

Достоверность компьютерного моделирования с точки зрения теории информации¹

В. С. Козьякин, Н. А. Кузнецов

Институт проблем передачи информации РАН

Поступила в редколлегию 21.08.2007

Аннотация—В предлагаемой обзорной статье обсуждаются вопросы, связанные с проблемами компьютерного моделирования непрерывных объектов. Приводятся примеры, показывающие, что даже в самых, казалось бы, тривиальных ситуациях результаты компьютерного моделирования могут кардинально отличаться от свойств исходных непрерывных объектов. Данный факт усугубляется тем, что зачастую ситуация не может быть исправлена повышением точности аппроксимации исходных непрерывных объектов. Предлагаются математические модели, позволяющие до известной степени объяснить возникающие феномены, а также использовать и/или парировать их негативные последствия.

1. ВВЕДЕНИЕ

В основе традиционных методов вычислительной математики и компьютерного моделирования лежит фундаментальный тезис о том, что *требуемая точность вычислений и адекватность дискретной модели ее непрерывному аналогу всегда может быть достигнута за счет увеличения точности компьютерной арифметики*, который часто дополняется следующим важным замечанием: *недостаточная точность компьютерной арифметики может быть компенсирована за счет увеличения времени вычислений и/или памяти компьютера*.

Данные тезисы базируются на многочисленных строго теоретически обоснованных или, по крайней мере, выживших в ходе длительного естественного отбора эмпирических средствах математики и теоретической физики, а примеры его справедливости настолько многочисленны и всеобъемлющи, что в детализации не нуждаются. Соответственно, одной из стандартных стала следующая схема компьютерного моделирования:

- ВЫБОР НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ;
- ПОСТРОЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ВЫБРАННОЙ МОДЕЛИ;
- ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ИЛИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЦЕЛЕЙ.

Однако в последнее время благодаря бурному развитию возможностей вычислительной техники компьютерное моделирование все чаще стало применяться для исследования именно тех ситуаций, когда *строгие теоретические методы анализа оказываются неработоспособными, а эмпирически подтвержденных методов еще не накоплено*, — например, при исследовании систем с элементами хаотического поведения (расчеты фазовых портретов аттрактора Лоренца и других хаотических систем, многочисленные картинки с фракталоподобными структурами), для проведения так называемых “computer-aided” доказательств и т.п. В таких ситуациях остается только надеяться, что повышение точности компьютерной арифметики (разрядности

¹ Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00256, 06-01-72552-НЦНИЛ-а.

машины, мелкости сетки дискретизации и т.п.) приведет в конечном итоге к успеху. К сожалению, в некоторых ситуациях *такого рода надежны не оправдываются*. Все чаще приходится сталкиваться с задачами нового типа, в которых справедливость сформулированного выше тезиса вызывает серьезные сомнения. Более того, как оказывается, такого рода ситуации не являются исключительными — в каком-то смысле они типичны. Таким образом, как ни парадоксально, развитие компьютерной техники и численных методов исследования не только не ослабило, но все больше и больше усиливает остроту следующего вопроса:

НАСКОЛЬКО МОЖНО ВЕРИТЬ РЕЗУЛЬТАТАМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ?

Растет число неожиданных и шокирующих примеров, показывающих что в самых, казалось бы, тривиальных ситуациях результаты компьютерного моделирования оказываются весьма далекими от теоретически предсказанных. Как правило, в каждом конкретном случае удается найти причину такого несоответствия. Но вместе с тем, указанная ситуация показывает, что “что-то не в порядке в датском королевстве”. Причина же, на наш взгляд, заключается в том, что подавляющее большинство пользователей вычислительной техники до настоящего времени находится в плену идеологии *непрерывной математики* и, по-видимому, как в свое время в физике, для осмысления взаимоотношений непрерывно-математических объектов и их компьютерных собратьев, необходимо нечто вроде идеологии *квантовой математики*, когда нельзя рассматривать объект лишь как непрерывный или дискретный, а необходимо его трактовать как единый *непрерывно-дискретный* объект.

Краеугольными камнями непрерывной математики являются понятия близости и непрерывности. При компьютерном моделировании эти понятия нередко применяются достаточно формально. Например, численная модель считается близкой к непрерывному оригиналу, если она получена дискретизацией на достаточно мелкую сетку или с помощью какого-либо типа интерполяции, сплайн-аппроксимации и т.п. При этом забывается, что основная задача компьютерного эксперимента — получить *информацию* о моделируемом объекте. Но если это так, то следует иметь в виду, что в то время как переход от одной непрерывной модели к другой часто можно произвести без потери информации (гомеоморфные замены переменных и т.п.),

ПЕРЕХОД ОТ НЕПРЕРЫВНОГО ОБЪЕКТА К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ, КАК ПРАВИЛО, НЕВОЗМОЖЕН БЕЗ ПОТЕРИ ИНФОРМАЦИИ.

Простой пример: дискретизация обратимой линейной системы на равномерную решетку как правило оказывается необратимым отображением. Другой пример: основная информационная характеристика динамической системы — ее энтропия [10] — измеряет экспоненциальную скорость роста отношения количества различных траекторий системы к их длине. Но в любой однозначной пространственной дискретизации системы возможно лишь ограниченное число бесконечных траекторий, и определение энтропии в этом случае становится бессмысленным. Здесь противоречие между непрерывным объектом и его дискретной моделью очевидно; очевидна и необходимость развития методов оценки энтропии непрерывной системы по ее дискретизациям. Отметим, что хотя различные методы решения этой проблемы уже существуют, в целом поставленная задача оказывается весьма трудной. В других ситуациях конфликт может быть менее очевиден, но не менее опасен. Следовательно, первый фундаментальный вопрос каждого компьютерного эксперимента:

КАКОВА ПОТЕРЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ВЫБРАННОЙ СХЕМЕ ПЕРЕХОДА ОТ НЕПРЕРЫВНОГО ОБЪЕКТА К ДИСКРЕТНОМУ?

Второй фундаментальный вопрос связан с аналогами понятий грубости и структурной устойчивости в непрерывной математике. При непрерывном моделировании, если отбросить

словесное оформление, это есть, по-существу, вопрос о том насколько устойчивы те или иные свойства объекта по отношению к непрерывным, гладким и т.п. (но обязательно малым в каком-то непрерывном смысле) возмущениям. Но если уж мы принимаем, что при компьютерном моделировании основным является вопрос об информации, то мы должны поставить и следующий вопрос:

МОЖЕМ ЛИ МЫ ГАРАНТИРОВАТЬ ИНФОРМАЦИОННУЮ ГРУБОСТЬ ВЫБРАННОЙ СХЕМЫ ПЕРЕХОДА ОТ НЕПРЕРЫВНОГО ОБЪЕКТА К ДИСКРЕТНОМУ?

Вероятно, всесторонний анализ этих вопросов явится в ближайшие десятилетия одним из стратегических направлений в развитии точных наук. Дать цельное описание ситуации в этой области и, тем более, прогноз ее развития — задача безнадежная. Некоторые задачи, связанные с проблемой дискретизации непрерывных отображений обсуждаются в [16, 21], где можно найти также обширную библиографию. Ниже мы лишь рассмотрим некоторые типичные неприятности, возникающие в этой области, и на их примере обсудим некоторые общие идеи, которые кажутся нам перспективными. Выбранные неприятности связаны не столько с неизбежными ошибками вычислений, сколько с самим качественным фактом дискретизации соответствующих фазовых пространств.

Структура статьи следующая. Во введении мы попытались объяснить необходимость “осторожного отношения” к результатам компьютерного моделирования непрерывных систем.

Во второй части (разделы 2.1, 2.2 и 2.3) обсуждаются три ситуации — коллапс динамической системы в ходе дискретизации, влияние дискретизаций на повороты плоскости и эффект типа алайнга при компьютерной реализации простых двумерных изображений, — когда компьютерная реализация простых непрерывных моделей приводит к неожиданным эффектам. Здесь демонстрируется также, что эти эффекты отражают, пусть в искаженном виде, свойства исходных непрерывных моделей. Мы выбрали именно эти конкретные примеры по следующим двум причинам. Во-первых, они просто описываются и довольно зрелищны, во-вторых, они являются хорошим полигоном для разработки и проверки общих методов качественного понимания и количественного учета явлений дискретизации.

В частях 3 и 4 предлагаются феноменологические модели, позволяющие достаточно точно вычислить статистические характеристики коллапс-эффекта, а также длин циклов и переходных процессов дискретизаций динамических систем. В основе этих моделей лежит теория случайных отображений с одним поглощающим центром (разделы 3.1 и 4.1). Как одно из средств противодействия негативным последствиям коллапс-эффекта рассматриваются различные стратегии, основанные на применении теории стохастических интервальных матриц (раздел 3.3).

Часть 5 посвящена обсуждению общих принципов, которым должна удовлетворять дискретизация отображения, чтобы ее поведение отражало поведение непрерывной динамической системы. Здесь обсуждаются понятия состоятельности дискретизаций, а также концепция шедоунга и взаимного шедоунга (раздел 5.1) для класса отображений. Применение принципа взаимного шедоунга иллюстрируется на примере так называемых полугиперболических липшицевых отображений (раздел 5.2).

Часть 6 посвящена моделям, до известной степени объясняющим эффекты, сопровождающие дискретизацию отображений поворота плоскости, рассматривавшихся в разделе 2.2. Здесь обсуждается проблема обратимости дискретизаций линейных отображений плоскости (раздел 6.1). Отмечается, что в общем случае дискретизации линейных отображений плоскости необратимы и именно это является одной из причин потери информации при дискретизации многомерных систем. Для описания частотных свойств дискретизаций линейных отображений и оценки величины “зазоров”, не заполненных траекториями дискретизованных отображений

поворота, развивается подход, основанный на анализе квазипериодических частотно измеримых множеств, квантизаторов линейных отображений и эргодических свойств дискретизаций линейных отображений (разделы 6.2, 6.3 и 6.4).

В части 7 предпринимается попытка разработать общие подходы к оценке потери информации при дискретизации случайных процессов.

Работа завершается частью 8, в которой исследуется общая структура муаров (раздел 8.1) и рассматривается проблема о том, насколько регулярными могут быть муары, возникающие при изображении данной функции, и как численно охарактеризовать степень этой регулярности (раздел 8.2). Для описания степени этой регулярности вводится понятие алайзинг-размерности и устанавливаются некоторые ее оценки.

В последние годы значительная доля всех вычислительных экспериментов проводится в сетях где одновременно работает много несинхронизованных или не вполне синхронизованных процессоров. Это приводит к суперпозиции эффектов дискретизации и эффектов рассинхронизации. Эти эффекты весьма важны и их анализу в последнее время уделяется все большее внимание. Мы не останавливаемся в настоящем докладе на этом вопросе частично из-за ограниченности объема, а частично из-за того, что эти вопросы нашли достаточно систематическое и полное отражение в недавней монографической и журнальной литературе см. библиографию в [2, 50].

Подчеркнем еще раз, что мы старались не подытожить признанные подходы и проблемы в обсуждаемой области, а обсудить сравнительно мало известные феномены и лишь зарождающиеся подходы к их описанию, использованию и/или парированию. Естественно, мы опирались на работы выполнявшиеся на протяжении последних 15 лет небольшим неформальным международным коллективом, главной движущей силой которого являлись Ф. Даймонд (Австралия), П. Клоеден (Германия), В. Козякин (Россия), А. Покровский (Россия, Ирландия), А. Владимиров (Россия), И. Владимиров (Россия, Австралия) и др. Поэтому естественно, что настоящий текст в существенной мере опирается на публикации именно этих авторов. Авторы благодарны также М. Бланку, обратившему их внимание на вопросы, связанные с численным моделированием отображения поворота плоскости (см. раздел 2.2), А. Владимирову, написавшему первый вариант раздела 2.3 и М. Судзуки (Австралия, Япония) за проведение численных экспериментов. При подготовке настоящей работы мы использовали обзоры [53, 55], дополнив их результатами последнего времени.

Одним из побудительных мотивов написания настоящего обзора явилось также то, что подавляющее большинство публикаций по данной тематике было выполнено в зарубежных журналах и до последнего времени аналогичных работ в русскоязычных журналах мы не встречали.

2. ПРИМЕРЫ

В настоящем разделе мы приводим некоторые достаточно типичные примеры, в которых демонстрируется несоответствие между свойствами непрерывных объектов и их дискретизаций. Рассматриваемые примеры носят модельный характер — они упрощены до такой степени, чтобы иметь возможность провести как полный теоретический анализ исходных непрерывных отображений, так и необходимые вычисления для их дискретных аналогов, в целях сравнения полученных результатов.

Компьютерные модели непрерывных динамических систем по самой своей природе конечны и представляются отображениями конечных множеств, т.е. ориентированными графами. Следует подчеркнуть однако, что классические методы теории графов оказываются недостаточными для получения ответов на наиболее интересные и практически важные вопросы, возникающие при теоретическом исследовании компьютерных моделей непрерывных динами-

ческих систем. Это связано, в частности, с тем, что свойства процедур дискретизации непрерывных систем тесно связаны с геометрией и топологией (непрерывного) фазового пространства исходной системы, что достаточно трудно учесть в терминах классической теории графов. Кроме того, как правило, индивидуальные дискретизации оказываются мало информативными в силу своей высокой чувствительности к конкретному выбору процедуры дискретизации (расположению узлов решетки, ее размеру и т.п.), но в то же время их усредненные (или статистические) свойства по отношению к достаточно “объемным” семействам дискретизаций оказываются достаточно устойчивыми и отражают свойства исходной системы (хотя часто и по непонятным в ряде случаев причинам — в искаженном виде). Поэтому и объектом компьютерного моделирования часто оказываются не индивидуальные дискретизации какой-то непрерывной системы, а семейства дискретизаций, порождаемых этой системой.

2.1. Коллапс динамической системы

В теоретической физике важную роль играет отображение Фейгенбаума–Цветановича

$$F^{(\gamma)}(x) = 1 - |2x - 1|^{1/\gamma}, \quad x \in [0, 1], \quad \gamma \leq 1. \quad (1)$$

При $\gamma = 1/2$ это отображение называют также *логистическим отображением* (см. рис. 1), а при $\gamma = 1$ — *преобразованием “пекаря”* (см. рис. 2).

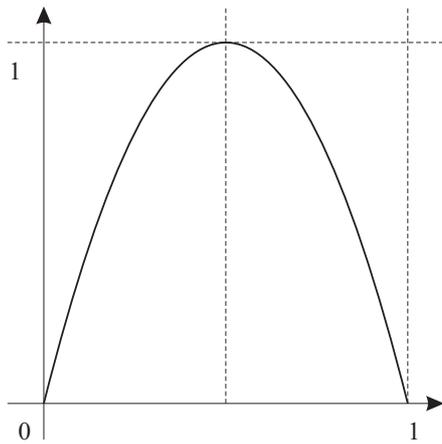


Рис. 1. График логистического отображения.

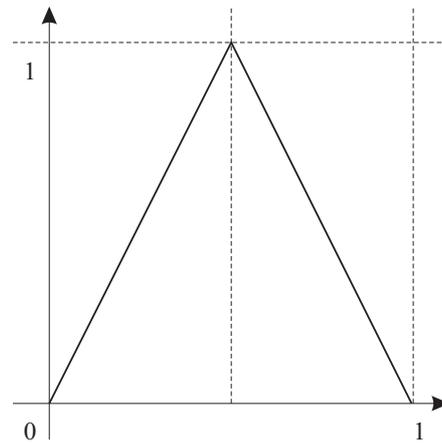


Рис. 2. График преобразования “пекаря”.

Преобразование “пекаря” обладает той особенностью, что для него богатое поведение непрерывной системы [19] “дегенерирует” в ходе дискретизации в поведение тривиальное и неинтересное. Так, преобразование “пекаря” имеет циклы всех порядков, мера Лебега инвариантна и эргодична относительно $F \equiv F^{(1)}$, оно как нельзя лучше перемешивает и т.д. Но рассмотрим идеальную компьютерную модель этого отображения — его сужение F_ν на ν -разрядную двоичную решетку

$$\mathbb{L}_{2^\nu} = \left\{ 0, \frac{1}{2^\nu}, \frac{2}{2^\nu}, \frac{3}{2^\nu}, \dots, \frac{2^\nu - 1}{2^\nu} \right\}.$$

Это сужение асимптотически тривиально: $F_\nu^m \equiv 0$ при $m \geq \nu$ (здесь и ниже $F^m(\cdot)$ обозначает операторную степень отображения $F(\cdot)$). Естественно, F_ν имеет лишь нулевой цикл; только мера сконцентрированная в нуле инвариантна для F_ν и т.д. В данном случае причина катастрофы ясна: каждая следующая итерация убивает последний ненулевой разряд — т.е. “убивает” информацию.

В общем случае отображение $F^{(\gamma)}(x)$ так же как и преобразование “пекаря” имеет единственную абсолютно непрерывную инвариантную меру $\mu_{F^{(\gamma)}}$. Следовательно для почти всех начальных значений $x_0 \in [0, 1]$ последовательность

$$x_0, F^{(\gamma)}(x_0), \dots, (F^{(\gamma)})^n(x_0), \dots \quad (2)$$

в естественном смысле “размазана” с плотностью $\mu_{F^{(\gamma)}}$ по всему отрезку $[0, 1]$.

Обозначим через \mathbb{L}_ν равномерную $1/\nu$ -решетку на отрезке $[0, 1]$ и положим

$$[x]_\nu = \frac{\text{ROUND}(\nu x)}{\nu}, \quad x \in [0, 1],$$

где $\text{ROUND}(\cdot)$ — это стандартный оператор округления числа до ближайшего целого. Через $F_\nu^{(\gamma)} : \mathbb{L}_\nu \mapsto \mathbb{L}_\nu$ обозначим \mathbb{L}_ν -дискретизацию [68] отображения $F^{(\gamma)}$, определяемую соотношением

$$F_\nu^{(\gamma)}(\xi) = [F^{(\gamma)}(\xi)]_\nu, \quad \xi \in \mathbb{L}_\nu.$$

Точку $\xi \in \mathbb{L}_\nu$ будем называть ν -коллапсирующей для отображения f , если $f_\nu^n(\xi) = 0$ для некоторого n , а значит, и для всех последующих n . Через $Y(\nu; f)$ обозначим множество ν -коллапсирующих точек. Через $P(\nu; f)$ обозначим долю коллапсирующих при отображении f точек решетки \mathbb{L}_ν :

$$P(\nu; f) = \frac{\#(Y(\nu; f))}{\nu}. \quad (3)$$

Какие свойства естественно ожидать от дискретизации $F_\nu^{(\gamma)}(\xi)$ отображения (1)? Как известно, отображение $F^{(\gamma)}(x)$ имеет циклы произвольно больших периодов, оно хорошо перемешивает, имеет единственную абсолютно непрерывную инвариантную меру и т.д. Следовательно, типичная последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая соотношениям

$$x_{n+1} = F^{(\gamma)}(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

распределена с некоторой плотностью μ_γ по отрезку $[0, 1]$, и значит, будет иногда “подходить” к нулевой точке, проводя, тем не менее, основное время вдаль от нее. Поэтому кажется достаточно естественным, что основная масса траекторий достаточно мелких дискретизаций отображения (4) будет вести себя подобным же образом. Следовательно, в частности, доля $\mathcal{P}(F_\nu^{(\gamma)})$ коллапсирующих точек отображения $F_\nu^{(\gamma)}$ в общем числе точек решетки \mathbb{L}_ν , т.е. таких точек ξ_0 для которых начиная с некоторого номера вычисляемые рекурсивно элементы

$$\xi_{n+1} = F_\nu^{(\gamma)}(\xi_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

попадают в точку $\xi = 0$, *должна быть малой* при больших значениях ν . С другой стороны, для типичной траектории $\{x_n\}$ отображения (4) найдется такой индекс n , при котором $|x_n| < \frac{1}{2\nu}$. Но все точки $x \in [0, 1]$, удовлетворяющие неравенству $|x| < \frac{1}{2\nu}$ при дискретизации на решетке \mathbb{L}_ν “склеиваются” и переходят в точку $x = 0$. Поэтому представляется естественным, что почти все точки решетки \mathbb{L}_ν для отображения $F_\nu^{(\gamma)}$ должны быть коллапсирующими и доля $\mathcal{P}(F_\nu^{(\gamma)})$ коллапсирующих точек *должна быть близкой к 1*.

Указанные возможности не могут осуществляться одновременно, а потому возникает вопрос: какое из приведенных выше правдоподобных рассуждений ближе к действительности? И тут нас поджидает сюрприз: доля коллапсирующих элементов $\mathcal{P}(F_\nu^{(\gamma)})$ как функция от γ и ν ведет себя достаточно нерегулярно — отметим лишь, что при определенных условиях осуществляются как первая, так и вторая возможности. А при $\gamma < \frac{1}{2}$ возникает ситуация, когда

не верны ни первая, ни вторая возможности! — в этих случаях среднее значение $p(\gamma)$ доли коллапсирующих точек отображения $F_\nu^{(\gamma)}$ (по ν из некоторого достаточно большого интервала) стремится к нулю при $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$ и быстро стремится к 1 при $\gamma \rightarrow 0$; например, $p(\frac{1}{3}) \approx 0.6$. Таким образом, свойства типичной последовательности итераций дискретизованной системы кардинально отличаются (в смысле любого из приведенных выше правдоподобных рассуждений) от свойств типичной последовательности (4), причем этот вывод не меняется ни при увеличении “мелкости” решетки \mathbb{L}_ν , ни при выполнении расчетов в реальной компьютерной арифметике.

Далее через $\tilde{P}(\nu; f)$ обозначается доля коллапсирующих элементов отображения f в простой выборке, состоящей из 100 элементов $\xi \in \mathbb{L}_\nu$. Значение $\tilde{P}(\nu; f)$ статистически достаточно близко к $P(\nu; f)$. На рис. 3 представлен график функции $\tilde{P}(\nu + n; F^{(\gamma)})$ для $\gamma = 1/3$, $\nu = 2^{27}$, $n = 1, 2, \dots, 500$. Это достаточно типичный график; бросается в глаза, что он имеет нерегулярный характер и большое среднее. Таким образом, свойства типичной последовательности итераций дискретизованной системы кардинально отличаются от свойств типичной последовательности (2). Возможно мы выбрали слишком грубую решетку? Рассмотрим вместо решетки $\mathbb{L}_{2^{27}}$ решетку $\mathbb{L}_{2^{44}}$. Как изменится соответствующий график? И вот первый сюрприз: график качественно не изменился — см. рис 4.

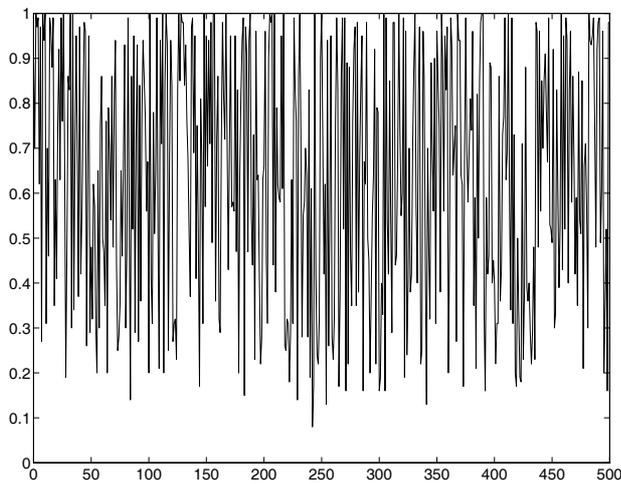


Рис. 3. Распределение коллапсирующих элементов $\tilde{P}(\nu + n; F^{(\gamma)})$ при $\nu = 2^{27}$, $1 \leq n \leq 500$ для отображения $F^{(\gamma)}$ при $\gamma = 1/3$.

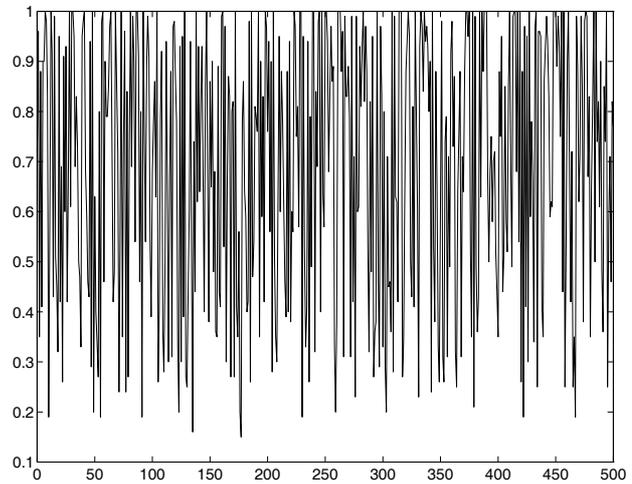


Рис. 4. Распределение коллапсирующих элементов $\tilde{P}(\nu + n; F^{(\gamma)})$ при $\nu = 2^{44}$, $1 \leq n \leq 500$ для отображения $F^{(\gamma)}(x)$ при $\gamma = 1/3$.

Забудем об искусственной дискретизации отображения $F^{(\gamma)}$ (т.е. дискретизации на равномерную решетку) и вычислим на машине в плавающей арифметике просто последовательность (2) для случайного x_0 . Полученный результат будет согласовываться с вышеизложенным наблюдением. Очень часто (более чем в 90% случаев в зависимости от конкретного программного обеспечения) после нескольких тысяч итераций последовательность (2) коллапсирует. В остальных редких случаях члены последовательности (2) будут ненулевыми для всех n .

Итак, несоответствие между поведением непрерывной системы и ее дискретизации объясняется не мелкостью решетки и не конкретным видом процедуры дискретизации — дело, по видимому, в самом факте дискретизации. Это заставляет нас поставить вопрос о более подробном исследовании и объяснении, как качественном так и количественном, возникающих эффектов.

2.2. “Кольца Сатурна”: дискретизация поворотов плоскости

Рассмотрим задачу численного построения фазового портрета какого-либо отображения. В качестве примера выберем одно из наиболее понятных и простых отображений — поворот плоскости на угол ϑ вокруг некоторой точки (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned}x &\mapsto x_0 + (x - x_0) \cos \vartheta - (y - y_0) \sin \vartheta, \\y &\mapsto y_0 + (x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{5}$$

Рассматриваемое отображение, с одной стороны, достаточно “плохое” для численного моделирования — оно не является структурно устойчивым в разумном смысле. С другой стороны, это отображение является типичным примером отображений с инвариантной мерой, возникающих, например, в консервативной механике. Фазовый портрет отображения (5) устроен просто — все траектории отображения (5) расположены на концентрических окружностях с центром в точке (x_0, y_0) , заполняя их всюду плотно при иррациональных значениях ϑ/π , и образуя конечное множество точек в противном случае.

Для численного моделирования отображения (5) рассмотрим его сужение на квадратную сетку $\mathbb{L}_{1,1}$ с шагом $h = 1$ и постараемся построить траектории с начальными точками, равномерно удаляющимися от точки (x_0, y_0) с постоянным шагом Δ .

Рассмотрим две процедуры численного счета для моделирования отображения (5):

$$\begin{aligned}x &\mapsto \text{TRUNC}(x_0 + (x - x_0) \cos \vartheta - (y - y_0) \sin \vartheta), \\y &\mapsto \text{TRUNC}(y_0 + (x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta)\end{aligned}\tag{6}$$

и

$$\begin{aligned}x &\mapsto \text{ROUND}(x_0 + (x - x_0) \cos \vartheta - (y - y_0) \sin \vartheta), \\y &\mapsto \text{ROUND}(y_0 + (x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta),\end{aligned}\tag{7}$$

где $\text{TRUNC}(x)$ — это процедура отсечения дробной части числа x , а $\text{ROUND}(x)$ — процедура округления числа x до ближайшего целого.

Интуитивное представление о “достоверности” компьютерного моделирования отвечает, на наш взгляд, той ситуации, когда при моделировании фазового портрета отображения (5) в окрестности каждой истинной траектории этого отображения имеется по меньшей мере одна численная траектория (траектория отображения (6) или (7)) и, наоборот, — когда в окрестности каждой численной траектории находится хотя бы одна истинная траектория.

На рис. 5 представлены результаты численного моделирования по формулам (6) при значениях $\vartheta = 17^\circ$, $x_0 = y_0 = 150$, $\Delta = 3$. Оказалось, в частности, что траектории, выпущенные из достаточно удаленных от (x_0, y_0) точек, постепенно приближаются к некоторой ограниченной траектории, не зависящей от начальных точек. Структура же фазового портрета внутри области, “ограниченной” этой траекторией, напоминает “кольца Сатурна” с характерными “уплотнениями” траекторий и “зазорами” между ними. Отметим, что плотность наблюдаемых циклических траекторий оказалась равной примерно 30% теоретической, что говорит о слипании отдельных траекторий.

На рис. 6 представлены результаты моделирования по формулам (7) при значениях $\vartheta = 7^\circ$, $x_0 = y_0 = 100$, $\Delta = 6$. Внешне результат получился более соответствующим теоретическому. В то же время полученная картинка также оказалась похожей на “кольца Сатурна” — некоторые траектории при большом числе итераций достаточно далеко “уплыли” от их теоретических положений и в результате образовались “зазоры” между траекториями, другие же оказались сильно “размытыми” (до 5% величины их радиуса), образуя “уплотнения”. Наконец, часто наблюдалась “транспозиция” траекторий — некоторые траектории, выпущенные из более удаленных от центра поворота (x_0, y_0) точек, сходились к циклам, лежащим ближе к (x_0, y_0) чем траектории, выпущенные из менее удаленных от (x_0, y_0) точек.

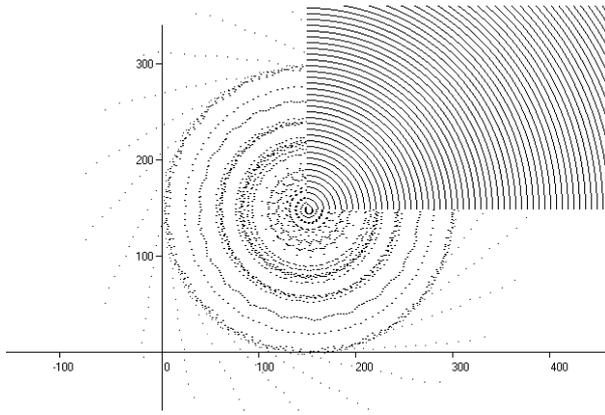


Рис. 5. Фазовый портрет поворота плоскости на целочисленной решетке вокруг точки $(150, 150)$ при отбрасывании дробных частей вычисленных координат; угол поворота $\vartheta = 17^\circ$, приращение радиусов начальных точек $\Delta = 3$. В верхнем правом квадранте — фрагмент истинного фазового портрета при $\Delta = 12$.

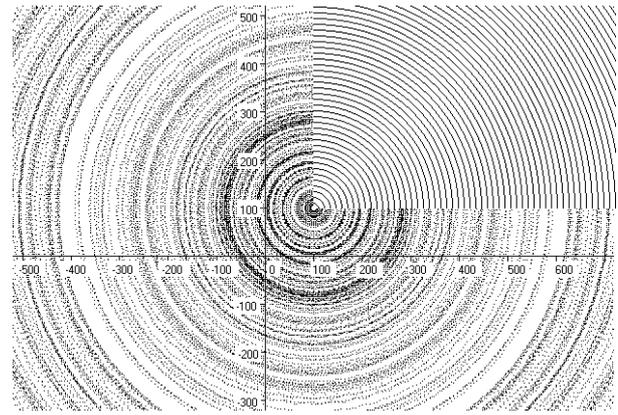


Рис. 6. Фазовый портрет поворота плоскости на целочисленной решетке вокруг точки $(100, 100)$ при округлении вычисленных координат; угол поворота $\vartheta = 7^\circ$, приращение радиусов начальных точек $\Delta = 6$. В верхнем правом квадранте — фрагмент истинного фазового портрета при $\Delta = 24$.

Итак, результаты численного моделирования оказались одновременно типичными и неудовлетворительными в своей качественной чувствительности к способу округления (а более общо — к схеме моделирования). Если бы мы не знали истинного фазового портрета исходной системы, результаты данного моделирования можно было бы интерпретировать как указывающие на более сложную структуру фазового портрета. Это вынуждает поставить следующий вопрос:

КАКОВЫ ДОЛЖНЫ БЫТЬ УСЛОВИЯ, ГАРАНТИРУЮЩИЕ “ДОСТОВЕРНОЕ” В УКАЗАННОМ ВЫШЕ СМЫСЛЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ОТОБРАЖЕНИЙ?

Отметим, что образование ограниченной области притяжения траекторий при моделировании по формулам (6) объяснить несложно (см. теорему 7 ниже); существенно менее понятно, как будут вести себя траектории отображения (6) внутри этой области. Неясно также и как будут вести себя траектории отображения (7) — будут ли они ограничены, не “свалятся” ли в ноль, могут ли “уходить” на бесконечность и т.п.

2.3. Муары: дискретизация осциллирующих изображений

Рассмотрим задачу численного анализа гладкой функции $f = f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, со скалярными значениями.¹ Пусть мы хотим изобразить поведение функции f на черно-белом цифровом мониторе, который можно рассматривать как часть целочисленной решетки $\mathbb{L}_{1,1}$. Естественно проделать это следующим образом: провести линии уровня функции $f(x, y)$, скажем, линии $L_i(f) = \{(x, y) : f(x, y) = i + 1/2\}$, а затем поочередно раскрасить промежутки между этими линиями в белый и черный цвета. Другими словами — раскрасить поочередно в белый и черный цвета Лебеговы множества

$$S_i(f) = \{(x, y) : i - 1/2 < f(x, y) \leq i + 1/2\}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Получившаяся “зебра” отобразит поведение функции f — будут видны точки ее локальных экстремумов, хотя и нельзя будет отличить максимумы от минимумов.

¹ Мы ограничиваемся функциями двух переменных для удобства графической интерпретации постановок и результатов.

Казалось бы, для более детального исследования функции f достаточно сделать сетку линий уровня более частой, т.е. рассмотреть множества $S_i(\mu f) = \{(x, y) : i - 1/2 < \mu f(x, y) \leq i + 1/2\}$ и устремить μ к бесконечности. Однако, дискретная структура экрана дисплея, который, по-существу, является прямоугольной решеткой, при достаточно больших значениях параметра μ резко меняет наблюдаемую картину: образуются паразитические регулярные и хаотические структуры. На рисунках 7, 8 и 9 приведены распечатки экранов дисплея при описанном раскрашивании линий уровня функции

$$f(x, y) = x^2y - y^4, \quad -1 \leq x, y \leq 1. \quad (8)$$

На рис. 7 при $\mu = 10$ все в порядке — мы видим настоящие линии уровня (точнее, Лебеговы множества) функции f . Однако уже при $\mu = 300$, на рис. 8, основная часть изображения напоминает цепочки фазовых портретов каких-то коник. При $\mu = 288000$, на рис. 9, мы уже видим только весьма нерегулярный рисунок типа “персидского ковра” не имеющий, кажется, никакого отношения к исходной функции.

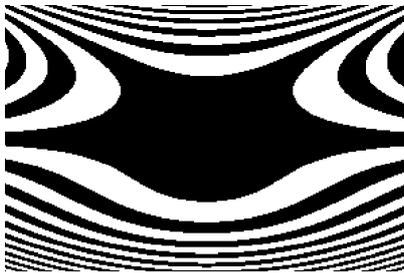


Рис. 7. Изображение Лебеговых множеств функции $10(x^2y - y^4)$ на сетке 300×200 точек.

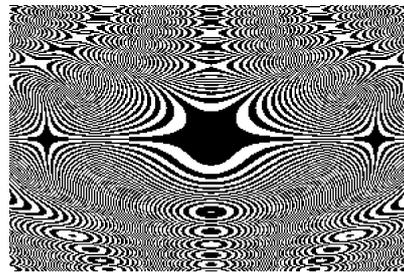


Рис. 8. Изображение Лебеговых множеств функции $300(x^2y - y^4)$ на сетке 300×200 точек.

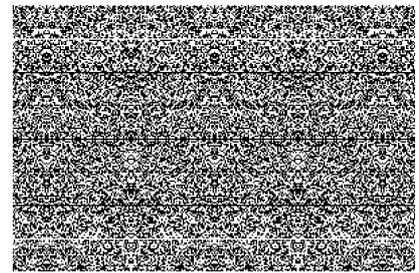


Рис. 9. Изображение Лебеговых множеств функции $288000(x^2y - y^4)$ на сетке 300×200 точек.

Данные структуры называются в работах по компьютерной графике муарами. Как для восстановления неискаженного дискретизацией изображения, так и для восстановления самой решетки дискретизации (в случае, когда она неизвестна) важно создать систему математических понятий, которая позволила бы адекватно описывать асимптотическое поведение муаров при уменьшении пикселя.

3. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЛАПС-ЭФФЕКТА

Важно предложить простую феноменологическую модель, которая бы объяснила количественно и качественно описанный в разделе 2.1 эффект коллапса. Такая модель должна допускать достаточно полный теоретический анализ, что даст возможность заранее предвидеть степень таких коллапсирующих эффектов в численном анализе дифференциальных моделей динамических систем с хаотическим поведением. Ниже обсуждается модель коллапс-эффекта, предложенная в [36].

3.1. Случайные отображения с одним притягивающим центром и одинаковыми переходными вероятностями

В качестве основного технического инструмента будем использовать случайные отображения. Сначала рассмотрим так называемые случайные отображения с единственным притягивающим центром. Пусть $\Delta > 0$. Определим случайное отображение $T_{\Delta, \kappa}$ множества $(0, 1, 2, \dots, \kappa)$

в себя равенством

$$P(T_{\Delta,\kappa}(i) = j) = \begin{cases} \frac{\Delta}{\kappa + \Delta}, & \text{если } j = 0, \\ \frac{1}{\Delta + \kappa}, & \text{если } j \neq 0 \end{cases}$$

и условием, что образ элемента i выбирается независимо от образов остальных элементов из $(0, 1, 2, \dots, \kappa)$.

Коллапс-компонентой $Z_{\Delta,\kappa}$ отображения $T_{\Delta,\kappa}$ назовем случайное подмножество множества $(0, 1, 2, \dots, \kappa)$, определяемое равенством

$$Z_{\Delta,\kappa} = \{i \in (0, 1, 2, \dots, \kappa) : T_{\Delta,\kappa}^n(i) = 0 \text{ для некоторого } n\}.$$

Обозначим через

$$Q_{\Delta,\kappa} = \frac{\#(Z_{\Delta,\kappa})}{\kappa + 1}.$$

долю элементов множества $(0, 1, 2, \dots, \kappa)$, принадлежащих коллапс-компоненте отображения $T_{\Delta,\kappa}$.

Пусть $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ — функция, имеющая единственную абсолютно непрерывную инвариантную меру μ_f . Предположим, что плотность этой меры положительна, только концевые точки интервала $[0, 1]$ сингулярны для этой меры и для некоторого $l \geq 2$ существуют пределы

$$\alpha_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \mu([0, s])s^{1/l}, \quad \alpha_1 = \lim_{s \rightarrow 1} \mu([1 - s, 1])s^{1/l}.$$

Эти предположения верны, в частности, для функции Фейгенбаума–Цветановича (1) и многих других (см., например, литературу в [62]).

Теперь мы в состоянии сформулировать гипотезу о связи доли коллапсирующих точек произвольного отображения $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ со свойствами коллапс-компоненты случайного отображения $T_{\Delta,\kappa}$.

Тезис 1. *Существуют положительные постоянные $a = a(f)$ и $b = b(f)$ со следующим свойством. При большом ν и $1 \ll n \ll \nu$ статистические характеристики последовательности*

$$\mathbf{P}(\nu, n; f) = P(\nu; f), P(\nu + 1; f), \dots, P(\nu + n; f),$$

определяемой равенством (3), близки к соответствующим статистическим характеристикам случайной величины $Q_{\Delta(\nu;f),\kappa(\nu;f)}$, где $\Delta(\nu; f)$ и $\kappa(\nu; f)$ определяются равенствами

$$\Delta(\nu; f) = a(f) \frac{\sqrt{\nu}}{\ln(\nu)}, \quad \kappa(\nu; f) = \left[b(f) \frac{\nu}{\ln(\nu)} \right]$$

в случае $l = 2$ и равенствами

$$\Delta(\nu; f) = \frac{a(f)}{\nu^{1/l}}, \quad \kappa(\nu; f) = \left[b(f) \frac{\nu}{\nu^{2/l}} \right]$$

в случае $l > 2$.

Обоснование этого тезиса на “физическом” уровне строгости приведено в [36].

Свойства случайных отображений с единственным притягивающим центром были детально изучены в работе [20]. В частности, верны следующие утверждения.

Лемма 1. При $l = 2$ функции распределения случайных величин $Q_{\Delta(\nu;f),\kappa(\nu;f)} \ln(\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots$, сходятся к функции

$$d_c(x) = \operatorname{erfc}(1/\sqrt{2cx}), \quad (9)$$

где $c = a(f)^2/b(f)$, а $\operatorname{erfc}(y)$ — дополнительная функция ошибок [61]

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad x \geq 0.$$

При $l > 2$ функции распределения случайных величин $Q_{\lambda(\nu;f),\kappa(\nu;f)}$, $\nu = 1, 2, \dots$, сходятся к функции

$$d_c^*(x) = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{c}{2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} \right), \quad 0 < x < 1, \quad (10)$$

где, по-прежнему, $c = a(f)^2/b(f)$.

Лемма 2. Обозначим через $q(\nu; f)$ вероятность того, что коллапс-компонента совпадает с множеством $(0, 1, \dots, \kappa)$, т.е. вероятность выполнения равенства

$$Q_{\Delta(\nu;f),\kappa(\nu;f)} = \kappa(\nu; f) + 1.$$

Тогда при $l \geq 2$

$$q(\nu; f) = \frac{\Delta(\nu; f)}{\kappa(\nu; f) + 1} \approx \frac{a(f)}{b(f)} \frac{1}{\nu^{1/l}}.$$

3.2. Сравнение с экспериментальными данными

Статистический анализ результатов экспериментальных вычислений находится в удовлетворительном соответствии с тезисом 1 и теоретическими предсказаниями лемм 1 и 2 [48]. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть \mathbf{S} — некоторое конечное множество неотрицательных чисел; определим его функцию распределения равенством

$$D(a, \mathbf{S}) = \frac{\#\{s \in \mathbf{S} : s \leq a\}}{\#\mathbf{S}}, \quad a \geq 0.$$

Из тезиса 1 и леммы 1 вытекает, что при $l = 2$, достаточно больших ν и $1 \ll n \ll \nu$ функция $D(a; \ln(\nu) \mathbf{P}(\nu, n; f))$ должна быть близка к функции (9) с подходящим c , а при $l > 2$, достаточно больших ν и $1 \ll n \ll \nu$ функция $D(a; \mathbf{P}(\nu, n; f))$ должна быть близка к функции (10).

На рис. 10 представлен график функции $D(a; \ln(\nu) \tilde{\mathbf{P}}(\nu, n; F^{(\gamma)}))$ для функции Фейгенбаума–Цветановича при $\gamma = 1/3$, $\nu = 2^{44}$, $n = 1, 2, \dots, 500$, и график функции распределения с плотностью $d_1^*(x)$ (гладкая линия). Здесь

$$\tilde{\mathbf{P}}(\nu, n; F^{(\gamma)}) = \tilde{P}(\nu; F^{(\gamma)}), \tilde{P}(\nu + 1; F^{(\gamma)}), \dots, \tilde{P}(\nu + n; F^{(\gamma)}),$$

и $\tilde{P}(\nu + n; F^{(\gamma)})$ вычисляются, как описано в разделе 2.1.

Аналогично, на рис. 11 представлен график функции распределения последовательности

$$\tilde{P}(2^{44}; F) \ln(2^{44}), \tilde{P}(2^{44} + 1; F) \ln(2^{44}), \dots, \tilde{P}(2^{44} + 356; F) \ln(2^{44}) \quad (11)$$

для логистического отображения $F(x) = 4x(1 - x)$ (имеющего квадратичную особенность) и функция (9) при $c = 2$. (Первоначально предполагалось рассмотреть последовательность

$$\tilde{P}(2^{44}; F) \ln(2^{44}), \tilde{P}(2^{44} + 1; F) \ln(2^{44}), \dots, \tilde{P}(2^{44} + 500; F) \ln(2^{44}).$$

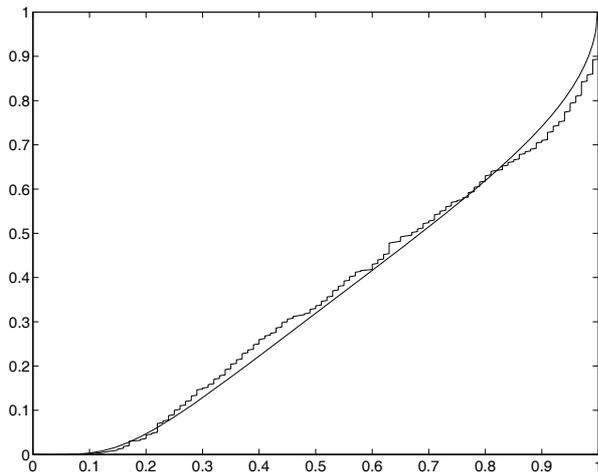


Рис. 10. График функции распределения $D(a; \ln(2^{44})\tilde{\mathbf{P}}(2^{44}, 500; F^{(\gamma)}))$ для отображения $F^{(\gamma)}(x)$ при $\gamma = 1/3$ (ступенчатая кривая) и график функции $d_1^*(x)$ (гладкая кривая).

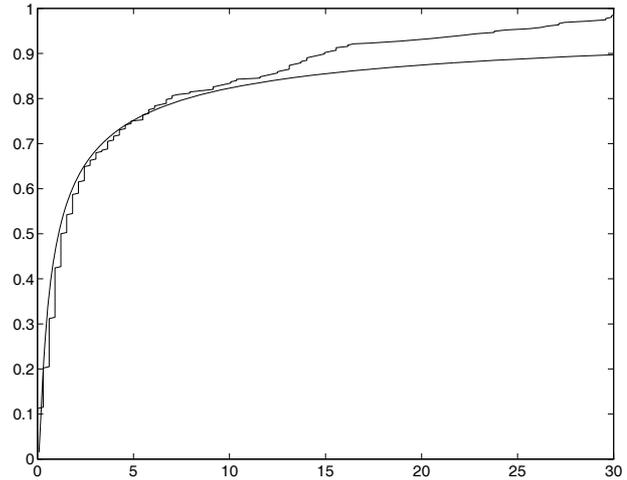


Рис. 11. График функции распределения $D(a; \ln(2^{44})\tilde{\mathbf{P}}(2^{44}, 356; F))$ для логистического отображения $F^{(1/2)}(x) = 4x(1-x)$ (ступенчатая кривая) и график функции $d_2(x)$ (гладкая кривая).

К сожалению, вычисления на суперкомпьютере CRAY были прерваны через 24 часа процессорного времени по вине оператора, не предупредившего своего сменщика о приоритетном характере данного эксперимента.) Поскольку $\tilde{P}(\nu + m; F) \leq 1$, $m = 0, 1, \dots, n$, и $\ln \nu = \ln(2^{44}) \approx 30$,

$$D_{27} := D(a; (\ln \nu)\tilde{\mathbf{P}}(\nu, n; F))$$

то кортеж распределен в данном случае в интервале $[0, 30]$. С другой стороны, $d_2(x)$ — это функция с бесконечным носителем $[0, \infty)$. Поэтому на оборванный “хвост” распределения D_{27} оказывает воздействие “хвост” распределения $d_2(x)$. Если принять это обстоятельство во внимание, то согласие эксперимента с тезисом 1 является достаточно хорошим.

Назовем решетку \mathbb{L}_ν *абсолютно коллапсирующей* для отображения f , если итерации каждой точки $\xi \in \mathbb{L}_\nu$ под действием этого отображения попадают рано или поздно в ноль. Некоторые общие результаты относительно абсолютно коллапсирующих дискретизаций обсуждаются в [33]. Из тезиса 1 и леммы 2 вытекает, что доля абсолютно коллапсирующих решеток $w(N; f)$ в последовательности $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \dots, \mathbb{L}_N$ должна иметь порядок $(2a(f)/b(f))N^{(l-1)/l}$. В частности, функция $w(N; f)^{l/(l-1)}$ должна быть приблизительно линейной по N . На рис. 12 и 13 приведены соответствующие графики для случаев, когда $f = F$ и $f = F^{(\gamma)}$.

Мы провели много экспериментов с различными унимодальными функциями. Все они четко подтвердили адекватность тезиса 1.

3.3. Интервальные стохастические матрицы как инструмент предупреждения коллапс-эффектов

Что можно сделать, чтобы избежать коллапс-эффектов, типа описанных в разделе 2.1? Сформулируем несколько общих стратегий:

- S1.** ВЫБОР СПЕЦИАЛЬНЫХ “АНТИ-КОЛЛАПСНЫХ” ДИСКРЕТИЗАЦИЙ.
- S2.** ПЕРЕХОД К КОМПЬЮТЕРНЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ С ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИМИ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ. ЭТО ОБЫЧНО ДЕЛАЕТСЯ ПУТЕМ ЗАМЕНЫ ИСХОДНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ f_ν НА ЦЕПЬ МАРКОВА НА РЕШЕТКЕ \mathbb{L} .

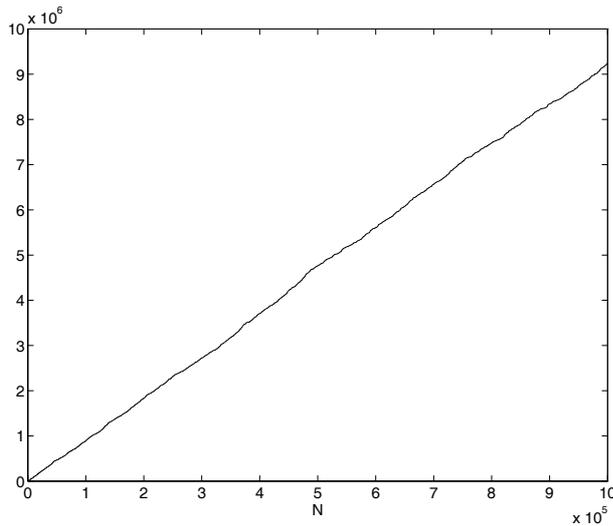


Рис. 12. График $w(N; F)^2$ для логистической функции $F^{(1/2)}(x) = 4x(1-x)$.

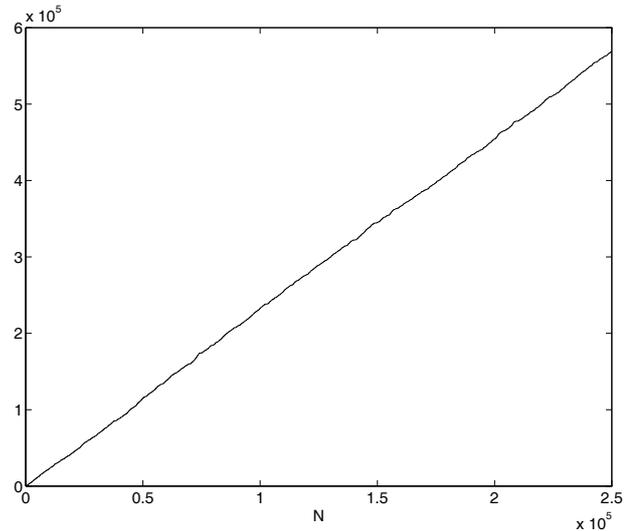


Рис. 13. График $w(N; F^{(\gamma)})^{3/2}$ для функции $F^{(\gamma)}(x)$ при $\gamma = 1/3$.

S3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ДИСКРЕТИЗАЦИЙ.

S4. ПРОИГНОРИРОВАТЬ ЭТУ ПРОБЛЕМУ ВООБЩЕ.

Все эти стратегии являются вполне разумными, однако многие теоретические вопросы, связанные с их реализацией, пока остаются открытыми.

Центральный вопрос, связанный с анализом первой стратегии ясен:

ДАТЬ ХОТЯ ВЫ ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫБОРА ДИСКРЕТИЗАЦИИ БЕЗ КОЛЛАПС-ЭФФЕКТОВ.

Укажем один из возможных вариантов ответа на этот вопрос. Но сначала, определим некоторые термины и введем обозначения. Пусть Ω — компактное метрическое пространство с метрикой ρ . Обозначим через $\mathbf{Sep}(y, X) = \inf_{x \in X} \rho(y, x)$ расстояние от элемента $y \in \Omega$ до множества $X \subseteq \Omega$, а через $\mathbf{Sep}(Y, X)$, $Y, X \subseteq \Omega$ — хаусдорфово отклонение² множества Y от X , определяемое равенством:

$$\mathbf{Sep}(Y, X) = \sup_{y \in Y} \mathbf{Sep}(y, X).$$

При необходимости тот же самый символ \mathbf{Sep} будет использоваться и для обозначения хаусдорфового отклонения множеств из прямого произведения $\Omega \times \dots \times \Omega$, наделенного метрикой

$$\rho_N((x_0, x_1, \dots, x_N), (y_0, y_1, \dots, y_N)) = \max_{0 \leq n \leq N} \rho(x_n, y_n).$$

Наконец, через $\mathbf{Gr}(f)$ обозначим график отображения f .

Пусть теперь \mathbb{T}^d — это стандартный d -мерный тор, $f: \mathbb{T}^d \mapsto \mathbb{T}^d$ — отображение с инвариантной мерой Лебега, и пусть \mathbb{L} — решетка на торе \mathbb{T}^d , индуцированная стандартной однородной $1/\nu$ -решеткой на кубе.

² Не следует путать хаусдорфово отклонение с хаусдорфовым расстоянием $\chi(X, Y)$, определяемым равенством $\chi(X, Y) = \max\{\mathbf{Sep}(X, Y), \mathbf{Sep}(Y, X)\}$.

Теорема 1 (см. [30]). Для каждого $\varepsilon > 0$ существует перестановка π решетки \mathbb{L}_ν , удовлетворяющая соотношению $\text{Sep}(\text{Gr}(\pi), \text{Gr}(f)) \leq \varepsilon$.

Эта теорема похожа на результат Лакса [57]. В то же время в отличие от теоремы Лакса, отображение f не предполагалось инъективным. Этот пример показывает, каким образом можно выбрать подходящую аппроксимацию: перестановки, очевидно не имеют коллапсирующих эффектов. Важно, что имеются быстрые алгоритмы для определения перестановок, соответствующих f . Они могут быть реализованы с помощью несложной компьютерной программы.

Отметим, что существуют и другие теоретические результаты в этом направлении (см., например [18]), связанные, в основном, с использованием дискретизации Стеттера [68], но они не всегда применимы к рассматриваемой ситуации.

Вторая и третья стратегии естественны с точки зрения теории информации. Действительно, как отмечалось во введении, энтропия однозначной детерминированной дискретизации всегда равна нулю. Чтобы избежать этого, необходимо добавить некоторый искусственный источник информации. Это можно сделать введением случайного (стратегия **S2**) или многозначного (стратегия **S3**) шума. Отметим глубокие теоретические результаты Ю. Кифера [47] и М. Бланка [3], имеющие отношение ко второй стратегии. Но основной вопрос второй и третьей стратегий:

КАКИМ ДОЛЖЕН БЫТЬ УРОВЕНЬ РАНДОМИЗАЦИИ ИЛИ МНОГОЗНАЧНОСТИ?

остается открытым. Если стохастическая компонента во второй стратегии слишком большая, то динамика модели будет заметно отличаться от динамики исходной системы, но если она не слишком сильная, то будут присутствовать коллапсирующие эффекты.

С четвертой стратегией связан следующий теоретический вопрос:

КОГДА И ПОЧЕМУ СТРАТЕГИЯ ИГНОРИРОВАНИЯ ПРОБЛЕМЫ ЯВЛЯЕТСЯ ЗАКОННОЙ?

Другими словами, в каких случаях коллапс-эффект маловероятен (хотя и возможен в силу теоремы 5 из [33]).

Ниже описывается техническое орудие, полезное в случаях второй и третьей стратегии; возможно, оно может быть полезно и в строгом анализе первой и четвертой стратегий. Важно и то, что оно связывает эти стратегии.

Пусть \mathcal{M}_d — множество квадратных $d \times d$ матриц $A = (a_{ij})$ с неотрицательными элементами $a_{ij} \geq 0$. Множество \mathcal{M}_d частично упорядочено соотношением

$$A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d,$$

где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы из \mathcal{M}_d . Напомним, что матрицу $C = (c_{ij})$ называют *стохастической*, если

$$\sum_{i=1}^d c_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, d;$$

множество всех стохастических матриц в \mathcal{M}_d будем обозначать через \mathcal{S}_d .

Пусть \mathcal{M}_d^- множество всех матриц $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_d$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^d a_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, d,$$

а \mathcal{M}_d^+ множество матриц $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_d$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^d b_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для любых $A \in \mathcal{M}_d^-$ и $B \in \mathcal{M}_d^+$ таких что $A \leq B$, обозначим через \widehat{AB} множество стохастических матриц, заключенных между A и B :

$$\widehat{AB} = \{C \in \mathcal{S}_d : A \leq C \leq B\}.$$

Множество \widehat{AB} назовем *интервальной стохастической матрицей* с границами A и B .

Наконец, если σ_d стандартный симплекс в \mathbb{R}^d , то для любого вектора $p \in \sigma_d$ и для любой стохастической матрицы \widehat{AB} определим множество

$$\widehat{AB}p = \{Cp : C \in \widehat{AB}\}.$$

Множество $\widehat{AB}p$ может быть описано в явном виде. Пусть \mathcal{I}_d — класс всех подмножеств множества $\{1, 2, \dots, d\}$. Для любых $j \in \{1, \dots, d\}$ и $I \in \mathcal{I}_d$ положим

$$H_j(I, \widehat{AB}) = \min \left\{ \sum_{i \in I} b_{ij}, 1 - \sum_{i \notin I} a_{ij} \right\}.$$

Теорема 2. *Множество $\widehat{AB}p$ совпадает с множеством векторов $q \in \sigma_d$, удовлетворяющих неравенству*

$$\sum_{j=1}^d p_j H_j(I, \widehat{AB}) \geq \sum_{i \in I} q_i, \quad \forall I \in \mathcal{I}_d.$$

Из этой теоремы вытекает важное следствие. Назовем вектор $p \in \sigma_d$ *полуинвариантным* для стохастической интервальной матрицы \widehat{AB} , если

$$\sum_{j=1}^d p_j H_j(I, \widehat{AB}) \geq \sum_{i \in I} p_i, \quad \forall I \in \mathcal{I}_d.$$

Для любой стохастической матрицы C обозначим через $\text{Fix}(C)$ множество векторов $x \in \sigma_d$, удовлетворяющих $Cx = x$.

Следствие 1. *Множество $\bigcup \{\text{Fix}(C) : C \in \widehat{AB}\}$ совпадает с множеством полуинвариантных векторов стохастической интервальной матрицы \widehat{AB} .*

Покажем, как работает теорема 2 в анализе дискретизаций динамических систем.

Пример 1 (Применение к стратегии S2). Обозначим через \mathcal{P} множество вероятностных мер Бореля на компакте Ω . Равенство

$$\rho_P(\mu_1, \mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_1(\mathcal{O}_\varepsilon(S)) \leq \mu_2(S) - \varepsilon, \forall S \in \mathcal{B}\}, \quad (12)$$

где $\mathcal{O}_\varepsilon(S)$ — ε -окрестность S , определяет метрику Прохорова на \mathcal{P} . Эта метрика используется во многих разделах теории вероятности (см., например, [41]). Из теоремы 2 следует, что для любой инвариантной меры μ отображения f существует цепь Маркова на решетке \mathbb{L} со стационарной мерой μ_* , удовлетворяющей неравенству

$$\rho_P(\mu_*, \mu) \leq h(\mathbb{L}), \quad (13)$$

где h определяется равенством

$$h(\mathbb{L}) = \sup_x \inf_\xi \{\rho(\xi, x) : \xi \in \mathbb{L}, x \in \Omega\},$$

и с переходными вероятностями $P(\xi, \eta)$, удовлетворяющими условию

$$P(\xi, \eta) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{Sep}((\xi, \eta), \mathbf{Gr}(f)) > h(\mathbb{L}). \quad (14)$$

Неравенства (13), (14) дают оценку минимального уровня рандомизации, достаточного для подавления коллапсирующих эффектов. Этот уровень удивительно низкий: он совпадает с пространственным шагом рассматриваемой дискретизации. Конечно условия (13), (14) не дают полного ответа на вопрос об уровне рандомизации, но это шаг в нужном направлении. Отметим также, что аналогичные утверждения были полезны при анализе некоторых алгоритмов определения интересных инвариантных мер [34].

Пример 2 (Сведение к задаче линейного программирования). Из теоремы 2 следует, что для любой инвариантной меры μ функции f существует мера μ_* на решетке удовлетворяющая (13) и соотношению

$$\mu_*(\mathbb{L}_*) \leq \mu_*(\Phi_*^{-1}(\mathbb{L}_*)) \quad \text{для} \quad \mathbb{L}_* \subseteq \mathbb{L}.$$

Часто особенно интересны инвариантные меры со специальными экстремальными свойствами. Указанное соотношение сводит поиск таких мер к решению задачи линейного программирования.

Пример 3 (Применение к стратегии S3). Выберем некоторую многозначную дискретизацию Φ_f отображения f , удовлетворяющую условию

$$\mathbf{Gr}(\Phi_f) = \{(\xi, \eta) : \mathbf{Sep}((\xi, \eta), \mathbf{Gr}(f)) \leq h(\mathbb{L})\}.$$

Тогда множество точек графика Φ_f совпадает с множеством точек из $h(\mathbb{L})$ -окрестности графика f . В определенном смысле это — разумно минимальная многозначная реализация отображения f . Из теоремы 2 вытекает, что для любой инвариантной меры μ отображения f существует инвариантная мера μ_* многозначного отображения Φ_f , удовлетворяющая неравенству (13). Это утверждение оценивает минимальный уровень многозначности, достаточный для подавления коллапс-эффекта.

Результаты, изложенные выше, базируются на работах [31, 35]. Эффекты дискретизации идейно сходны с эффектами, возникающие при работе с некорректными задачами. В частности, неприятности типа коллапс-эффекта могут быть существенно ослаблены, если процесс итераций будет своевременно прекращен (см. обсуждение этого вопроса в [18]). Для достаточно ясного понимания, когда следует прекращать вычисления, нужны, в частности, новые методы оценки переходных процессов в плохо управляемых дискретных системах. Возможно, при изучении этого вопроса окажется полезной схема предложенная в [51].

4. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИСТИК ДЛИН ЦИКЛОВ И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИСКРЕТИЗАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

К сожалению, для отображения Фейгенбаума-Цветановича (как, впрочем, и для других систем со сложным поведением) теоретическое вычисление таких комбинаторных характеристик как доля коллапсирующих элементов, длин циклов и переходных процессов сопряжено с существенными трудностями, не преодоленными, насколько нам известно, до настоящего времени. В связи с этим естественным представляется компромиссный подход, основанный на построении феноменологических моделей статистик длин циклов, переходных процессов и других комбинаторных характеристик дискретизаций рассматриваемых систем. Конечно, рассматриваемый подход, в принципе, не нов — одна из известных феноменологических моделей

подобного рода разработана в работах [40, 43, 58] и базируется на теории вполне случайных отображений [17]. Ее использование оказалось успешным в ситуациях, когда “типичная” дискретизация непрерывной системы не имеет выраженной алгебраической структуры, а сама исходная система имеет стохастический аттрактор, хаусдорфова размерность которого совпадает с его корреляционной размерностью (см. детали в [37, 43]). Однако для отображений (1) с $\gamma < \frac{1}{2}$ указанный подход неприменим, так как в этом случае хаусдорфова размерность стохастического аттрактора $[0, 1]$ отличается от его корреляционной размерности (первая из них равна 1, а вторая — 2γ).

Одни из первых успешных моделей для описания систем с различными хаусдорфовыми и корреляционными размерностями были предложены в [36, 37]. Эти модели, основанные на теории случайных графов и отображений [9, 42], в частности, случайных отображений с одним притягивающим центром [67], были предложены в [38]. Качественно вполне адекватные, они оказались не вполне удовлетворительными количественно, что и явилось одним из побудительных мотивов введения ниже нового класса моделей, продемонстрировавшего в численных экспериментах высокую количественную точность.

4.1. Случайные отображения с одним поглощающим центром и разными переходными вероятностями

Предлагаемая ниже модель базируется на понятии случайного отображения с одним поглощающим центром, определение и некоторые свойства которого напоминаются ниже.

Пусть N — натуральное число, $\alpha > 0$ и $\gamma \in (0, 1/2)$. Рассмотрим случайное отображение $T_{\alpha, N}^{(\gamma)}$ множества $X(N) = \{0, \dots, N\}$ в себя определяемое следующим условиями. Положим $q_0(\alpha, \gamma) = \alpha^\gamma$ и $q_i(\alpha, \gamma) = (\alpha + i)^\gamma - (\alpha + i - 1)^\gamma$, $i = 1, 2, \dots, N$. Потребуем, чтобы каждая реализация \hat{T} случайного отображения $T_{\alpha, N}^{(\gamma)}$ оставляла неподвижной точку 0 и чтобы образы $\hat{T}(i)$ точек $i \in X(N)$ выбирались независимо и равномерно, с вероятностью события $T_{\alpha, N}^{(\gamma)}(i) = j$ пропорциональной $q_j(\alpha, \gamma)$. В этом случае вероятность реализации \hat{T} равна величине

$$\prod_{i=1}^N (\alpha + N)^{-\gamma} q_{\hat{T}(i)}(\alpha, \gamma).$$

Данное определение является естественным аналогом определения случайных отображений с одним притягивающим центром, предложенным в [67] (см. также [17, 20]), и поэтому $T_{\alpha, N}^{(\gamma)}$ естественно назвать *случайным отображением с одним поглощающим центром и разными переходными вероятностями*.

Каждая реализация \hat{T} случайного отображения $T_{\alpha, N}^{(\gamma)}$ есть отображение детерминированное, и потому для любого $i \in X(N)$ однозначно определена траектория $\mathbf{Tr}(i, \hat{T})$, т.е. последовательность $i_0, i_1, \dots, i_n, \dots$ удовлетворяющая равенствам $i_0 = i$ и $i_n = \hat{T}(i_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$. В силу конечности множества $X(N)$ для каждой траектории $\mathbf{Tr}(i, \hat{T})$ определен момент первого возвращения $Q(i, \hat{T})$, после которого, т.е. при $n \geq Q(i, \hat{T})$, траектория “зацикливается” (становится периодической) с длиной минимального цикла $C(i, \hat{T})$.

Пусть $\#(X)$ — это число элементов множества X . Обозначим через

$$\mathcal{Q}(x, \hat{T}) = \frac{1}{N} \#\{i : Q(i, \hat{T}) < xN^\gamma\}, \quad \mathcal{C}(x, \hat{T}) = \frac{1}{N} \#\{i : C(i, \hat{T}) < xN^\gamma\}, \quad x \geq 0 \quad (15)$$

нормированные функции распределения моментов первого возвращения и длин циклов траекторий отображения \hat{T} . Обозначим через $\mathcal{P}(\hat{T})$ долю коллапсирующих элементов отображения \hat{T} , т.е. долю тех i , при которых $C(i, \hat{T}) = 1$. Характеристики (15) при фиксированных α, γ, N

являются случайными функциями; обозначим через $Q^{(\gamma)}(x; \alpha, N)$, $C^{(\gamma)}(x; \alpha, N)$, $x \geq 0$, их математические ожидания. Обозначим также через $P^{(\gamma)}(x; \alpha, N)$, $x \in [0, 1]$, функцию распределения случайной величины $\mathcal{P}(\hat{T})$.

Теорема 3 (см. [52, 54]). *При любых $\alpha, \beta > 0$ и $0 < \gamma < 1/2$ справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q^{(\gamma)}(x; \alpha, \beta N) = 1 - F^{(\gamma)}(\beta x; \alpha), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} C^{(\gamma)}(x; \alpha, \beta N) = H^{(\gamma)}(\beta x; \alpha),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - P^{(\gamma)}(x; \alpha, N)) dx = \alpha^\gamma \int_0^\infty F^{(\gamma)}(x, \alpha) dx,$$

где

$$F^{(\gamma)}(x; \alpha) = e^{-\alpha^\gamma x} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + q_i(\alpha, \gamma)x}{e^{q_i(\alpha, \gamma)x}},$$

$$H^{(\gamma)}(x; \alpha) = 1 - F^{(\gamma)}(x; \alpha) + \alpha^\gamma \int_x^\infty F^{(\gamma)}(y; \alpha) dy + x \int_x^\infty F^{(\gamma)}(y; \alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i(\alpha, \gamma)^2}{1 + q_i(\alpha, \gamma)y} dy.$$

Отметим, что выше описан лишь один частный случай отображений с одним поглощающим центром — с переходными вероятностями порождаемыми дискретизацией функции $q(\alpha, \gamma; t) = (t + \alpha)^{\gamma-1}$ выбор которой продиктован тем эвристическим соображением, что плотность абсолютно непрерывной инвариантной меры Синая–Рюэлля–Боуэна для отображения $F^{(\gamma)}$ имеет степенные особенности с показателем $\gamma - 1$ в точках $t = 0, 1$.

Доказательство теоремы 3 опирается на исследование асимптотик значений элементарных симметрических функций на вероятностных распределениях специального вида. Пусть функция $p(k, n)$ при $k = 1, 2, \dots, n$ определена равенством

$$p(k, n) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} q(t) dt,$$

где

$$q(t) = \alpha\beta(t)t^{\gamma-1} \geq 0, \quad \int_0^1 q(t) dt = 1, \quad \beta(0) = 1, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \gamma \leq 1.$$

Теорема 4 (см. [54]). *При $n \rightarrow \infty$ справедливы предельные соотношения*

$$\pi(m, n) \rightarrow e^{-\frac{1}{2}(\int_0^1 q^2(t) dt)x^2} \quad \text{при} \quad \frac{m}{\sqrt{n}} \rightarrow x, \quad \frac{1}{2} < \gamma \leq 1;$$

$$\pi(m, n) \rightarrow e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \quad \text{при} \quad \frac{m}{\sqrt{n(\log n)^{-1}}} \rightarrow x, \quad \gamma = \frac{1}{2};$$

$$\pi(m, n) \rightarrow \mathcal{L}(\gamma, \alpha x) \quad \text{при} \quad \frac{m}{n^\gamma} \rightarrow x, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}$$

где $\pi(m, n) = m! \sigma_m(p(1, n), p(2, n), \dots, p(n, n))$, $\sigma_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — элементарная симметрическая функция порядка m , а $\mathcal{L}(\gamma, z)$ — целая аналитическая функция, определяемая бесконечным произведением

$$\mathcal{L}(\gamma, z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[1 + \frac{k^\gamma - (k-1)^\gamma}{\gamma} z \right] e^{-\frac{k^\gamma - (k-1)^\gamma}{\gamma} z} \right\}.$$

Отметим, что при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ и $|x| < \frac{\gamma}{\alpha}$ асимптотическое представление для $\pi(m, n)$ может быть записано в несколько более удобной форме:

$$\pi(m, n) \rightarrow e^{-\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^\gamma - (k-1)^\gamma}{\gamma} \right)^r \right\} (\alpha x)^r} \quad \text{при} \quad \frac{m}{n^\gamma} \rightarrow x.$$

4.2. Принцип соответствия

Вернемся к анализу дискретизаций динамических систем (1). Каждая ν -дискретизация $F_\nu^{(\gamma)}$ отображает конечную решетку $\mathbb{L}_\nu = \{0, 1/\nu, \dots, (\nu - 1)/\nu, 1\}$ в себя. Поэтому для любого $\xi \in \mathbb{L}_\nu$ определены момент первого возвращения $Q(\xi, F_\nu^{(\gamma)})$ и длина соответствующего цикла $Q(\xi, F_\nu^{(\gamma)})$ с соответствующими функциями распределения $\mathcal{Q}(x; F_\nu^{(\gamma)})$ и $\mathcal{C}(x; F_\nu^{(\gamma)})$, а также число коллапсирующих элементов $\mathcal{P}(F_\nu^{(\gamma)})$.

Как отмечалось, анализ последовательностей $\{\mathcal{Q}(x, F_\nu^{(\gamma)})\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mathcal{C}(x, F_\nu^{(\gamma)})\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mathcal{P}(F_\nu^{(\gamma)})\}_{n=1}^{\infty}$ существенно сложнее анализа последовательностей $\{\mathcal{Q}(x; \hat{T}_\nu)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mathcal{C}(x; \hat{T}_\nu)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mathcal{P}(\hat{T}_\nu)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных по случайному отображению с единым поглощающим центром. Попытаемся преодолеть эту трудность с помощью предлагаемого ниже принципа соответствия, не являющегося математической теоремой, но допускающего эвристическое обоснование аналогичное рассуждениям из [36, раздел 2], которые в свою очередь близки к соответствующим фрагментам работ [43, 58]. Численные эксперименты свидетельствуют, что точность выполнения этого принципа высока.

Обозначим при $x \geq 0$ через

$$\mathbf{q}^{(\gamma)}(x; N, M) = \frac{1}{M} \sum_{\nu=N+1}^{N+M} \mathcal{Q}(x; F_\nu^{(\gamma)}), \quad \mathbf{c}^{(\gamma)}(x; N, M) = \frac{1}{M} \sum_{\nu=N+1}^{N+M} \mathcal{C}(x; F_\nu^{(\gamma)}).$$

усредненные (или регуляризованные) по M решеткам $\mathbb{L}_{N+1}, \mathbb{L}_{N+2}, \dots, \mathbb{L}_{N+M}$ функции распределения $\mathcal{Q}(x; F_\nu^{(\gamma)})$ и $\mathcal{C}(x; F_\nu^{(\gamma)})$. А через $\mathbf{p}^{(\gamma)}(x; N, M)$, $x \in [0, 1]$, обозначим функцию распределения множества $\{\mathcal{P}(F_\nu^{(\gamma)}) : N < \nu \leq N + M\}$. Назовем подмножество \mathcal{N} множества натуральных чисел *плотным*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \#\{m \in \mathcal{N} : m \leq n\} = 1$.

Принцип соответствия. *Существуют такие константы $\alpha(\gamma), \beta(\gamma) > 0$ при которых для каждого достаточно большого натурального M может быть указано такое плотное множество $\mathcal{N}(M)$, что при достаточно больших $N \in \mathcal{N}(M)$ функции $\mathbf{q}^{(\gamma)}(x; N, M)$, $\mathbf{c}^{(\gamma)}(x; N, M)$ и $\mathbf{p}^{(\gamma)}(x; N, M)$ близки в метрике Леви [5] к функциям $Q^{(\gamma)}(x; \alpha, \beta N)$, $\mathcal{C}^{(\gamma)}(x; \alpha, \beta N)$, и $P^{(\gamma)}(x; \alpha, N)$, соответственно.*

Из принципа соответствия в отношении последовательностей \mathbf{q} и \mathbf{c} и из теоремы 3 вытекает что при выбранных наудачу $1 \ll M \ll N$ функции $\mathbf{q}^{(\gamma)}(x; M, N)$ и $\mathbf{c}^{(\gamma)}(x; M, N)$ должны быть близки к функциям $1 - F^{(\gamma)}(\beta x; \alpha)$ и $H^{(\gamma)}(\beta x; \alpha)$ соответственно. Это утверждение допускает численную проверку. Из принципа соответствия в отношении последовательностей \mathcal{P} и из теоремы 3 вытекает также, что при $1 \ll M \ll N$ среднее значение

$$\mu = \frac{1}{M} \sum_{m=N+1}^{N+M} \mathcal{P}(F_m^{(\gamma)}) = \int_0^1 (1 - \mathbf{p}^{(\gamma)}(x; M, N)) dx$$

должно быть близко к числу $\mu^{(\gamma)} = \alpha^\gamma \int_0^\infty F^{(\gamma)}(x, \alpha(\gamma)) dx$. Экспериментальное значение $\mu \approx 0,675$, оказалось близко к теоретическому значению $\mu^{(\gamma)} \approx 0,678$, посчитанному для $\alpha = 0,3$.

Аналогичные эксперименты выполнялись для значений $\gamma = 2/5, 2/7$ и др., и других значений параметров M, N . Все они подтвердили адекватность принципа соответствия.

Принцип соответствия был сформулирован в отношении трех конкретных комбинаторных характеристик дискретизаций отображений. Он применим и для анализа других комбинаторных характеристик, таких как статистики абсолютно коллапсирующих дискретизаций [36, с. 566], длин или зон притяжения максимального цикла дискретизации и т.д. *Нам неизвестны естественные комбинаторные характеристики дискретизаций отображений (1), для которых принцип соответствия не выполняется.*

Принцип соответствия переносится без изменений на другие системы с инвариантным хаотическим аттрактором в предположении, что особенность соответствующей инвариантной меры сосредоточена на прообразе неподвижной точки. Если последнее условие не выполнено, то нужно модифицировать принцип соответствия, опустив в определении случайного отображения $T_{\alpha, N}^{(\gamma)}$ условие неподвижности точки 0 и изменив естественным образом переходные вероятности. Следует отметить однако, что задача *формального обоснования принципа соответствия* остается открытой [8, 26, 28, 52].

5. СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И ШЕДОУИНГ

Рассмотрим дискретную динамическую систему (динамическую систему с дискретным временем), порождаемую отображением $f : \Omega \mapsto \Omega$, где Ω — компактное метрическое пространство с метрикой ρ . Как отмечалось в разделе 2.1, ее траектории могут весьма существенно отличаться от траекторий сколь угодно близких к ней однозначных дискретизаций [22]. Избежать этого в рамках однозначных дискретизаций, в общем случае, невозможно — как показано в [32, 33] для данной системы f всегда найдется сколь угодно близкая однозначная дискретизация, коллапс-компонента которой будет совпадать с наперед заданным f -инвариантным множеством (в частности, с неподвижной точкой отображения f или его циклом). В то же время избежать такого вырожденного, коллапсирующего поведения можно, как отмечалось в разделе 3.3, если вместо однозначных дискретизаций рассматривать дискретизации стохастические или многозначные. Здесь мы снова сталкиваемся с вопросом, возникающим в теории некорректных задач, — если возмущение φ изучаемой системы слишком велико, то поведение системы φ может существенно отличаться от поведения системы f . Если же возмущение недостаточно велико, то коллапс-эффекта не удастся избежать. Следовательно, важен вопрос о робастности исходной системы по отношению к различным уровням стохастических или многозначных возмущений. Чтобы найти разумный компромисс в случае многозначных дискретизаций, воспользуемся идеей *состоятельности*.

Ниже предполагается, что отображение $f : \Omega \mapsto \Omega$, порождающее рассматриваемую динамическую систему, является борелевским. Предположим, что \mathbb{L} — конечное подмножество (решетка) множества Ω , и рассмотрим в качестве дискретизации отображения f многозначное отображение $\varphi : \mathbb{L} \mapsto 2^{\mathbb{L}}$ с графиком $\mathbf{Gr}(\varphi) \subseteq \mathbb{L} \times \mathbb{L} \subseteq \Omega \times \Omega$. Для оценки точности такой дискретизации будем использовать величины

$$d(\varphi, f) = \mathbf{Sep}(\mathbf{Gr}(\varphi), \mathbf{Gr}(f)) \quad \text{и} \quad d(f, \varphi) = \mathbf{Sep}(\mathbf{Gr}(f), \mathbf{Gr}(\varphi)).$$

Отображение $\varphi : \mathbb{L} \mapsto 2^{\mathbb{L}}$ будет называться α -*состоятельной дискретизацией отображения f* , если выполняется по меньшей мере одно из следующих требований:

C1. Существует такое покрытие $X(\xi)$, $\xi \in \mathbb{L}$, множества Ω , что $X(\xi) \subseteq \overline{\mathcal{O}_\alpha(\xi)}$ при $\xi \in \mathbb{L}$ и

$$f(X(\xi)) \subseteq X(\varphi(\xi)).$$

С2. Существуют такие непустые подмножества $\Xi(x)$, $x \in \Omega$, решетки \mathbb{L} , что $\Xi(x) \subseteq \overline{\mathcal{O}_\alpha(x)}$ и

$$\varphi(\Xi(x)) \supseteq \Xi(f(x)).$$

Отметим некоторые примеры α -состоятельных дискретизаций.

Пример 4. Для любого $\xi \in \mathbb{L}$ обозначим через $X(\xi)$ подмножество множества Ω , определяемое равенством

$$X(\xi) = \left\{ x : \rho(x, \xi) = \min_{\eta \in \mathbb{L}} \rho(x, \eta) \right\},$$

и для любого подмножества $\Omega_* \subseteq \Omega$ положим

$$\Xi(\Omega_*) = \left\{ \xi : X(\xi) \cap \Omega_* \neq \emptyset \right\}.$$

Тогда многозначное отображение $\varphi : \mathbb{L} \mapsto 2^{\mathbb{L}}$, определяемое при $\xi \in \mathbb{L}$ равенством $\varphi(\xi) = \Xi(f(X(\xi)))$, будет $h(\mathbb{L})$ -состоятельной дискретизацией отображения f , причем $d(\varphi, f) \leq h(\mathbb{L})$. В этом примере выполнено условие С1.

Пример 5. Положим $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{O}_{h(\mathbb{L})}(\mathbf{Gr}(f))} \cap (\mathbb{L} \times \mathbb{L})$ и рассмотрим многозначное отображение $\varphi : \mathbb{L} \mapsto 2^{\mathbb{L}}$ с графиком \mathcal{A} . Тогда это отображение является $h(\mathbb{L})$ -состоятельной дискретизацией отображения f , причем $d(\varphi, f) \leq h(\mathbb{L})$. В этом примере также выполнено условие С1.

Пример 6. Пусть $\psi : \mathbb{L} \mapsto 2^{\mathbb{L}}$ — некоторое отображение, удовлетворяющее условию $d(f, \psi) \leq \alpha$. Тогда многозначное отображение $\varphi(\xi) = \overline{\mathcal{O}_{2\alpha}(\psi(\xi))} \cap \mathbb{L}$ будет α -состоятельной дискретизацией отображения f , причем $d(\varphi, f) \leq 3\alpha$. В этом примере выполнено условие С2 с $\Xi(x) = \overline{\mathcal{O}_\alpha(x)} \cap \mathbb{L}$.

Обозначим через $C(\varphi, f)$ верхнюю грань тех α , для которых φ является α -состоятельной дискретизацией отображения f . Рассмотрим в качестве дискретизации отображения f отображение $\varphi : \mathbb{L} \mapsto 2^{\mathbb{L}}$ с графиком $\mathbf{Gr}(\varphi) \subseteq \mathbb{L} \times \mathbb{L} \subseteq \Omega \times \Omega$.

Напомним определения траектории и псевдотраектории для однозначного и многозначного отображений — они несколько отличаются. Последовательность $\mathbf{y} = y_0, y_1, \dots, y_N$ называется *траекторией* однозначного отображения f , если при $n = 0, 1, \dots, N - 1$ выполняются равенства $y_{n+1} = f(y_n)$; она называется *траекторией* многозначного отображения φ , если при $n = 0, 1, \dots, N - 1$ выполняются включения $y_{n+1} \in \varphi(y_n)$. Последовательность y_0, y_1, \dots, y_N называется γ -*псевдотраекторией* однозначного отображения f , если при $n = 0, 2, \dots, N - 1$ выполняются неравенства $\rho(y_{n+1}, f(y_n)) \leq \gamma$; называется γ -*псевдотраекторией* многозначного отображения φ , если при $n = 0, 2, \dots, N - 1$ выполняются неравенства $\mathbf{Sep}(y_{n+1}, \varphi(y_n)) \leq \gamma$. Через $\mathbf{Tr}(f)$ будет обозначаться множество траекторий системы f , а через $\mathbf{Tr}(\varphi)$ — множество траекторий системы φ . Иногда необходимо более точно определить, какому множеству принадлежат элементы траектории, или какому γ отвечают элементы псевдотраектории. В этом случае обозначим через $\mathbf{Tr}(f, S, \gamma)$ множество всех конечных или бесконечных γ -псевдотраекторий отображения f , принадлежащих целиком множеству $S \subseteq \Omega$. Поскольку каждая истинная траектория может рассматриваться как 0-псевдотраектория, то множество всех конечных или бесконечных траекторий отображения f , принадлежащих целиком множеству S , будет обозначаться через $\mathbf{Tr}(f, S, 0)$. Так как каждая траектория является также γ -псевдотраекторией для любого $\gamma > 0$, то $\mathbf{Tr}(f, S, 0) \subset \mathbf{Tr}(f, S, \gamma)$. Это включение строгое, поскольку не каждая псевдотраектория является истинной траекторией.

Псевдотраектории часто возникают как результат ошибок округления при компьютерном вычислении траекторий; при этом накопление ошибок округления может быстро привести

к утере всякой связи между вычисленной псевдотраекторией и исходной траекторией. Понятие шедоунга (теневого траектории), приводимое ниже, предоставляет альтернативную, более практическую форму сравнения траекторий и псевдотраекторий.

Говорят, что отображение f обладает свойством шедоунга с положительными параметрами α и β на замкнутом подмножестве K множества Ω , если при каждом $0 \leq \gamma \leq \beta$ для любой конечной γ -псевдотраектории $\mathbf{y} \subseteq K$ отображения f найдется такая его истинная траектория $\mathbf{x} = \{x_n\} \in \mathbf{Tr}(f)$, что

$$\rho(x_n, y_n) \leq \alpha\gamma$$

при всех n , при которых \mathbf{y} определено.

Свойством шедоунга обладают многие системы с хаотическим поведением; классическим примером являются гиперболические диффеоморфизмы. Факт наличия у системы свойства шедоунга, часто интерпретируется как подтверждение того, что поведение компьютерной модели отражает поведение исходной системы (по крайней мере на конечных временных интервалах) в том смысле, что вблизи наблюдаемой в ходе компьютерного моделирования псевдотраектории всегда найдется истинная траектория системы.

Теорема 5. (a) Для любой динамической системы f справедливо соотношение

$$\mathbf{Sep}(\mathbf{Tr}(f), \mathbf{Tr}(\varphi)) \leq C(f, \varphi).$$

(b) Если система f обладает свойством шедоунга на Ω с параметрами α и β , то для любого многозначного отображения φ , удовлетворяющего условию $2d(f, \varphi) \leq \beta$, справедливо соотношение

$$\mathbf{Sep}(\mathbf{Tr}(\varphi), \mathbf{Tr}(f)) \leq 2\alpha d(f, \varphi) + d(\varphi, f).$$

Эта теорема показывает, что динамика исходной системы f близка к динамике многозначной дискретизации φ , при условии, что последняя состоятельна, система f обладает свойством шедоунга и графики $\mathbf{Gr}(f)$, $\mathbf{Gr}(\varphi)$ близки в метрике Хаусдорфа.

Из теоремы 5 вытекает ряд полезных следствий; остановимся на одном из них. Напомним, что точка $\xi \in \mathbb{L}$ называется *циклической* для отображения $\varphi : \mathbb{L} \mapsto 2^{\mathbb{L}}$, если найдется такое натуральное число p , при котором $\xi \in \varphi^p(\xi)$. Бесконечная траектория $\mathbf{x} = x_0, x_1, \dots$ отображения f называется *рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N , что для любого натурального M выполняется неравенство $\mathbf{Sep}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*) \leq \varepsilon$, где $\mathbf{x}_* = x_M, \dots, x_{M+N-1}$. Другими словами, траектория рекуррентна, если она может быть аппроксимирована с любой наперед заданной точностью некоторой своей достаточно длинной подтраекторией.

Следствие 2. (a) Пусть траектория $\mathbf{x} = x_0, x_1, \dots$ отображения f рекуррентна и пусть φ — дискретизация отображения f . Тогда для любого $\alpha > C(\varphi, f)$ найдется периодическая траектория ξ_1, ξ_2, \dots отображения φ , удовлетворяющая условию

$$\rho(x_n, \xi_n) \leq \alpha, \quad n = 0, 1, \dots$$

(b) Если система f обладает свойством шедоунга на Ω с параметрами α, β и ξ_0, ξ_1, \dots — периодическая траектория отображения φ , то найдется рекуррентная траектория \mathbf{x} отображения f , удовлетворяющая условию

$$\rho(x_n, \xi_n) \leq 2\alpha d(f, \varphi) + d(\varphi, f), \quad n = 0, 1, \dots$$

5.1. Концепция взаимного шедоунга

Обсудим теперь важный вопрос об интерпретации свойства шедоунга при численном моделировании. Теоремы 5 было бы вполне достаточно для сопоставления свойств исходной системы и ее дискретизации, если бы отображение f точно описывало динамику исходной системы. Однако во многих практических ситуациях это не так. Часто само отображение f появляется в результате аппроксимации/идеализации некоторой динамической системы g с неизвестным точным описанием. Информация о системе g нередко носит качественный характер. Например, может быть известно лишь, что отображение g непрерывно или удовлетворяет некоторым оценкам, или что оно достаточно близко к f в некоторой метрике и т.п. В такой ситуации вместо утверждений типа теоремы 5 разумно использовать утверждения о подобии потоков, порождаемых дискретизацией φ идеальной системы f и реальной, но неизвестной в явном виде, системы g .

В этой ситуации более естественно воспользоваться не концепцией шедоунга, а концепцией *взаимного шедоунга*. Отметим еще раз, что наличие у системы свойства шедоунга часто интерпретируется как подтверждение того, что поведение компьютерной модели отражает поведение исходной системы (по крайней мере на конечных временных интервалах) в том смысле, что вблизи наблюдаемой в ходе компьютерного моделирования псевдотраектории всегда найдется истинная траектория системы.

Не меньшее практическое значение имеет и обратный вопрос — каждая ли истинная траектория может быть аппроксимирована некоторой псевдотраекторией? Здесь важен вопрос о том, из какого класса \mathcal{T} выбираются псевдотраектории. Это, например, может быть класс псевдотраекторий, порождаемых данным конкретным методом дискретизации или возникающих в результате особенностей машинной арифметики. Как правило, лишь самые общие характеристики этого класса псевдотраекторий известны а priori. Проблема *обратного шедоунга* по отношению к такому классу \mathcal{T} может быть сформулирована в следующей форме: определить, каждая ли истинная траектория данной системы f может быть аппроксимирована некоторой псевдотраекторией из данного класса \mathcal{T} . Обсуждение понятий прямого и обратного шедоунга содержится, например, в [65, Appendix C].

Подчеркнем, что класс псевдотраекторий \mathcal{T} играет несимметричную роль в понятиях прямого и обратного шедоунга. В классической лемме о шедоунге (лемме о тени) класс \mathcal{T} состоит из *всех мыслимых* псевдотраекторий отображения f и, таким образом, является наибольшим возможным. В то же время в обратном шедоунге мы имеем дело с более ограниченными классами \mathcal{T} , такими, например, как *класс всех траекторий отображений φ , достаточно близких к f в метрике C^0* и т.п. Эти две формы шедоунга (по отношению к указанным выше классам) часто сосуществуют одновременно (см. также [6, 7, 23, 24]).

Положим

$$\rho_\infty(\varphi, f) = \sup_{x \in \Omega} \rho(\varphi(x), f(x)).$$

Скажем, что динамическая система, порождаемая отображением $f : \Omega \mapsto \Omega$, обладает на множестве $K \subseteq \Omega$ свойством *взаимного шедоунга с положительными параметрами α и β* , если при любом $0 \leq \gamma \leq \beta$ для любой конечной псевдотраектории $\mathbf{y} = \{y_n\} \in \mathbf{Tr}(f, K, \gamma)$ и любого отображения $\varphi : \Omega \mapsto \Omega$, удовлетворяющего условию

$$\gamma + \rho_\infty(\varphi, f) \leq \beta,$$

найдется такая истинная траектория $\mathbf{x} = \{x_n\} \in \mathbf{Tr}(\varphi, \Omega, 0)$, что

$$\rho(x_n, y_n) \leq \alpha(\gamma + \rho_\infty(\varphi, f))$$

для всех n , при которых псевдотраектория \mathbf{y} определена.

Мы можем переформулировать теперь теорему 5 в следующей форме.

Следствие 3. *Если система f обладает свойством взаимного шедоунга с параметрами α, β на Ω , то для любой системы φ , удовлетворяющей условию $2d(f, \varphi) + \rho_\infty(\varphi, f) \leq \beta$, справедлива оценка*

$$\text{Sep}(\text{Tr}(\varphi), \text{Tr}(g)) \leq \alpha(2d(f, \varphi) + \rho_\infty(\varphi, f)) + \max\{d(\varphi, f), C(\varphi, f)\}.$$

5.2. Полугиперболические липшицевы отображения

Применение теоремы 3 и многих других подобных утверждения требует конструктивных условий, обеспечивающих свойство взаимного шедоунга. Обычно в работах посвященных шедоунгу устанавливается лишь свойство прямого шедоунга (см., например, [15, 24, 64, 66]), причем при достаточно ограничительном предположении о том, что исследуемая система порождается гиперболическим диффеоморфизмом. Гиперболичность, однако, накладывает на динамическую систему гораздо более жесткие ограничения, чем требуется для шедоунга, например требование существования непрерывного инвариантного расщепления касательного пространства на устойчивое и неустойчивое многообразия. Кроме того, как мы видели выше, существует множество важных и интересных динамических систем, в которых отсутствует гладкость и обратимость отображений. Многие полезные свойства гиперболических диффеоморфизмов остаются в силе для полугиперболических отображений, которые были введены в [24] для локальных диффеоморфизмов (см. также [1, 11], где обсуждаются родственные концепции), и затем распространены на липшицевы отображения в [25].

Ниже показывается, что полугиперболичность липшицевых отображений влечет свойство взаимного шедоунга. Четверку $\mathbf{s} = (\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$ неотрицательных чисел назовем *дихотомичной*, если

$$\lambda_s < 1 < \lambda_u \tag{16}$$

и

$$(1 - \lambda_s)(\lambda_u - 1) > \mu_s \mu_u. \tag{17}$$

Ясно, что для произвольных чисел λ_s, λ_u , удовлетворяющих (16), четверка \mathbf{s} дихотомична, если произведение $\mu_s \mu_u$ достаточно мало.

Пусть Ω — это компактное подмножество пространства \mathbb{R}^d с непустой внутренностью. Пусть $\mathbf{s} = (\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$ — некоторая дихотомичная четверка и K — компактное подмножество внутренности множества Ω . Липшицево отображение $f : \Omega \mapsto \Omega$ называется \mathbf{s} -полугиперболическим на множестве K , если найдутся такие положительные числа k и δ , что для каждого $x \in K$ существует расщепление пространства \mathbb{R}^d ,

$$\mathbb{R}^d = E_x^s \oplus E_x^u,$$

с соответствующими проекторами P_x^s и P_x^u , удовлетворяющее следующим свойствам:

SH0. $\dim(E_x^s) = \dim(E_{f(x)}^s)$, если $x, f(x) \in K$.

SH1. $\sup_{x \in K} \{|P_x^s|, |P_x^u|\} \leq k$.

SH2. Для любого $x \in K$, при котором $f(x) \in K$, и любых $u, \tilde{u} \in E_x^s, v, \tilde{v} \in E_x^u$ таких, что $|u|, |\tilde{u}|, |v|, |\tilde{v}| \leq \delta$, выполняются включения

$$x + u + v \in \Omega$$

и неравенства

$$\begin{aligned} |P_{f(x)}^s(f(x+u+v) - f(x+\tilde{u}+v))| &\leq \lambda_s |u - \tilde{u}|, \\ |P_{f(x)}^s(f(x+u+v) - f(x+u+\tilde{v}))| &\leq \mu_s |v - \tilde{v}|, \\ |P_{f(x)}^u(f(x+u+v) - f(x+\tilde{u}+v))| &\leq \mu_u |u - \tilde{u}|, \\ |P_{f(x)}^u(f(x+u+v) - f(x+u+\tilde{v}))| &\geq \lambda_u |v - \tilde{v}| \end{aligned}$$

Отметим, что в отличие от определения гиперболичности для диффеоморфизмов, здесь не предполагается ни инвариантность подпространств E_x^s и E_x^u относительно дифференциала отображения f , ни их непрерывная зависимость от x . В [24] были введены гладкие (\mathbf{s}, k) -полугиперболические отображения, которые, очевидно, \mathbf{s} -полугиперболически для любой дихотомичной четверки $\mathbf{s}_\varepsilon = (\lambda_s + \varepsilon, \lambda_u - \varepsilon, \mu_s + \varepsilon, \mu_u + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Очевидно также, что гиперболические (по отношению к евклидовой метрике) диффеоморфизмы множества K являются полугиперболическими в смысле определения из [24], и значит, полугиперболически как липшицевы отображения для подходящей тройки (\mathbf{s}, k, δ) и в смысле определения, данного выше.

Основной результат о связи свойств полугиперболичности и взаимного шедоунга может быть теперь сформулирован следующим образом.

Теорема 6. Пусть $f : \Omega \mapsto \Omega$ — липшицево отображение, \mathbf{s} -полугиперболическое на компактном подмножестве K множества Ω с константами k, δ . Тогда оно обладает на K свойством взаимного шедоунга (по отношению к любому непрерывному однозначному отображению $\varphi : \Omega \mapsto \Omega$) с параметрами

$$\alpha(\mathbf{s}, k) = k \frac{\lambda_u - \lambda_s + \mu_s + \mu_u}{(1 - \lambda_s)(\lambda_u - 1) - \mu_s \mu_u}$$

и

$$\beta(\mathbf{s}, k, \delta) = \delta k^{-1} \frac{(1 - \lambda_s)(\lambda_u - 1) - \mu_s \mu_u}{\max\{\lambda_u - 1 + \mu_s, 1 - \lambda_s + \mu_u\}}.$$

Другие свойства полугиперболических отображений см., например, в [6, 7, 13, 14, 23–25, 27]

6. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПЛАНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

Пример поведения дискретизации округления отображения поворота на плоскости (7) показывает, что трудности исследования дискретизованных систем присущи не только системам с хаотическим поведением. Вернемся к задаче численного моделирования динамики *линейного отображения поворота плоскости на угол ϑ* :

$$\begin{aligned} x &\mapsto x_0 + (x - x_0) \cos \vartheta - (y - y_0) \sin \vartheta, \\ y &\mapsto y_0 + (x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{18}$$

При рассмотрении результатов численного моделирования поведения дискретизованных версий данного отображения мы в очередной раз сталкиваемся с парадоксальными результатами.

Как видно из рис. 5 фазовый портрет отображения (6) весьма далек от фазового портрета отображения поворота (18). Основное отличие заключается в том, что отображение (6) диссипативно. Но именно это свойство отображения (6) удастся обосновать теоретически (хотя доказательство оказывается не столь простым, что говорит о том, насколько плохо пока изучена геометрия дискретизованных, даже линейных!, отображений).

Теорема 7 (см. [29]). Если $\vartheta = 0, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}$, то каждая траектория отображения (6) периодична с периодом 1, 2, 4 соответственно.

Если $(x_0, y_0) = 0$ и $\vartheta \neq 0, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}$, то каждая траектория отображения (6) рано или поздно попадает в точку 0.

Если $(x_0, y_0) \neq 0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{L}_{1,1}$ и $\vartheta \neq 0, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}$, то найдется такое число $r_0 > 0$, что то каждая траектория отображения (6) рано или поздно попадает в круг радиуса r_0 с центром в точке (x_0, y_0) .

Результаты моделирования по формулам (7) (см. рис. 6) внешне получились более соответствующими поведению траекторий непрерывного отображения поворота T_ϑ , хотя и в этом случае видны качественные отличия. Полученная картинка оказалась похожей на “кольца Сатурна” с характерными зонами уплотнения и разряжения. Формально обосновать полученные результаты численного моделирования, в частности ответить на естественные вопросы:

- КАКОВЫ ПЛОТНОСТИ ЦИКЛОВ ОТОБРАЖЕНИЯ (7) ИЛИ ТОЧЕК, НЕ ИМЕЮЩИХ ПРООБРАЗА, ОТ ЗНАЧЕНИЙ КОТОРЫХ ЕСТЕСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ ЗАВИСИТ СТЕПЕНЬ КАРТИНКИ БЫТЬ ПОХОЖЕЙ НА “КОЛЬЦА САТУРНА”?
- БУДУТ ЛИ ВСЕ ТРАЕКТОРИИ ОТОБРАЖЕНИЯ (7) ОГРАНИЧЕННЫМИ ИЛИ СРЕДИ НИХ ЕСТЬ ТРАЕКТОРИИ УХОДЯЩИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТЬ?

и пр., в этом случае оказалось существенно сложнее, чем в случае отображения (6).

Исследование проблемы обратимости дискретизованных отображений поворота плоскости проводится в следующем разделе.

6.1. Проблема обратимости дискретизации округления линейных отображений

Пусть, как обычно, \mathbb{Z} — множество целых чисел, а $\mathbb{L}_{1,1} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ — решетка точек с целочисленными координатами в \mathbb{R}^2 . Обозначим через $\text{ROUND}(x)$ оператор округления до ближайшего целого на прямой \mathbb{R} определяемый равенством

$$\text{ROUND}(x) = i \in \mathbb{Z} : x - \frac{1}{2} \leq i < x + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

и аналогично определим по координатам оператор округления до ближайшего целого на плоскости \mathbb{R}^2 :

$$\text{ROUND}(x) = (\text{ROUND}(x_1), \text{ROUND}(x_2)) \in \mathbb{L}_{1,1}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^2 будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Рассмотрим линейное отображение $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и сопоставим ему его дискретизацию (округления) $\mathcal{A} : \mathbb{L}_{1,1} \rightarrow \mathbb{L}_{1,1}$, определяемую равенством:

$$\mathcal{A}(x) := \text{ROUND}(Ax), \quad x \in \mathbb{L}_{1,1}. \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что в силу (19) отображение \mathcal{A} можно считать действующим из \mathbb{R}^2 в $\mathbb{L}_{1,1}$; его можно однозначно определить также как такое отображение $\mathcal{A} : \mathbb{L}_{1,1} \rightarrow \mathbb{L}_{1,1}$, для которого выполняется соотношение

$$\mathcal{A}(x) - Ax \in \Pi := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad z \in \mathbb{L}_{1,1}. \quad (20)$$

Дискретизации округления являются частным случаем так называемых стеттеровских или общих дискретизаций. Напомним [68], что стеттеровской или общей дискретизацией отображения Ax на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$ называется такое отображение $\mathcal{A} : \mathbb{L}_{1,1} \rightarrow \mathbb{L}_{1,1}$, что

$$\mathcal{A}(x) - Ax \in \bar{\Pi} := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad z \in \mathbb{L}_{1,1}. \quad (21)$$

Отметим, что в отличие от (20) соотношение (21) определяет отображение \mathcal{A} неоднозначно.

Ниже нас будут интересовать, в основном, дискретизации округления, хотя, конечно, избежать вопроса о свойствах общих дискретизаций при этом не удастся. Одним из первых вопросов (ответ на который не вполне очевиден), возникающих при рассмотрении дискретизаций округления, является вопрос об их обратимости:

СУЩЕСТВУЮТ ЛИ ТАКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ A , ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОКРУГЛЕНИЯ КОТОРЫХ \mathcal{A} ОБРАТИМА НА $\mathbb{L}_{1,1}$?

Приводимые ниже примеры показывают, что ответ на этот вопрос положителен.

Пример 7. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}, \quad m, n, p, q \in \mathbb{Z},$$

где $mq - np = \pm 1$. Тогда отображение A действует на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$, т.е. $\mathcal{A} \equiv A$, и обратимо на ней.

Пример 8 (см. [60]). Пусть

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0.$$

Тогда дискретизация \mathcal{A} округления отображения A обратима на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$, причем отображения \mathcal{A} и \mathcal{A}^{-1} имеют вид:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{bmatrix} \text{ROUND}(\gamma x_1) - x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \text{ROUND}(\gamma x_2) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{L}_{1,1}. \quad (22)$$

Как и в предыдущем случае, доказательство утверждения примера 8 проводится непосредственной проверкой. Следует отметить, что пример 8 не столь прост, как кажется на первый взгляд. Так, представление (22) для отображения \mathcal{A} перестает быть верным, если γ — отрицательное рациональное число вида $-\frac{m}{2n}$; этот факт непосредственно следует из того, что

$$\text{ROUND}(-x) \neq -\text{ROUND}(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (23)$$

Из этого же соотношения (23) вытекает, что $\mathcal{A}^{-1}(x) \neq \text{ROUND}(A^{-1}x)$ в случае, когда γ — отрицательное рациональное число вида $-\frac{m}{2n}$.

Пример 9. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Тогда дискретизация округления \mathcal{A} отображения A обратима на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$, причем $\mathcal{A}^{-1}(x) = \text{ROUND}(A^{-1}x)$.

Пример 10. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix},$$

причем угол ϑ таков, что числа $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$ иррациональны. Тогда дискретизация округления \mathcal{A} отображения A необратима на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$.

В связи с приведенными примерами возникает вопрос об описании отображений A с обратимой дискретизацией округления \mathcal{A} . Следует отметить, что а priori неочевидно, является ли отображение, обратное к \mathcal{A} , также отображением, являющимся дискретизацией некоторого линейного отображения \mathbb{R}^2 в себя. Если ответ положителен, то может ли соответствующее отображение быть выбрано из класса дискретизаций округления или из более широкого класса общих дискретизаций? Поэтому основной вопрос может быть конкретизирован:

существуют ли линейные отображения A , дискретизация округления которых \mathcal{A} линейно обратима на $\mathbb{L}_{1,1}$ в классе дискретизаций округления, т.е. для которых найдется линейное отображение B с дискретизацией округления \mathcal{B} такой, что $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \equiv I$?

Более общий вариант этого вопроса таков:

существуют ли линейные отображения A , дискретизация округления которых \mathcal{A} линейно обратима на $\mathbb{L}_{1,1}$ в классе общих (стеттеровских) дискретизаций, т.е. для которых найдется линейное отображение B со стеттеровской дискретизацией \mathcal{B} такой, что $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \equiv I$?

Как показывает следующая лемма, класс линейных отображений, дискретизации которых обратимы, достаточно узок. В частности, обратимы дискретизации лишь таких линейных отображений, детерминанты которых равны 1.

Лемма 3. Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} — общие (стеттеровские) дискретизации линейных отображений A и B , соответственно, причем $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = I$ на $\mathbb{L}_{1,1}$. Тогда $AB = I$ и $\det A = \det B = 1$.

Приводимые ниже леммы 4, 5 и теорема 8 еще более ограничивает по сравнению с утверждением леммы 3 класс линейных отображений, дискретизации которых обратимы (в классе дискретизаций линейных отображений).

Выведем некоторые вспомогательные соотношения. Пусть A, B — линейные отображения в \mathbb{R}^2 и \mathcal{A}, \mathcal{B} — их общие (стеттеровские) дискретизации. Пусть, кроме того

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x) \equiv x, \quad x \in \mathbb{L}_{1,1}. \quad (24)$$

Тогда по лемме 3 $B = A^{-1}$ и можно написать цепочку равенств:

$$\begin{aligned} x &= (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = A\mathcal{B}(x) + \alpha(\mathcal{B}(x)) = \\ &= AA^{-1}x + A\beta(x) + \alpha(\mathcal{B}(x)) = x + A\beta(x) + \alpha(\mathcal{B}(x)), \end{aligned}$$

где

$$\alpha(x) = A(x) - \mathcal{A}(x), \quad \beta(x) = B(x) - \mathcal{B}(x).$$

Отсюда

$$A\beta(x) + \alpha(\mathcal{B}(x)) = 0$$

или

$$\beta(x) = -A^{-1}\alpha(\mathcal{B}(x)), \quad x \in \mathbb{L}_{1,1}. \quad (25)$$

Так как соотношение (24) равносильно соотношению

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) \equiv x, \quad x \in \mathbb{L}_{1,1}, \quad (26)$$

то из последнего (аналогично тому как это было проделано выше) получаем:

$$\alpha(x) = -A\beta(\mathcal{A}(x)), \quad x \in \mathbb{L}_{1,1}. \quad (27)$$

Введем теперь в рассмотрение два множества:

$$\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{R}^2 : z = \alpha(x), x \in \mathbb{L}_{1,1}\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{R}^2 : z = \beta(x), x \in \mathbb{L}_{1,1}\}.$$

Тогда из определения отображений $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ следует, что

$$\mathbb{A}, \mathbb{B} \subseteq \bar{\Pi}, \quad (28)$$

а с другой стороны, из соотношений (27) и (25) вытекает, что

$$\mathbb{A} \subseteq -A\mathbb{B}, \quad \mathbb{B} \subseteq -A^{-1}\mathbb{A},$$

откуда в силу обратимости отображения A (см. лемму 3)

$$\mathbb{A} = -A\mathbb{B}. \quad (29)$$

Из соотношений (28) и (29) получаем, что

$$\mathbb{A} \subseteq -\bar{\Pi} \cap A\bar{\Pi}, \quad \mathbb{B} \subseteq -\bar{\Pi} \cap A^{-1}\bar{\Pi}. \quad (30)$$

Лемма 4. Если дискретизация отображения A обратима и

$$A \neq \pm I, \quad A \neq \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

то многоугольники $\bar{\Pi} \cap A\bar{\Pi}$ и $\bar{\Pi} \cap A^{-1}\bar{\Pi}$ являются собственными подмножествами замкнутого квадрата $\bar{\Pi}$, и потому \mathbb{A} и \mathbb{B} неплотны в $\bar{\Pi}$ (см. рис. 14).

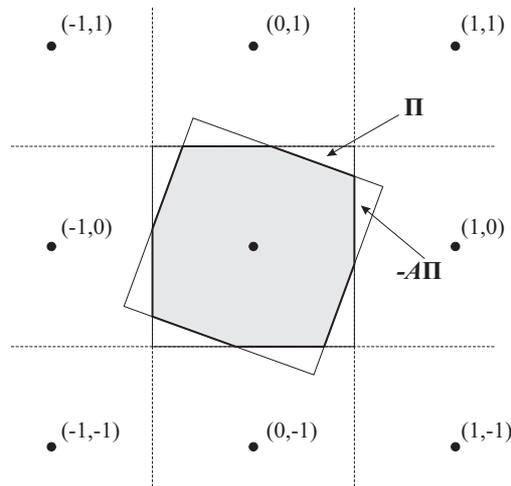


Рис. 14. Расположение множеств Π и $A\Pi$ для линейного отображения A с обратимой дискретизацией.

В следующей лемме указываются условия, при которых множество \mathbb{A} (или \mathbb{B}) плотно в Π и, следовательно, по лемме 4 дискретизация отображения A необратима.

Лемма 5. Пусть A — дискретизация округления отображения A . Тогда для того, чтобы множество \mathbb{A} было всюду плотным в Π (или в $\bar{\Pi}$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие Владимирова (см., например, теорему 9 ниже, а также [70, стр. 28]):

(A1) матрица $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ такова, что столбцы матрицы $[I, A^T] \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ рационально независимы.

Из лемм 4 и 5 вытекает следующая

Теорема 8. Пусть A — дискретизация округления линейного отображения A , а \mathcal{B} — обшая (стеттеровская) дискретизация линейного отображения B , причем $A \circ \mathcal{B} = I$. Тогда $\det A = 1$ и найдутся такие ненулевые вектора $z, w \in \mathbb{L}_{1,1}$, что $A^T z = w$.

Отметим, что из этой теоремы немедленно следует утверждение примера 10.

Итак, утверждения настоящего раздела показывают, что дискретизации линейных отображений лишь в исключительных случаях допускают обращение. А это значит, что при численном исследовании динамики обратимых непрерывных отображений как правило происходит потеря информации. Насколько она велика и насколько сильно эта потеря может сказаться на результатах моделирования — отдельный вопрос, частичному изучению которого посвящены последующие разделы.

6.2. Алгебра квазипериодических частотно измеримых множеств

Для получения ответов на вопрос о плотности циклов отображения (7) или точек, не имеющих прообразов, требуется развитие и обоснование ряда нестандартных теоретико-вероятностных конструкций для вероятностных мер, не являющихся счетно-аддитивными, — т.е. не подчиняющихся колмогоровской аксиоматике теории вероятностей. Так как развитый подход применим для исследования других ситуаций, связанных с анализом дискретизаций отображений, то его описанию будет посвящен настоящий раздел (см. также [70, 71]).

Одно из основных свойств непрерывного отображения поворота T_θ — сохранение меры Лебега, — теряется при переходе к дискретизации $\text{ROUND}(T_\theta(x))$ при любом “разумном” и “естественном” определении меры на решетке $\mathbb{L}_{1,1} \subset \mathbb{R}^2$. В то же время ясно, что именно свойство сохранения меры играет ключевую роль при исследовании “частотных” свойств многих непрерывных динамических систем. Поэтому одним из первых возникает вопрос о возможности определения меры на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$, которая сохранялась бы отображением $\text{ROUND}(T_\theta(x))$ — лишь при положительном ответе на этот вопрос можно надеяться на получение содержательных утверждений о свойствах дискретизаций непрерывных отображений.

Оказалось, что ответ на поставленный вопрос положителен; опишем кратко конструкцию построения соответствующей меры. для четверки целых чисел a_1, a_2 и $l_1, l_2 > 0$ обозначим через $\mathcal{R}(a_1, a_2, l_1, l_2)$ прямоугольник $([a_1, a_1 + l_1) \times [a_2, a_2 + l_2)) \cap \mathbb{L}_{1,1}$. Множество $A \subset \mathbb{L}_{1,1}$ назовем частотно измеримым, если найдется число $\mathcal{F}(A)$, $0 \leq \mathcal{F}(A) \leq 1$, (частота множества A) такое, что

$$\sup_{l_1, l_2 \geq N, a_1, a_2} \left| \frac{\#(A \cap \mathcal{R}(a_1, a_2, l_1, l_2))}{l_1 l_2} - \mathcal{F}(A) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Пример 11. Частотно-измеримыми множествами являются целочисленная решетка $\mathbb{L}_{1,1}$, для которой $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{1,1}) = 1$, а также любое конечное подмножество $A \subset \mathbb{L}_{1,1}$ решетки $\mathbb{L}_{1,1}$ — для всякого такого множества $\mathcal{F}(A) = 0$.

Совокупность \mathcal{S} частотно измеримых множеств замкнута относительно объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств и дополнения до $\mathbb{L}_{1,1}$, но не является алгеброй, поскольку не замкнута относительно пересечения множеств (и уж подавно, совокупность \mathcal{S} не является σ -алгеброй). При этом функционал $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow [0; 1]$ является конечно аддитивной вероятностной мерой, и потому тройку $(\mathbb{L}_{1,1}, \mathcal{S}, \mathcal{F})$ можно рассматривать как *вероятностное пространство, которое не подчиняется аксиоматике Колмогорова* [12, 49].

Опишем пример менее тривиального и более существенного для наших целей класса частотно-измеримых множеств.

Теорема 9. Пусть $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{\infty \times 2}$ — матрица, состоящая из счетного числа строк и двух столбцов, для которой всякая ее $(m \times 2)$ -подматрица Λ удовлетворяет условию:

(A1) столбцы матрицы $[I_2, \Lambda^T]$ рационально независимы,

где I_2 обозначает единичную матрицу второго порядка.

Тогда, для любого измеримого по Жордану множества³ $G \subset [0; 1]^m$ и любой $(m \times 2)$ -подматрицы Λ матрицы \mathcal{L} множество

$$Q_m(G, \Lambda) \equiv \{x \in \mathbb{L}_{1,1} : \Lambda x \in G + \mathbb{Z}^m\} \quad (31)$$

частотно измеримо, причем его частота $\mathcal{F}(Q_m(G, \Lambda))$ совпадает с m -мерной мерой Лебега $\text{mes} G$ множества G . При этом совокупность $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$ всех множеств вида (31) является алгеброй (полностью состоящей из частотно измеримых множеств).

Заметим, что матрицы Λ , удовлетворяющие условию (A1), образуют множество полной лебеговой меры, и в этом смысле типичны.

6.3. Правила интерпретации

Из равенства нулю частоты \mathcal{F} всякого конечного подмножества решетки следует существенная конечная аддитивность функционала \mathcal{F} . Отсюда также видно, что частота \mathcal{F} сосредоточена на бесконечных подмножествах решетки. Эти достаточно непривычные обстоятельства затрудняют восприятие тех частотно измеримых множеств, частоты которых отличны от 0 и 1. Поэтому при выполнении компьютерного эксперимента необходимы правила интерпретации утверждений типа: *событие $A \subseteq \mathbb{L}_{1,1}$ выполняется с частотой или с вероятностью p , $0 \leq p \leq 1$, по вероятностной мере \mathcal{F}* . Соответствующая трактовка является прямым следствием определения частоты \mathcal{F} , и один из наиболее простых ее вариантов следующий.

Для последовательностей целых чисел $l_1^{(n)}, l_2^{(n)} > 0$ и $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ с неограниченно возрастающими $l_1^{(n)}$ и $l_2^{(n)}$ обозначим через $p(A; \mathcal{R}^{(n)})$ долю тех точек x из прямоугольника

$$\mathcal{R}^{(n)} = [a_1^{(n)}, a_1^{(n)} + l_1^{(n)}) \times [a_2^{(n)}, a_2^{(n)} + l_2^{(n)}) \cap \mathbb{L}_{1,1}$$

для которых выполняется включение $x \in A$. Тогда

событие $A \subseteq \mathbb{L}_{1,1}$ выполняется с вероятностью p по вероятностной мере \mathcal{F} , если и только если независимо от выбора чисел $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ выполняется предельное соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} p(A; \mathcal{R}^{(n)}) = p$.

³ Напомним, что множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если оно ограничено и его граница ∂G имеет нулевую n -мерную меру Лебега: $\text{mes}_n \partial G = 0$.

При подсчете частот $p(A; \mathcal{R}^{(n)})$ множества $\mathcal{R}^{(n)}$ не могут выбираться произвольными, подчиняющимися лишь тому условию, что число их элементов неограниченно возрастает. Тем не менее, определенный произвол в выборе множеств $\mathcal{R}^{(n)}$ при подсчете относительных частот $p(A; \mathcal{R}^{(n)})$ имеется — например в качестве $\mathcal{R}^{(n)}$ могут выбираться объединения конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников с совместно растущими длинами сторон, возможны и другие способы выбора множеств $\mathcal{R}^{(n)}$.

6.4. Квантизаторы и эргодические свойства дискретизованных линейных систем

Множества, являющиеся элементами некоторой алгебры $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$ имеют фракталоподобную структуру, хотя формально не обладают свойством самоподобия и потому фракталами не являются. Эти множества будут называться \mathcal{L} -квазипериодическими. Квазипериодические множества естественно возникают при рассмотрении дискретизаций линейных отображений достаточно общего вида — квантованных линейных систем. Приведем соответствующие определения.

Отображение $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}_{1,1}$ назовем *квантизатором*, если оно коммутирует с аддитивной группой сдвигов решетки $\mathbb{L}_{1,1}$, т.е. $Q(x + z) = Q(x) + z$ для всех $x \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{L}_{1,1}$, и полный прообраз $Q^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ нулевого вектора является измеримым по Жордану множеством. Суперпозицию $Q \circ T : \mathbb{L}_{1,1} \rightarrow \mathbb{L}_{1,1}$ квантизатора Q с некоторым линейным отображением T будем называть *квантованной линейной системой*.

Наиболее интересным в контексте настоящего доклада квантизатором является оператор округления ROUND до ближайшего узла решетки $\mathbb{L}_{1,1}$, порождающий квантованную систему $\text{ROUND} \circ T_\theta$. Однако существуют и более сложно устроенные квантизаторы. Заметим, что оператор усечения TRUNC не является квантизатором, а отображение (6) не является квантованной системой — именно это является причиной различия в поведении дискретизованных отображений (6) и (7).

Следующая теорема показывает, что квантованные линейные системы обладают сильными эргодическими свойствами при подходящем выборе алгебры частотно измеримых квазипериодических множеств.

Теорема 10. Пусть матрица $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ квантованной линейной системы $Q \circ T$ такова, что строки бесконечной матрицы $T^+ \equiv \text{blockcol}_{k \geq 0} (T^k) \in \mathbb{R}^{\infty \times 2}$ рационально независимы. Тогда оператор $Q \circ T : \mathbb{L}_{1,1} \rightarrow \mathbb{L}_{1,1}$ измерим относительно алгебры T^+ -квазипериодических множеств, сохраняет меру \mathcal{F} на этой алгебре и обладает свойством перемешивания, т.е.

$$(Q \circ T)^{-1}(A) \in \mathcal{Q}(T^+), \quad \mathcal{F}((Q \circ T)^{-1}(A)) = \mathcal{F}(A)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F} \left((Q \circ T)^{-k}(A) \cap B \right) = \mathcal{F}(A) \mathcal{F}(B)$$

для любых $A, B \in \mathcal{Q}(T^+)$.

Набор фактов относительно квантованных линейных систем не ограничивается утверждением теоремы 10 — за счет выбора подходящих алгебр частотно-измеримых множеств (зависящих от квантизатора Q и матрицы T) могут быть установлены и другие свойства дискретизаций линейных систем. Так, оказывается, что k -ые ошибки квантизации $E_k \equiv (I - Q) \circ T \circ (Q \circ T)^{k-1} : \mathbb{L}_{1,1} \rightarrow Q^{-1}(0)$ независимы в совокупности, равномерно распределены на множестве $Q^{-1}(0)$ и измеримы относительно алгебры T^+ -квазипериодических множеств. Это позволяет вычислить частотные характеристики N -ого уклонения

$$\Delta^{(N)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} T^N x - (Q \circ T)^N(x) = \sum_{k=1}^N T^{N-k} E_k(x).$$

траекторий квантизованной линейной системы $Q \circ T$ от траекторий исходной линейной системы T . Удастся также подсчитать частотные характеристики точек решетки $\mathbb{L}_{1,1}$, состоящих ровно из k прообразов при отображении $Q \circ T$, частотные характеристики уклонения траекторий дискретизованной системы $Q \circ T$ от траекторий исходной непрерывной системы T и т.п.

Обсудим некоторые следствия из результатов предыдущих секций для квантованной линейной системы с квантизатором $Q = \text{ROUND}$ и матрицей $T = T_\theta$ поворота (5) на угол $\theta \in (0; \pi/2)$. Исчерпывающий ответ на поставленный выше вопрос о возможности определения меры на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$, сохраняемой отображением $\text{ROUND} \circ T$, дан в теореме 10. Достаточно удовлетворительный ответ на другой вопрос — каковы частоты циклов отображения (7) или точек, не имеющих прообраза? — сформулирован в приводимой ниже теореме 11. Для четверки целых чисел $l_1, l_2 > 0$ и a_1, a_2 обозначим через $\mathcal{R}(a_1, a_2, l_1, l_2)$ прямоугольник $[a_1, a_1 + l_1) \times [a_2, a_2 + l_2) \cap \mathbb{L}_{1,1}$. Обозначим через $\sigma_n(\mathcal{R}, \theta)$ относительную долю тех точек прямоугольника \mathcal{R} , для которых полный n -ый прообраз при отображении $\text{ROUND}(T_\theta x)$ пуст. Тогда справедлива

Теорема 11. Пусть угол $\theta \in (0; \pi/2)$ таков, что строки всех неотрицательных степеней матрицы T_θ рационально независимы. Тогда равномерно по a_1 и a_2

$$\lim_{\min\{l_1, l_2\} \rightarrow \infty} \sigma_1(\mathcal{R}(a_1, a_2, l_1, l_2), \theta) = \sigma_1(\theta) \equiv \left(\sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right)^2.$$

Из этой теоремы вытекает что для достаточно больших прямоугольных фрагментов решетки $\mathbb{L}_{1,1} \subset \mathbb{R}^2$ доля точек, имеющих непустой прообраз, равна числу $1 - \sigma_1(\theta)$. Верхние оценки доли точек, принадлежащих циклам отображения $\text{ROUND}(T_\theta x)$, дают числа $1 - \sigma_n(\theta)$, $n = 2, 3, \dots$, которые могут быть вычислены по явным формулам.

Утверждение теоремы 11, представляется достаточно естественным и, по-сути, — если отбросить конкретный вид формул, тривиальным. Однако это впечатление не совсем верно — о нетривиальности теоремы 11 говорит хотя бы тот факт, что теорема перестает быть верной, если вместо прямоугольников $\mathcal{R} = \mathcal{R}(a_1, a_2, l_1, l_2)$ при подсчете относительных частот $\sigma_1(\mathcal{R}, \theta)$ взять произвольные множества \mathcal{R} с растущим числом элементов. В этом смысле теорема 11 напоминает способ вычисления расходящихся интегралов взятием их главного значения.

На поставленный выше вопрос — будут ли все траектории отображения (7) ограниченными или среди них есть траектории уходящие на бесконечность? — удалось получить частичный ответ. Оказалось, что для подавляющего в смысле меры \mathcal{F} множества траекторий дискретизованного отображения (7) быстрота их отклонения от соответствующих траекторий идеальной системы за N шагов имеет с ростом N порядок \sqrt{N} . Этот результат вытекает из приводимой ниже теоремы.

Теорема 12. Пусть угол поворота θ таков, что строки всех неотрицательных степеней матрицы T_θ рационально независимы. Тогда максимальное евклидово уклонение траекторий квантованной линейной системы $\text{ROUND} \circ T_\theta$ от траекторий идеальной систем T_θ за N шагов обладает следующим асимптотическим распределением: для любого $\alpha \geq 0$ имеет место сходимость

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{F} \left\{ x \in \mathbb{L}_{1,1} : \sqrt{\frac{12}{N}} \left| T_\theta^k(x) - (\text{ROUND} \circ T_\theta)^k(x) \right| > \alpha \right\} = \exp(-\alpha^2/2),$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{F} \left\{ x \in \mathbb{L}_{1,1} : \max_{1 \leq k \leq N} \sqrt{\frac{12}{N}} \left| T_\theta^k(x) - (\text{ROUND} \circ T_\theta)^k(x) \right| > \alpha \right\} = \tau(\alpha),$$

где $\tau(\alpha)$ — вероятность того случайного события, что максимальное на временном отрезке $[0; 1]$ евклидово отклонение траектории двумерного стандартного винеровского процесса от нуля превышает уровень α .

Заметим, что множество Θ всех значений θ , удовлетворяющих условиям теоремы 12, имеет полную меру Лебега и, более того, множество $(0; \pi/2) \setminus \Theta$, образованное "патологическими" углами поворота, счетно. Заметим также, что для всякого $\theta \in \Theta$ число θ/π иррационально.

Первое из предельных соотношений теоремы 12 можно неформально переформулировать следующим образом: если зафиксировать достаточно большое N , то для достаточно больших прямоугольника \mathcal{R} на решетке $\mathbb{L}_{1,1}$ эмпирическая функция распределения

$$D_{\mathcal{R}}^{(N)}(\alpha) \equiv \frac{1}{\#\mathcal{R}} \# \left\{ x \in \mathcal{R} : \sqrt{\frac{12}{N}} \left| T_{\theta}^k(x) - (\text{ROUND} \circ T_{\theta})^k(x) \right| > \alpha \right\}$$

должна быть близка к функции $\exp(-\alpha^2/2)$ равномерно по $\alpha \geq 0$. Это утверждение допускает экспериментальную проверку, которая в случае $N = 10$ и прямоугольника $\mathcal{R}(-25, -25, 50, 50)$ оказывается в хорошем согласии с теоретическим предсказанием.

7. АСИМПТОТИКА ПОТЕРИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Измерение физических величин с помощью цифровых устройств, компьютерное моделирование гладких систем неизбежно сопровождаются искажением функциональных свойств исходных континуальных объектов. В связи с этим, как отмечалось в [53, 55], важна разработка теоретико-информационных методов исследования эффектов пространственной дискретизации непрерывных явлений. В данном разделе проводится асимптотический анализ потерь информации при аналого-цифровом преобразовании случайных данных в арифметике с фиксированной точкой. В изложении этой части мы следуем работам [4, 39].

7.1. Сеточная дискретизация

Обозначим через $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ оператор округления, сопоставляющий вектору $u = (u_k)_{1 \leq k \leq n}$ ближайший узел $R(u) = (\lfloor u_k + 1/2 \rfloor)_{1 \leq k \leq n}$ n -мерной целочисленной решетки \mathbb{Z}^n , где $\lfloor \cdot \rfloor$ — нижняя целая часть числа. Очевидно, отображение R коммутирует с аддитивной группой сдвигов решетки \mathbb{Z}^n ,

$$R(u + z) = R(u) + z \quad \text{for all } u \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{Z}^n,$$

а полный прообраз нулевого вектора при этом отображении представляет собой куб

$$V = R^{-1}(0) = [-1/2, 1/2)^n. \quad (32)$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ отображение $R_{\varepsilon} = \varepsilon R \circ \varepsilon^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \varepsilon \mathbb{Z}^n$ можно интерпретировать как модель компьютерной процедуры дискретизации в арифметике с фиксированной точкой с точностью ε .

7.2. Энтропия дискретизованного случайного вектора

Пусть ξ — случайный вектор на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) со значениями в \mathbb{R}^n . Предположим, что его вероятностное распределение абсолютно непрерывно с плотностью $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ относительно n -мерной меры Лебега. Тогда ε -дискретизация $\xi_{\varepsilon} = R_{\varepsilon}(\xi)$ этого вектора распределена с вероятностями

$$p_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^n \mathbf{E} p(x + \varepsilon \theta), \quad x \in \varepsilon \mathbb{Z}^n, \quad (33)$$

где θ — случайный вектор, равномерно распределенный на кубе (32), и $\mathbf{E}(\cdot)$ обозначает математическое ожидание. Энтропия

$$H(\xi_\varepsilon) = - \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}^n} p_\varepsilon(x) \ln p_\varepsilon(x) \quad (34)$$

вектора ξ_ε совпадает с содержащимся в нем количеством информации $I(\xi_\varepsilon; \xi)$ о векторе ξ . Из (33) и (34) следует, что

$$H(\xi_\varepsilon) = -n \ln \varepsilon - \varepsilon^n \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}^n} f_\varepsilon(x), \quad (35)$$

где

$$f_\varepsilon(x) = \mathbf{E} p(x + \varepsilon \theta) \ln \mathbf{E} p(x + \varepsilon \theta). \quad (36)$$

В силу неравенства Йенсена и выпуклости функции $u \ln u$ по $u \geq 0$ из (36) вытекает, что $f_\varepsilon(x) \leq \mathbf{E}(p(x + \varepsilon \theta) \ln p(x + \varepsilon \theta))$, и следовательно, с учетом (35),

$$H(\xi_\varepsilon) \geq -n \ln \varepsilon - \varepsilon^n \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}^n} \mathbf{E}(p(x + \varepsilon \theta) \ln p(x + \varepsilon \theta)) = -n \ln \varepsilon + h(\xi), \quad (37)$$

где

$$h(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^n} p(x) \ln p(x) dx \quad (38)$$

— дифференциальная энтропия [10] вектора ξ . Для формулировки следующей теоремы, дающей оценку близости неравенства (37) к равенству, понадобятся некоторые определения.

Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сверхсуммируемой*, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} U_\varepsilon(f)(x) dx < +\infty$$

при некотором $\varepsilon > 0$, где функция $U_\varepsilon(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ определяется равенством

$$U_\varepsilon(f)(x) = \sup_{y \in V} |f(x + \varepsilon y)|.$$

Заметим, что сверхсуммируемость функции сильнее интегрируемости по Лебегу. Например, функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ вида

$$f(x) = \sum_{r \geq 0} g \left(2^r \left(|x| - \sum_{k=1}^r \frac{1}{k} \right) \right),$$

где $g(x) = \max(0, 1 - 2|x|)$, интегрируема по Лебегу, но не сверхсуммируема. В самом деле, $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 3/2$, хотя $U_{1/r}(f)(x) = 1$ при любых $r \in \mathbb{N}$, $|x| > \sum_{k=1}^r \frac{1}{k}$ и следовательно, $\int_{\mathbb{R}} U_\varepsilon(f)(x) dx = +\infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Роль свойства сверхсуммируемости функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ проясняется неравенством

$$\varepsilon^n \sum_{x \in \varepsilon \mathbb{Z}^n} |f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} U_\varepsilon(f)(x) dx ,$$

в силу которого наличие этого свойства обеспечивает абсолютную сходимость указанного ряда при всех достаточно малых ε .

Обозначим через F_N класс N раз непрерывно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемых по Лебегу вместе со всеми своими частными производными до порядка N включительно и таких, что все их частные производные N -го порядка сверхсуммируемы. В частности, F_0 — класс непрерывных сверхсуммируемых функций.

Теорема 13. Пусть плотность распределения p случайного вектора ξ удовлетворяет условиям:

- (a) p строго положительна и четырежды непрерывно дифференцируема в \mathbb{R}^n ;
- (b) $p \ln p \in F_4$;
- (c) $(1 + \ln p)\Delta p \in F_2$, где $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — оператор Лапласа;
- (d) функции $U_\varepsilon(1 + \ln p)U_\varepsilon\left(\frac{\partial^4 p}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right)$ и $U_\varepsilon\left(\frac{1}{p}\right)U_\varepsilon\left(\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2\right)$ интегрируемы по Лебегу при некотором $\varepsilon > 0$ для всех $1 \leq i, j, k, l \leq n$.

Тогда энтропия (34) асимптотически связана с дифференциальной энтропией (38) соотношением

$$H(\xi_\varepsilon) = -n \ln \varepsilon + h(\xi) + \mathbf{D}(\xi) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

где

$$\mathbf{D}(\xi) = \frac{1}{24} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla p(x)|^2}{p(x)} dx = \frac{1}{24} \mathbf{E} |\nabla \ln p(\xi)|^2 \quad (39)$$

и $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ — оператор градиента.

Величина $\mathbf{D}(\xi)$ называется далее *фактором смещения энтропии*. Например, пусть случайный вектор ξ имеет гауссовское распределение со средним μ и невырожденной ковариационной матрицей Σ , описываемое плотностью

$$p(x) = (2\pi)^{-n/2} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right), \quad (40)$$

где $(\cdot)^T$ обозначает транспонирование. Поскольку для такой функции p , всякая частная производная $\frac{\partial^N p(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}}$ является произведением $p(x)$ и некоторого алгебраического полинома от координат x , то условия (a)–(d) Теоремы 13 выполнены. Из (40) вытекает, что $\nabla \ln p(x) = \Sigma^{-1}(x - \mu)$ и следовательно, фактор смещения энтропии (39) принимает вид

$$\mathbf{D}(\xi) = \frac{1}{24} \mathbf{E} |\Sigma^{-1}(\xi - \mu)|^2 = \frac{1}{24} \mathbf{Tr} \Sigma^{-1},$$

где $\mathbf{Tr}(\cdot)$ — след матрицы, и не зависит от μ .

7.3. Информация в дискретизованных случайных векторах

Пусть ξ и η — два случайных вектора размерности n_1 и n_2 . Предположим, что их совместное распределение, т.е. вероятностное распределение n -мерного вектора

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad (41)$$

абсолютно непрерывно с плотностью $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $n = n_1 + n_2$, которой отвечают маргинальные плотности распределения $p_1: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $p_2: \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_+$ векторов ξ и η :

$$p_1(x) = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} p(x, y) dy, \quad p_2(y) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} p(x, y) dx. \quad (42)$$

Обозначим через ξ_ε and η_ε дискретизации векторов ξ и η на ε -сетке $\varepsilon\mathbb{Z}^{n_1}$ и $\varepsilon\mathbb{Z}^{n_2}$, так что

$$\zeta_\varepsilon = R_\varepsilon(\zeta) = \begin{bmatrix} \xi_\varepsilon \\ \eta_\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Количество информации в ξ_ε об η_ε , связанное с энтропией (34) посредством

$$I(\xi_\varepsilon; \eta_\varepsilon) = H(\xi_\varepsilon) + H(\eta_\varepsilon) - H(\zeta_\varepsilon),$$

не превосходит количества информации в ξ об η , выражаемого через дифференциальную энтропию (38) соотношением

$$I(\xi; \eta) = h(\xi) + h(\eta) - h(\zeta).$$

Соответствующая потеря взаимной информации между векторами ξ и η при их дискретизации характеризуется неотрицательной величиной

$$L_\varepsilon(\xi, \eta) = I(\xi; \eta) - I(\xi_\varepsilon; \eta_\varepsilon). \quad (43)$$

Теорема 14. Пусть плотности распределения p и (42) случайного вектора (41) и его подвекторов ξ и η удовлетворяют условиям Теоремы 13. Тогда потеря информации (43) асимптотически описывается как

$$L_\varepsilon(\xi, \eta) = \mathbf{L}(\xi, \eta) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\xi, \eta) &= \mathbf{D}(\zeta) - \mathbf{D}(\xi) - \mathbf{D}(\eta) \\ &= \frac{1}{24} \mathbf{E} (|\nabla_{x,y} \ln p(\zeta)|^2 - |\nabla_x \ln p_1(\xi)|^2 - |\nabla_y \ln p_2(\eta)|^2) \end{aligned} \quad (44)$$

и $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla_{x,y} = \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \end{bmatrix}$ — операторы градиента.

Неотрицательная величина $\mathbf{L}(\xi, \eta)$ называется далее *фактором потери информации*. Например, пусть вектор (41) имеет гауссовское распределение с нулевым средним и невырожденной ковариационной матрицей

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Phi & \Pi \\ \Pi^T & \Psi \end{bmatrix}, \quad (45)$$

где

$$\Phi = \mathbf{E}(\xi\xi^T), \quad \Psi = \mathbf{E}(\eta\eta^T), \quad \Pi = \mathbf{E}(\xi\eta^T).$$

При этом матрицы Φ и Ψ положительно определены, а

$$G = \Phi^{-1/2} \Pi \Psi^{-1/2}$$

является сжимающей, обеспечивая невырожденность матриц $I_{n_1} - GG^T$ и $I_{n_2} - G^T G$, где I_n — единичная матрица порядка n .

Теорема 15. Для подвекторов ξ и η гауссовского вектора (41) с невырожденной ковариационной матрицей (45), фактор потери информации (44) имеет вид

$$\mathbf{L}(\xi, \eta) = \frac{1}{24} (\text{Tr}(\Phi^{-1} G H_2 G^T) + \text{Tr}(\Psi^{-1} G^T H_1 G)), \quad (46)$$

где

$$H_1 = (I_{n_1} - GG^T)^{-1}, \quad H_2 = (I_{n_2} - G^T G)^{-1}. \quad (47)$$

В частности, если ξ и η — гауссовские случайные величины с дисперсиями $\Phi, \Psi > 0$ и коэффициентом корреляции $G \in (-1, 1)$, формулы (46)–(47) дают

$$\mathbf{L}(\xi, \eta) = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Psi} \right) \frac{G^2}{1 - G^2}.$$

7.4. Энтропия и информация в дискретизованных гауссовских последовательностях

Пусть $Z = (\zeta_k)_{-\infty < k < +\infty}$ — n -мерная стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним и ковариационной функцией $\sigma_k = \mathbf{E}(\zeta_k \zeta_0^T)$. Для любого $N \in \mathbb{N}$, начальный фрагмент

$$Z_N = (\zeta_k)_{1 \leq k \leq N} \quad (48)$$

этой последовательности является гауссовским вектором с блочно-теплицевой ковариационной матрицей

$$\Sigma_N = \text{block}_{1 \leq j, k \leq N} (\sigma_{j-k}).$$

Если матричная спектральная плотность

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_k e^{ik\omega}$$

последовательности Z непрерывна и положительна определена при любом $\omega \in [-\pi, \pi]$, то по известному свойству теплицевых форм [44]

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N} \mathbf{Tr} \Sigma_N^{-1} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{Tr}(S(\omega))^{-1} d\omega.$$

Следовательно, существует среднее значение фактора смещения энтропии $\mathbf{D}(Z_N) = \frac{1}{24} \mathbf{Tr} \Sigma_N^{-1}$ вектора (48) на единицу времени,

$$\mathcal{D}(Z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N} \mathbf{D}(Z_N) \right) = \frac{1}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{Tr}(S(\omega))^{-1} d\omega. \quad (49)$$

Пусть гауссовская последовательность Z описывается уравнениями в пространстве состояний

$$s_{k+1} = A s_k + B v_k, \quad (50)$$

$$\zeta_k = C s_k + D v_k, \quad (51)$$

где A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размеров, причем A асимптотически устойчива (ее спектральный радиус $\rho(A) < 1$), а DD^T невырождена; $(v_k)_{-\infty < k < +\infty}$ — последовательность независимых в совокупности m -мерных гауссовских векторов с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Свяжем с (50)–(51) уравнение Риккати

$$Q = AQA^T + BB^T - \Lambda\Theta\Lambda^T, \quad (52)$$

$$\Lambda = (BQC^T + BD^T)\Theta^{-1}, \quad (53)$$

$$\Theta = CQC^T + DD^T, \quad (54)$$

называя его решение Q *стабилизирующим*, если эта матрица симметрична, неотрицательно определена, и $\rho(A - \Lambda C) < 1$. Как известно [56], такое решение уравнения Риккати (52)–(54) единственно.

Теорема 16. Для стационарной гауссовской последовательности Z , описываемой уравнениями (50)–(51), средний фактор смещения энтропии (49) имеет вид

$$\mathcal{D}(Z) = \frac{1}{24} \operatorname{Tr} (\Theta^{-1}(CMC^T + I_n)), \quad (55)$$

где матрица M является решением уравнения Ляпунова

$$M = (A - \Lambda C)M(A - \Lambda C)^T + \Lambda\Lambda^T, \quad (56)$$

а матрицы Λ и Θ связаны со стабилизирующим решением Q уравнения Риккати (52)–(54).

Заметим, что величина $\mathcal{D}(Z)$, определяемая уравнениями (52)–(56), представляет собой некоторую функцию F матриц A, B, C, D из (50)–(51). Пусть элементы

$$\zeta_k = \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix}$$

последовательности Z разбиты на подвекторы ξ_k and η_k размерности n_1 и n_2 . Тогда средние факторы смещения энтропии стационарных гауссовских последовательностей $X = (\xi_k)_{-\infty < k < +\infty}$ и $Y = (\eta_k)_{-\infty < k < +\infty}$ имеют вид

$$\mathcal{D}(X) = F(A, B, C_1, D_1), \quad \mathcal{D}(Y) = F(A, B, C_2, D_2),$$

где C_k и D_k — блоки матриц

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix},$$

состоящие из n_k строк. Поэтому средний фактор потери информации на единицу времени для таких последовательностей X и Y может быть вычислен как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, Y) &= \mathcal{D}(Z) - \mathcal{D}(X) - \mathcal{D}(Y) = \\ &= F(A, B, C, D) - F(A, B, C_1, D_1) - F(A, B, C_2, D_2). \end{aligned}$$

8. АНАЛИЗ МУАРОВ

Результаты этого раздела были, в основном, опубликованы в [46].

8.1. Общая структура муаров

В дальнейшем, μ — это большой параметр. Через $L(n; f, \mu)$ обозначим при каждом целом n лебегово множество

$$L(n; f, \mu) = \{(x, y) : n - 1/2 \leq \mu f(x, y) \leq n + 1/2\}.$$

Пусть \mathbb{Z} — множество целых чисел, а $q \in \mathbb{Z}$ — некоторое простое число. Положим

$$L_q(n, f, \mu) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L(qk + n, f, \mu), \quad n = 0, 1, \dots, q - 1.$$

Пусть $\mathbb{L}_{h, \alpha}$ — прямоугольная решетка на плоскости с шагами $h_x = \alpha h$ и $h_y = h/\alpha$ вдоль осей x и y ; число α считается фиксированным. Введем множества

$$\mathcal{L}_q(n; f, h, \alpha, \mu) = L_q(n; f, \mu) \cap \mathbb{L}_{h, \alpha}.$$

С каждым узлом (x_0, y_0) решетки $\mathbb{L}_{h,\alpha}$ свяжем прямоугольник

$$Q(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \alpha h/2, |y - y_0| < h/(2\alpha)\}.$$

Пусть \mathcal{M} — подмножество решетки $\mathbb{L}_{h,\alpha}$. Обозначим через $Q(\mathcal{M})$ объединение прямоугольников $Q(x_0, y_0)$ по всем точкам (x_0, y_0) из множества \mathcal{M} . Пусть $\chi \in (0, 1]$. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^2$ с положительной конечной лебеговой мерой назовем χ -представимым посредством множества $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{L}_{h,\alpha}$, если верно неравенство $\text{mes}(Q(\mathcal{M}))/\text{mes}(M) < 1 + \chi$. Если μ фиксировано, то при уменьшении h множества $\mathcal{L}_q(n, f, h, \alpha, \mu)$ все точнее представляют соответствующие лебегова множества $L_q(n; f, \mu)$. Однако, величина χ не обязательно стремится к 1, если уменьшение h сопровождается достаточно быстрым увеличением параметра μ (далее изучается случай $\mu h = \sigma$, где σ фиксировано). Будем говорить, что множества $\mathcal{L}_q(n; f, h, \alpha, \sigma/h)$ предельно представляют некоторую (вспомогательную) функцию $G(x, y)$ в области Ω , если при каждом достаточно малом h можно указать такие $\xi = \xi(h)$, $\chi = \chi(h)$, что множество $\mathcal{L}_q(n; f, h, \alpha, \sigma/h) \cap \Omega$ при каждом $n = 0, 1, \dots, q-1$ χ -представляет множество $L_q(n; G(x, y) + \xi(h), \sigma/h) \cap \Omega$, где $\chi \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$. Обозначим через $C_x(i, f)$ и $C_y(j, f)$ кривые, определенные при каждом целых i и j равенствами $f'(x, y) = iq/(\alpha\sigma)$, $f'(x, y) = jq\alpha/\sigma$. Через $D(f, \sigma)$ обозначим совокупность точек $d(i, j; f, \sigma)$ трансверсального пересечения кривых $C_x(i, f)$ с кривыми $C_y(j, f)$ и каждой точке $d = (x_0, y_0) \in D(f, \sigma)$ поставим в соответствие функцию

$$G_d(x, y) = f(x, y) - f'(x_0, y_0)(x - x_0) - f'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Теорема 17. *Каждой точке $d \in D(f)$ отвечает такое число $r > 0$, что множества $\mathcal{L}_q(n, f, h, \sigma/h)$ предельно представляют функцию $G_d(x, y)$ в круге $|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2| < r^2$.*

Формы поверхностей уровня функций G_d воспринимаются наблюдателем как муары; точки множества $D(f, \sigma)$ совпадают с центрами муаров. Если в некоторой области гессиан функции $f(x, y)$ невырожден и изменяется достаточно медленно, то сетка кривых $C_x(i, f)$ и $C_y(j, f)$ устроена достаточно регулярно, причем верны приближенные равенства

$$d(i+1, j; f, \sigma) - d(i, j; f, \sigma) \sim (q/(\alpha\sigma))(f''(d(i, j; f, \sigma)))^{-1}(1, 0),$$

$$d(i, j+1; f, \sigma) - d(i, j; f, \sigma) \sim (q\alpha/\sigma)(f''(d(i, j; f, \sigma)))^{-1}(0, 1).$$

Так как матрица $f''(d(i, j; f, \sigma))$ и, значит, матрица $(f''(d(i, j; f, \sigma)))^{-1}$ симметрична, то из последних двух соотношений можно по наблюдаемым векторам

$$d_x = d(i+1, j; f, \sigma) - d(i, j; f, \sigma), \quad d_y = d(i, j+1; f, \sigma) - d(i, j; f, \sigma)$$

оценить параметр α по формуле $\alpha \sim (d_x/d_y)^{1/2}$. Если функция $f(x, y)$ неизвестна, но сетка кривых $C_x(i, f)$ и $C_y(j, f)$ просматривается, то приведенные выше соотношения можно использовать для приближенного определения коэффициентов матрицы $(\sigma f''(d(i, j; f, \sigma)))^{-1}$ по очевидным формулам.

8.2. Алайзинг-размерность

Один из общих вопросов, возникающих в связи с анализом муаров (см. раздел 2.3, а также рис. 9), следующий:

НАСКОЛЬКО РЕГУЛЯРНЫМИ МОГУТ БЫТЬ МУАРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИЗОБРАЖЕНИИ ДАННОЙ ФУНКЦИИ $f(\cdot)$, КАК ЧИСЛЕННО ОХАРАКТЕРИЗОВАТЬ СТЕПЕНЬ ЭТОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ И НАСКОЛЬКО РЕГУЛЯРНОСТЬ ИЛИ НЕРЕГУЛЯРНОСТЬ ВОЗНИКАЮЩИХ МУАРОВ СВЯЗАНА СО СЛОЖНОСТЬЮ ФУНКЦИИ $f(\cdot)$?

Ниже излагаются некоторые принципиальные результаты в этом направлении (подробности см. в [45]). Для простоты мы ограничимся одномерным случаем: скалярнозначными функциями f одного скалярного аргумента. Будет предложено понятие алайзинг-размерности, которое естественным образом связано со сложностью визуального изображения. Будет охарактеризовано место этого понятия по отношению к другим размерностям. В качестве примера будут указаны двусторонние оценки алайзинг-размерности для некоторых полиномиальных функций $f(\cdot)$.

Для данного вещественного x , обозначим через $[x]$ целую часть от x (т.е., наибольшее целое число, меньшее или равное x). Через $\{x\} = x - [x]$ обозначим дробную часть от x . Пусть \mathcal{P}_k — множество всех полиномов одной переменной степени k .

Двоичную последовательность (u_i) , $i \in \mathbb{Z}$, назовем *PG-последовательностью k -й степени* (polynomial generated) если она представима в виде

$$u_i = [2\{f(i)\}].$$

при некотором $f \in \mathcal{P}_k$. Класс всех таких последовательностей (u_i) обозначим через \mathcal{B}_k . Чтобы охарактеризовать *разнообразие* класса \mathcal{B}_k мы должны определить меру этого разнообразия. Естественный подход заключается в том чтобы охарактеризовать количество конечных последовательностей (кортежей) определенной длины N , которые можно “вырезать” из рассматриваемых (бесконечных) последовательностей. В частности важно понять, каково наибольшее N , при котором *любое* двоичное слово длины N содержится в некотором элементе из \mathcal{B}_k ?

Заметим, что при $N > k$ все кортежи длины N

$$(f(i), f(i+1), \dots, f(i+N-1)),$$

рассматриваемые как точки в \mathbb{R}^N принадлежат некоторому $(k+1)$ -мерному подпространству P_k^N . Например, если $k = 1$ то

$$f(i+1) - f(i) \equiv f(i+2) - f(i+1).$$

Однако, это *не так* для совокупности N -кортежей содержащихся в элементах $(u_i) \in \mathcal{B}_k$.

Пусть $u = (u_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, — двоичная последовательность. Обозначим через $w_N(u)$ множество всех N -кортежей, которые можно вырезать из u и обозначим через $S_u(N)$ количество элементов содержащихся в $w_N(u)$. Далее, обозначим через $B(k, N)$ совокупность всех N -кортежей содержащихся во всех PG-последовательностях степени k , т.е.

$$B(k, N) = \bigcup_{u \in \mathcal{B}_k} w_N(u).$$

Пусть $S(k, N)$ — количество элементов в $B(k, N)$. Очевидно, $S(k, N) \leq 2^N$.

Рассмотрим наибольшее натуральное N удовлетворяющее равенству $S(k, N) = 2^N$. Это число N и называется *алайзинг-размерностью* класса \mathcal{P}_k и обозначается $D(k)$.

Понятие алайзинг-размерности родственно размерности Вапника–Червоненкиса [69], оно связано также с идеями последовательностей Штурма [63]), линейными рекуррентными последовательностями [59], и символической динамикой [10]. Особо отметим связь с мерой самоподобия [26].

Главный результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 18. *Алайзинг-размерность класса \mathcal{P}_k удовлетворяет оценкам*

$$k + 1 \leq D(k) \leq 8k^2 \log k \tag{57}$$

Точно вычислить алайзинг–размерность семейств P_k нелегко даже для небольших k . Пусть, сначала $k = 1$. Тогда класс \mathcal{P}_1 состоит из линейных функций.

Теорема 19. *Алайзинг–размерность $D(1)$ класса \mathcal{P}_1 равна 4.*

Пусть $k = 2$. Тогда класс \mathcal{P}_2 состоит из квадратичных многочленов. Мы попытались определить алайзинг–размерность этого множества с помощью численных экспериментов. В этих экспериментах для каждого очередного N генерировалась последовательность случайных квадратичных многочленов $ax^2 + bx + c$ и регистрировались возникающие при этом N -кортежи, до тех пор пока не удавалось исчерпать всевозможные кортежи длины N . Наибольшее N , которое удалось найти таким образом равно 13: любой двоичный кортеж длины 13 может быть порожден подходящим квадратичным многочленом. С другой стороны, не удалось породить некоторые последовательности длины 14, например последовательность 00001100011110. Таким образом, имеются основания полагать, что $D(2) = 13$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды матем. института им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 90. С. 3–209.
2. *Асарин Е.А., Козьякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем. М.: Наука. 1992. 408 с.
3. *Бланк М.Л.* Малые возмущения в хаотических динамических системах // Успехи матем. наук. 1989. Т. 44. № 6. С. 3–28.
4. *Владимиров И.Г.* Асимптотика потери информации при дискретизации случайных процессов // Доклады РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 745–748.
5. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения сумм независимых случайных переменных. М.–Л.: Гостехиздат. 1949. 264 с.
6. *Даймонд Ф., Клоеден П., Козьякин В.С. и др.* Грубость траекторий динамических систем по отношению к гистерезисным возмущениям // Доклады РАН. 1995. Т. 343. № 343. С. 25–27.
7. *Даймонд Ф., Клоеден П., Козьякин В.С. и др.* Периодические траектории негладких возмущений систем с хаотическим поведением // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 34–41.
8. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Покровский А.В.* Феноменологическая модель статистик длин циклов и переходных процессов дискретных динамических систем // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 165–168.
9. *Колчин В.Ф., Хохлов В.И.* О числе циклов в случайном неравновероятном графе // Дискретная математика. 1990. Т. 2. № 3. С. 137–145.
10. *Мартин Н., Ингленд Д.* Математическая теория энтропии. М.: Мир. 1988. 350 с.
11. *Сатаев Е.А.* Инвариантные меры для гиперболических отображений с особенностями // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. № 1. С. 147–202.
12. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука. 1989.
13. *Al-Nayef A., Diamond P., Kloeden P. et al.* Bi-shadowing and delay equations // Dynamics & Stability of Systems. 1996. V. 10. P. 121–129.
14. *Al-Nayef A., Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A.* Expansivity of nonsmooth functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 208. P. 453–461.
15. *Beyn M.J.* On the numerical approximation of phase portraits near stationary points // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 5. P. 1095–1113.
16. *Blank M.* Discreteness and Continuity in Problems of Chaotic Dynamics. Translation of Mathematical Monographs № 161. Providence: American Mathematical Society. 1997. 161 pp.

17. *Bollobas B.* Random Graphs. London: Academic Press. 1985.
18. *Boyarsky A., Gora P.* Why computers like Lebesgue measure// *Comp. Math. Applns.* 1988. V. 16. P. 321–329.
19. *Boyarsky A., Scarowsky M.* Long periodic orbits of the triangle map// *Proc. Amer. Math. Soc.* 1986. V. 97. P. 247–254.
20. *Burtin Y.D.* On a simple formula for random mappings and its applications// *J. Appl. Prob.* 1980. V. 17. P. 403–414.
21. Chaotic Numerics/ Ed. by P.E. Kloeden, K.J. Palmer. V. 172 of Contemporary Mathematics. Providence, Rhode Island. 1993. American mathematical Society. An International Workshop on the Approximation and Computation of Complicated Dynamical Behavior, July 12–16, 1993, Deakin University, Geelong, Australia.
22. *Diamond P., Kloeden P.* Spatial discretization of mappings// *Comp. Math. Applns.* 1993. V. 25. P. 85–94.
23. *Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V. et al.* Robustness of dynamical systems to a class of nonsmooth perturbations// *Nonlinear Analysis, TMA.* 1996. V. 26. № 2. P. 351–361.
24. *Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A.* Computer robustness of semi-hyperbolic mappings// *Random and Computational Dynamics.* 1995. V. 3. № 1–2. P. 57–70.
25. *Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A.* Expansivity of semi-hyperbolic Lipschitz mappings// *Bulletin of the Australian Mathematical Society.* 1995. V. 51. № 2. P. 301–308.
26. *Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A.* On the fragmentary complexity of symbolic sequences// *Theoretical Computer Science.* 1995. V. 148. № 1. P. 1–17.
27. *Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A.* Semihyperbolic mappings// *J. Nonlinear Science.* 1995. V. 5. № 5. P. 419–431.
28. *Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A.* A model for roundoff and collapse in computation of chaotic dynamical systems// *Math. Comput. Simulation.* 1997. V. 44. № 2. P. 163–185.
29. *Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A.* Boundedness and dissipativity of truncated rotations on uniform planar lattices// *Math. Nachr.* 1998. V. 191. P. 59–81.
30. *Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A.* Numerical modelling of toroidal dynamical systems with invariant Lebesgue measure// *Journal of Complexity.* 1993. V. 7. P. 415–422.
31. *Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A.* Interval stochastic matrices and simulation of chaotic dynamics// *Chaotic Numerics/ Ed. by P. Kloeden, K.J. Palmer.* Providence: American Mathematical Society. 1994. Contemporary Mathematics. P. 203–216.
32. *Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A.* Multivalued spatial discretization of dynamical systems// *Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications of the Australian National University/ Ed. by G. Martin, H. Thompson.* V. 33. 1994. P. 61–70.
33. *Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A.* Weakly chain recurrent points and spatial discretizations of dynamical systems// *Random & Computational Dynamics.* 1994. V. 2. № 1. P. 97–110.
34. *Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A.* Analysis of an algorithm for computing invariant measures// *Nonlin. Anal. TMA.* 1995. V. 24. № 3. P. 323–336.
35. *Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A.* Interval stochastic matrices, a combinatorial lemma and the computation of invariant measures of dynamical systems// *Journal on Dynamics and Differential Equations.* 1995. V. 7. № 2. P. 341–364.
36. *Diamond P., Kloeden P., Pokrovskii A., Vladimirov A.* Collapsing effects in numerical simulation of a class of chaotic dynamical systems and random mappings with a single attracting centre// *Physica D.* 1995. V. 86. P. 559–571.

37. *Diamond P., Kloeden P.E., Klemm A.D., Pokrovskii A.* Basin of attraction of cycles of space discretizations of dynamical systems with SRB invariant measure// *Journal of Statistical Physics*. 1996. V. 84. № 3/4. P. 713–733.
38. *Diamond P., Pokrovskii A.* Statistical laws for computational collapse of discretized chaotic mappings// *Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 1996. V. 6. № 12A. P. 2389–2399.
39. *Diamond P., Vladimirov I.* Higher-order terms in asymptotic expansion for information loss in quantized random processes// *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2001. V. 20. № 6. P. 677–693.
40. *Erber T., Gavelek D.* The iterative evolution of complex systems// *Physica A*. 1991. V. 177. P. 394–400.
41. *Ethier S., Kurtz T.* Markov Processes: Characterization and Convergence. New York: Wiley. 1986.
42. *Gerchbakh I.B.* Epidemic processes on a random graph: Some preliminary results// *J. Appl. Prob.* 1977. V. 14. P. 427–438.
43. *Gregori C., Ott E., Yorke J.A.* Roundoff-induced periodicity and the correlation dimension of chaotic attractors// *Phys. Rev. A*. 1988. V. 34. P. 3688–3692.
44. *Grenander U.* Toeplitz Forms and Their Applications. 2nd edition. Chelsea Pub Co. 1984. 245 pp.
45. *Izmailov R., Vladimirov A.* Dimension of aliasing structures// *Computers & Graphics*. 1993. V. 17. № 5. P. 539–547.
46. *Izmailov R.N., Pokrovskii A.V.* Asymptotic classification of aliasing structures// *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. 1992. V. 5. № 3. P. 193–204.
47. *Kifer Y.* Random Perturbations of Dynamical Systems. Boston: Birkhäuser. 1988.
48. *Klemm A., Pokrovskii A.V.* Random mappings with a single absorbing center and combinatorics of discretizations of the logistic mapping// *J. of Appl. Math. and Stoch. Anal.* 1999. V. 12. № 3. P. 205–221.
49. *Kolmogoroff A.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer–Verlag. 1933.
50. *Kozyakin V.* A short introduction to asynchronous systems// *Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations*. Augsburg, Germany 2001: *New Progress in Difference Equations*/ Ed. by B. Aulbach, S. Elaydi, G. Ladas. Boca Raton: CRC Press. 2004. P. 153–166.
51. *Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Pokrovskii A.V.* Transients in quasi-controllable systems. overshooting, stability and instability// *Preprints of the 12th World IFAC Congress, Sydney, Australia, 18–23 July, 1993*. 1993. P. 465–468.
52. *Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Pokrovskii A.V.* A new model for statistics of the first recurrent moments and cycle lengths in discretizations of dynamical systems: CADSEM Report 96–006. Geelong, Australia: Deakin University. 1996.
53. *Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Pokrovskii A.V., Vladimirov I.G.* Some problems in analysis of discretizations of continuous dynamical systems// *Nonlinear Analysis, TMA*. 1997. V. 30. № 2. P. 767–778.
54. *Kozyakin V.S., Pokrovskii A.V.* The asymptotic behavior of elementary symmetric functions on a probability distribution// *Journal of Appl. Math. and Stoch. Anal.* 2001. V. 14. № 3. P. 237–248.
55. *Kuznetsov N., Kloeden P.* The problem of information stability in computer studies of continuous systems// *Math. Comput. Simulation*. 1993. V. 43. № 2. P. 143–158.
56. *Lancaster P., Rodman L.* Algebraic Riccati Equations. New York: Oxford University Press. 1995.
57. *Lax P.* Approximation of measure preserving transformations// *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1971. V. 24. P. 133–135.
58. *Levy Y.E.* Some remarks about computer studies of dynamical systems// *Physics Letters*. 1982. V. A88. P. 1–3.

59. *Lidl R., Niederreiter H.* Introduction to Finite Fields and their Applications. Cambridge: Cambridge University Press. 1986.
60. *Lowenstein J., Hatjispyros S., Vivaldi F.* Quasi-periodicity, global stability and scaling in a model of Hamiltonian round-off// *Chaos*. 1997. V. 7. № 1. P. 49–66.
61. The MathWorks, Inc.. Natick. MATLAB. Reference Guide. 1992.
62. *Melo W., van Strien S.* One-Dimensional Dynamics. Berlin: Springer–Verlag. 1993.
63. *Morse M., Hedlund G.A.* Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories// *American Journal of Mathematics*. 1940. V. 62. P. 1–42.
64. *Palis J., de Melo W.* Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction. Heidelberg: Springer–Verlag. 1982.
65. *Pilyugin S.Y.* The Space of Dynamical Systems with the C^0 –Topology. Heidelberg: Springer–Verlag. 1994. V. 1571 of Lecture Notes in Mathematics.
66. *Ruelle D.* Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcations Theory. Boston: Academic Press, Inc.. 1989.
67. *Stepanov V.E.* Random mappings with a single attracting centre// *Theory Prob. Appl.* 1971. V. 16. P. 155–161.
68. *Stetter H.J.* Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer–Verlag. 1976.
69. *Vapnik V.N., Chervonenkis A.J.* On uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities// *Theory of Probability and its Applications*. 1971. V. 16. P. 264–280.
70. *Vladimirov I.* Quantized linear systems on integer lattices: Frequency-based approach. Part I.: CADSEM Report 96–032. Geelong, Australia: Deakin University. 1996.
71. *Vladimirov I.* Quantized linear systems on integer lattices: Frequency-based approach. Part II.: CADSEM Report 96–033. Geelong, Australia: Deakin University. 1996.