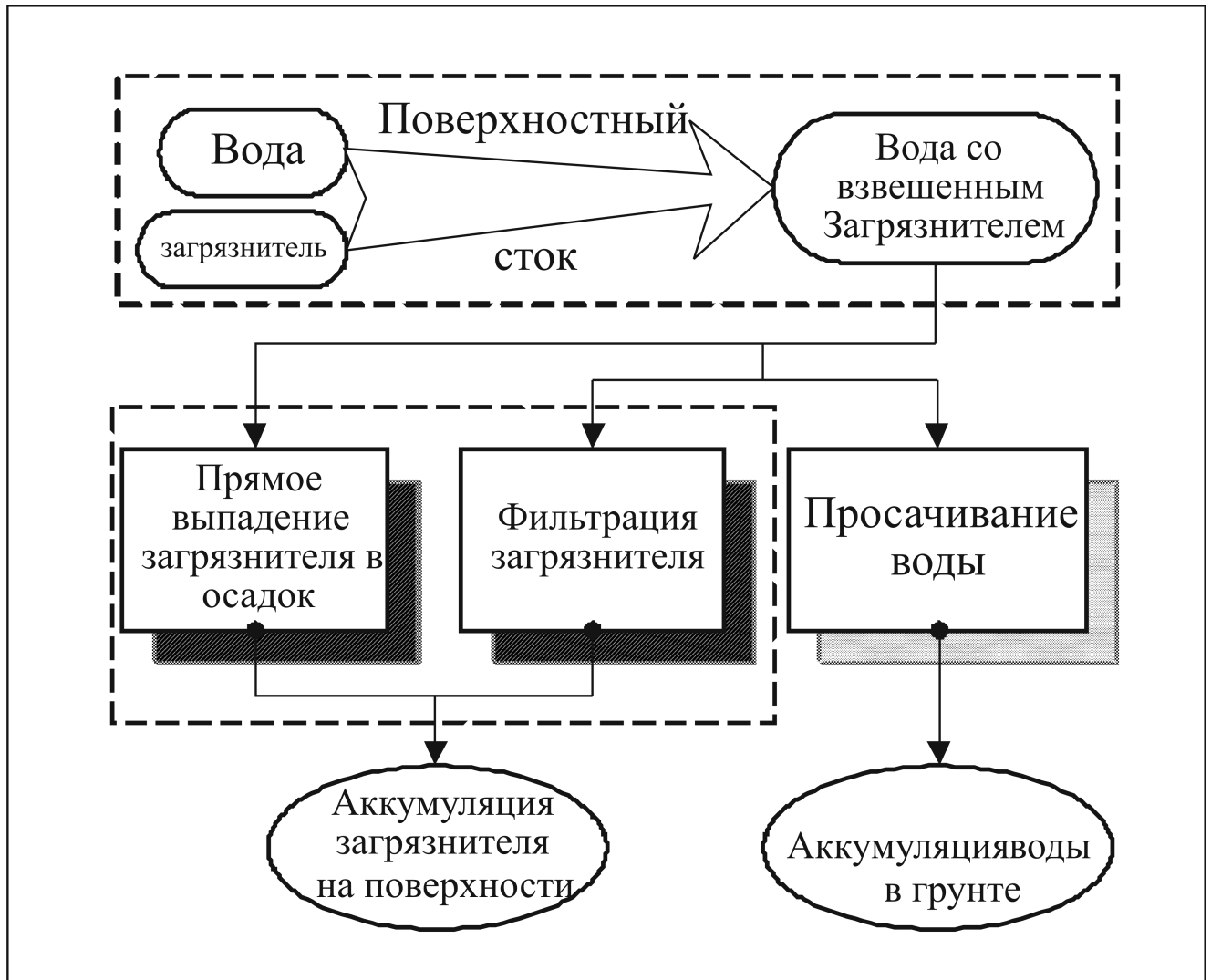


Рис. 3. Схематическая модель распространения загрязнения

5. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование процесса распространения загрязнения на основе описанной выше совокупности уравнений производилось с помощью специализированного пакета программ, написанного на языке Matlab, и системы Геопроцессор [9]. Карта территории, выбранной для моделирования (северо-западный участок г. Москвы — бассейн р. Ходынки), показана на Рис. 4. Цифровая модель рельефа этой территории (построенная на основе квадратной ячейки размера $d = 250\text{м}$ [10]) изображена на Рис. 5а (двумерный) и 5б (трёхмерный вариант). Используемые при моделировании скорости просачивания воды в почву даны на Рис. 6. Величины начального уровня воды, концентрации взвешенного в воде загрязнителя и скорости прямого выпадения загрязнителя в осадок варьировались в процессе моделирования.

Результаты моделирования, полученные на разных стадиях рассматриваемого процесса, представлены в виде полей и показаны на Рис. 7–9. Поля, изображённые на Рис. 7, получены как результат расчёта алгоритма (10) (с параметрами алгоритма $a = 1/4, b = 1$) и соответствуют начальной (Рис. 7а) и завершающей (Рис. 7б) фазам поверхностного стока. Они иллюстрируют процесс поверхностного стока воды с первоначально равномерным её распределением по территории без учёта просачивания воды в почву. На Рис. 8 приведена карта распределения осевшего загрязнителя в завершающей стадии процесса. На Рис. 9 приводится карта распределения количества просочившейся воды по окончании процесса стока. Начальные условия, при которых получены эти карты: слой воды, равномерно покрывающий территорию, равен 20 см, концентрация загрязнителя в воде — 100 условных единиц, принята модель фильтрации линейного типа, скорость прямого выпадения загрязнителя в осадок равна 2 м/сутки.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана модель распространения загрязнений, переносимых с водой, описывающая совокупность процессов поверхностного стока воды, просачивания её в почву, перемещения и аккумуляции загрязнителя.
2. Предложена математическая модель поверхностного стока, основанная на уравнении "плоского" потока, и численный метод его решения.
3. Получены карты просочившейся в почву воды и аккумуляированного на поверхности почвы загрязнителя для выбранного полигона (северо-западный участок района г. Москвы).

Авторы признательны Лихачевой Э.А. за консультации и данные, предоставленные для моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Е.Д., Хоперсков А.В. Моделирование динамики загрязнений. *Поволжский экономический вестник*, 1997, вып. 4, стр. 83–87.
2. Смирнов Е.Д., Хоперсков А.В. Компьютерное моделирование распространения примесей. *Вестник ВолГУ*, 1997, сер. мат.-физ., вып. 2, стр. 159–163.
3. Кивва С.Л., Железняк М.И. Численное моделирование двумерного открытого потока. *Труды RДАММ*, 2001, т. 6, ч. 2, стр. 343–350.
4. Zhang W., Cundy T.W. Modelling of Two-dimensional Overland Flow. *Water Resources Research*, 1989, vol. 25, № 9, pp. 2019–2035.
5. *Гидрогеологическое прогнозирование*. Под ред. М.Г. Андерсона, Т.П. Берта. М.: Мир, 1988.
6. Bear J., Vervnyit A. *Modelling Groundwater Flow and Pollution*. Reidel, 1987.
7. Van Herwaarden O.A., Grasman J. Dispersive Groundwater Flow and Pollution. *Math. Models & Methods in Appl. Sciences*, 1991, vol. 1, № 1, pp. 61–68.



Рис. 4. Северо-западный участок г. Москвы, рельеф территории которого использовался при моделировании процесса загрязнения

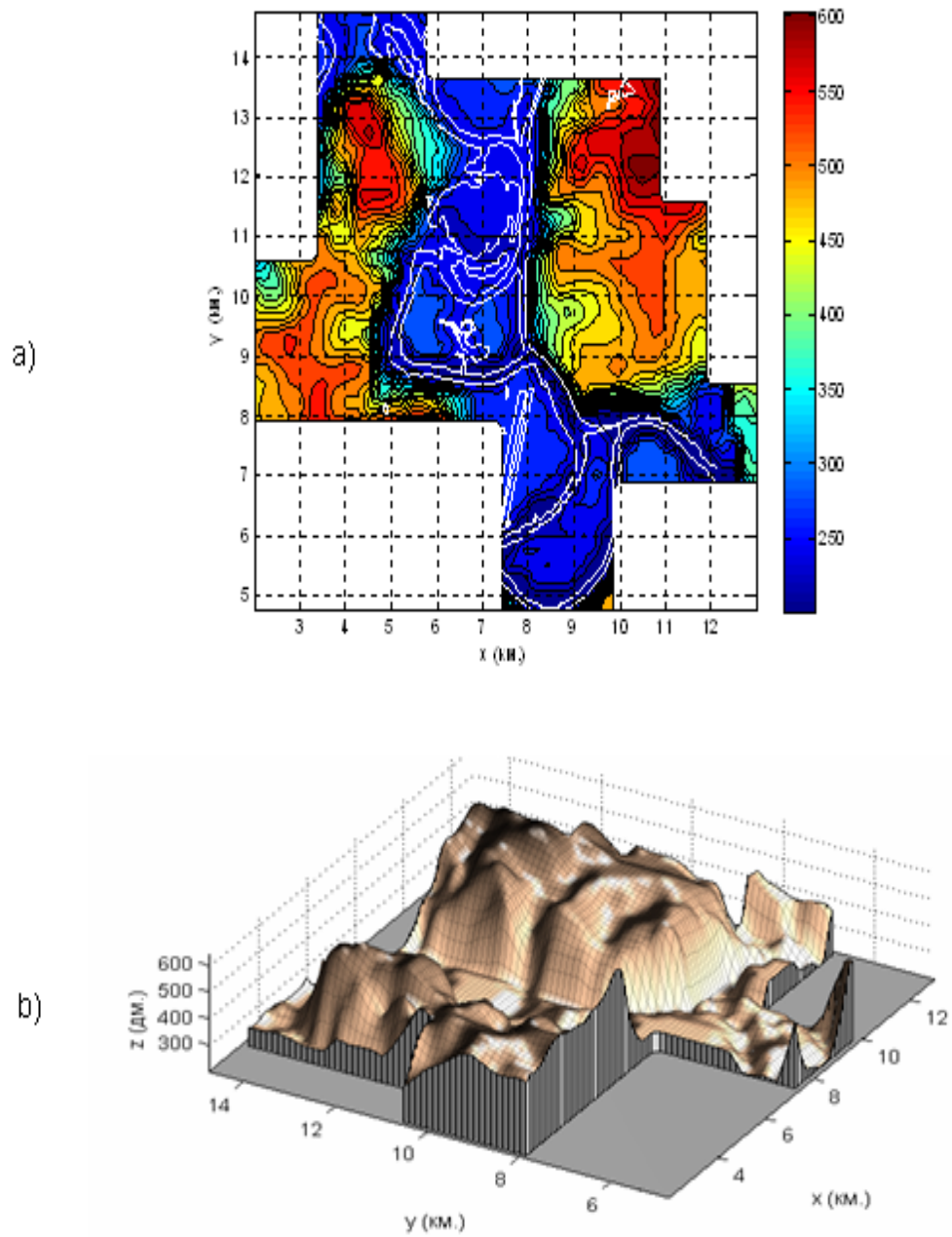


Рис. 5. Двумерная (а) и трехмерная (б) модели рельефа

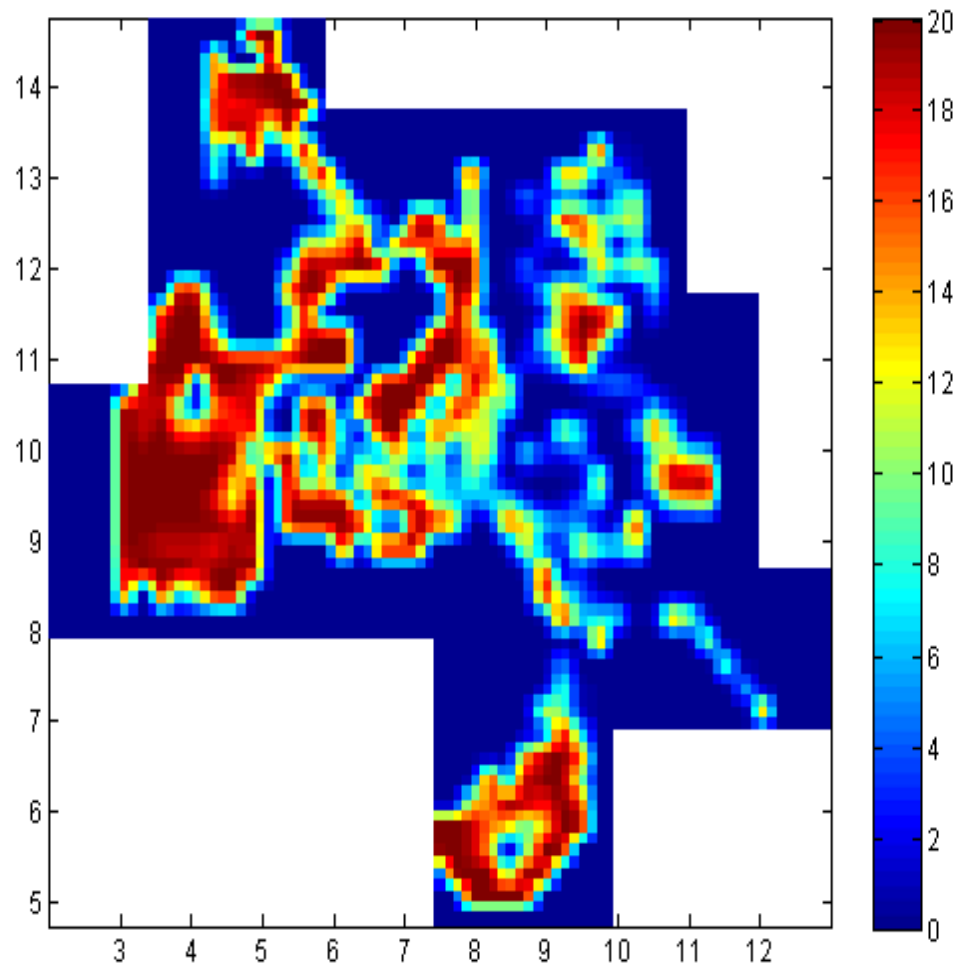


Рис. 6. Карта скоростей просачивания воды в почву, м/сут

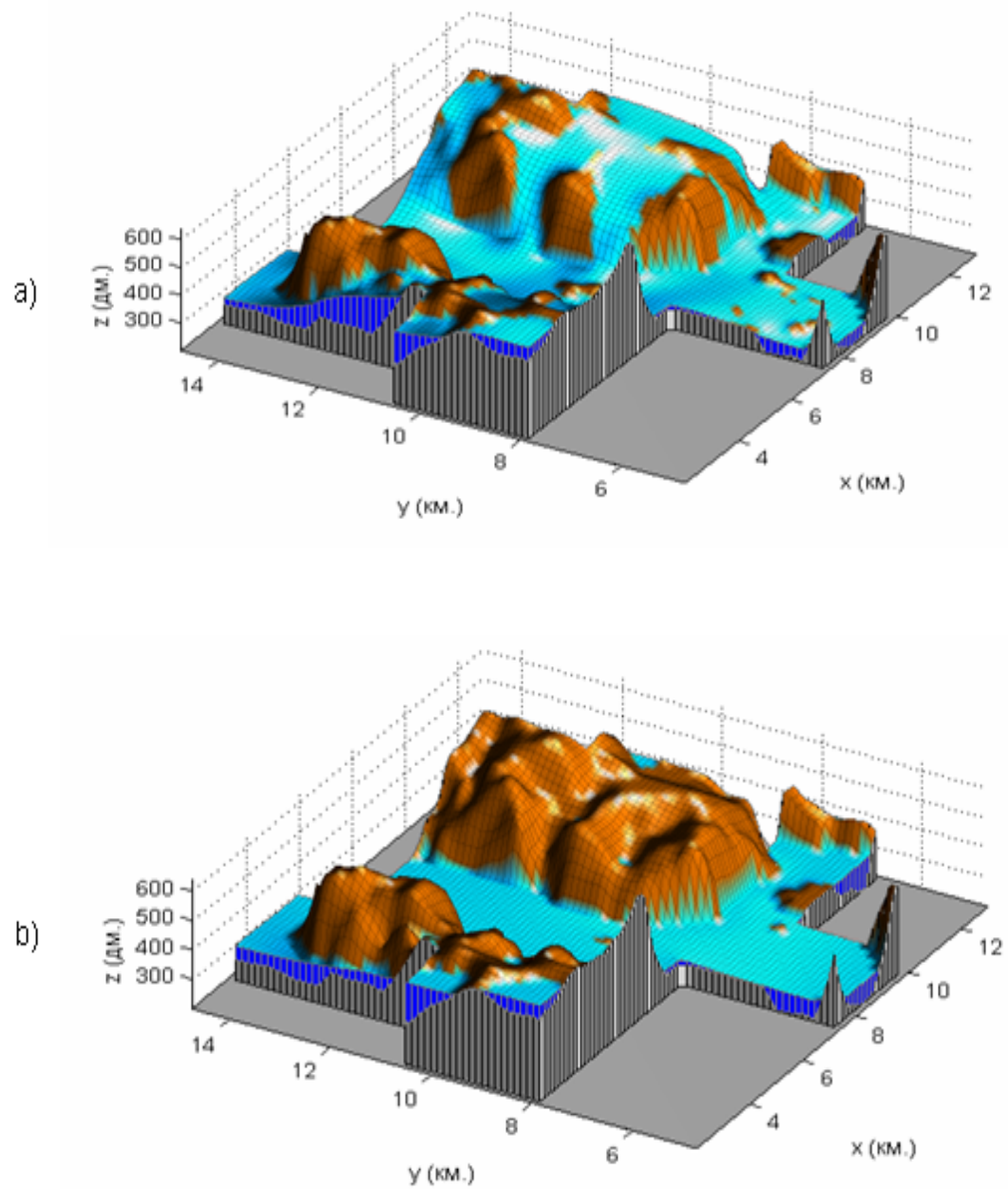


Рис. 7. Начальная (а) и завершающая (б) стадии поверхностного стока

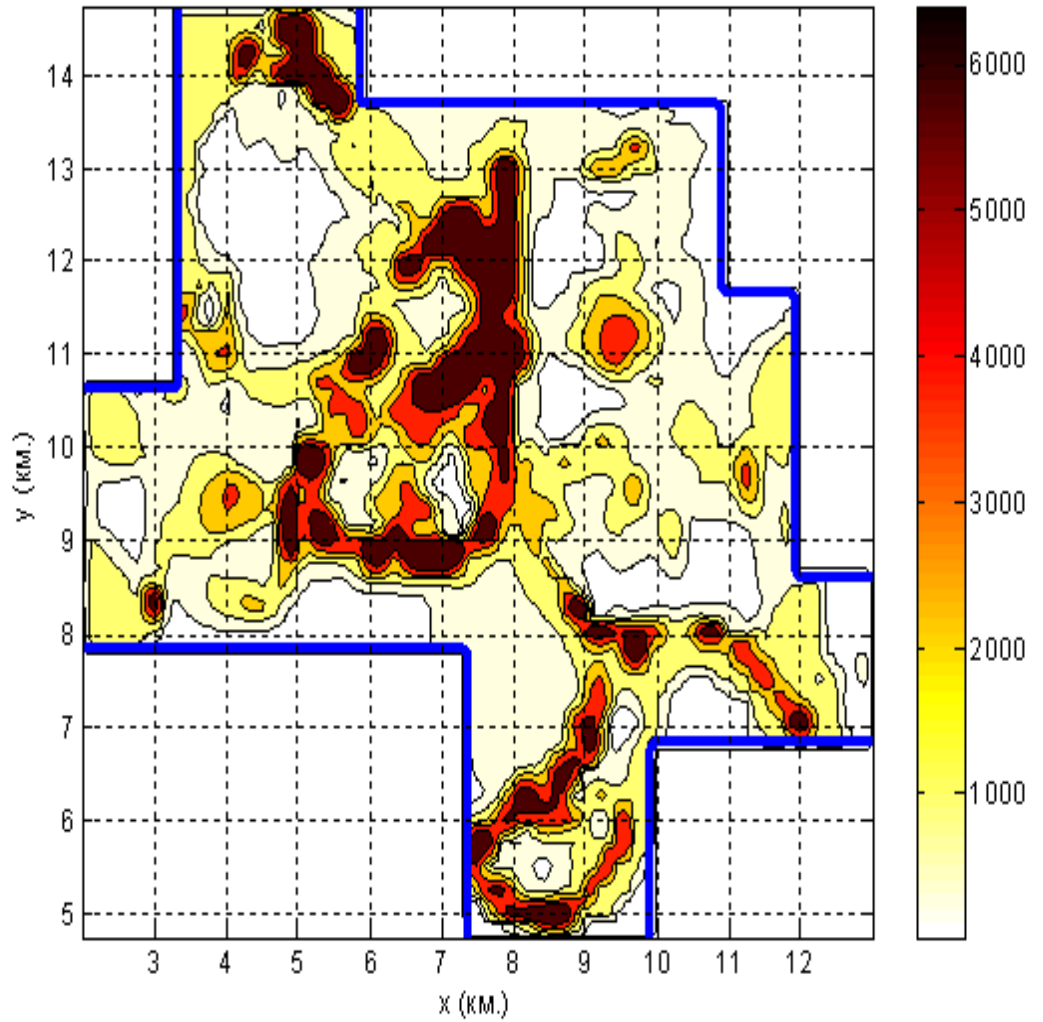


Рис. 8. Распределение ошевшего загрязнителя (в условных единицах)

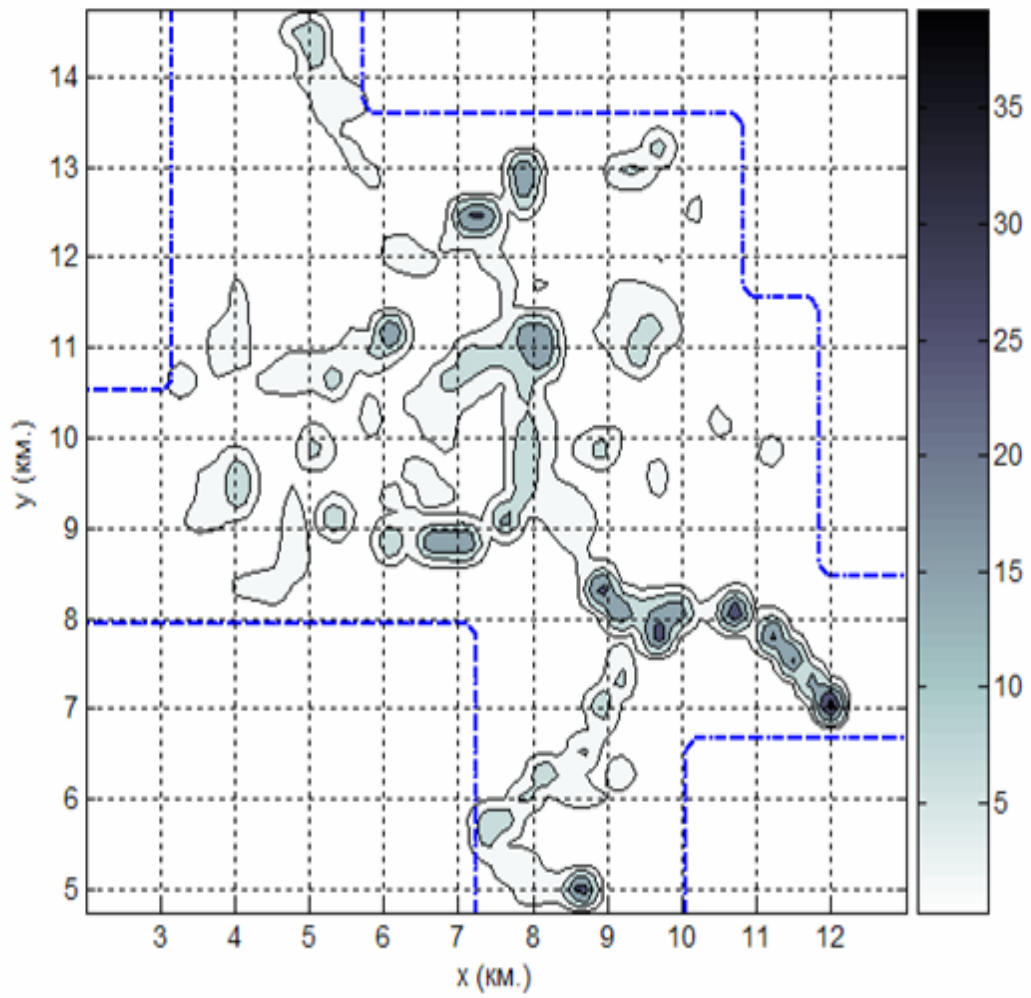


Рис. 9. Количество просочившейся в почву воды (в условных единицах)

8. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*. Вып. 7. Физика сплошных сред. М.: Мир, 1977.
9. Гитис В.Г., Ермаков Б.В. *Основы пространственно-временного прогнозирования в геоинформатике*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
10. Лихачева Э.А., Гитис В.Г., Бахирева Л.В., Вайншток А.П., Юрков Е.Ф. Комплексное районирование городской территории по степени устойчивости к динамическому воздействию. *Геоморфология*, 1993, № 4, стр. 41–47.

Статью представил к публикации член редколлегии В.В.Зяблов