Информационные процессы, Том 7, № 4, 2007, стр. 401–404
© *2007 Яшков, Яшкова.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОПУСТОШЕНИЯ ПРИБОРА В СИСТЕМЕ M/G/1 [1]

С.Ф.Яшков*, А.С.Яшкова**

**Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича, Российская академия наук*
19, Большой Каретный переулок, 127994 Москва ГСП–4, Россия.
E-mail: yashkov@iitp.ru
***Муниципальный институт г.Жуковского,*
кафедра прикладной информатики и программирования,
15, улица Маяковского, 140180 г.Жуковский, Московской обл., Россия.
E-mail: annpost1@mail.ru
Поступила в редколлегию 20.08.2007

Аннотация—Получена асимптотическая оценка нестационарной вероятности опустошения прибора в системе обслуживания M/GI/1 для случая, когда функция распределения времени обслуживания имеет правильно меняющийся хвост.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему обслуживания M/GI/1 с любой консервативной дисциплиной обслуживания. На вход системы поступает однородный пуассоновский поток требований интенсивности λ, длительности обслуживания (длины) требований имеют произвольную функцию распределения (ф.р.) $B(x) = \mathsf{P}(B \le x)$ ($B(0+) = 0$, $B(\infty) = 1$) со средним $\beta_1 < \infty$ и преобразованием Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) $\beta(s)$. Загрузка системы обозначается через $\rho = \lambda\beta_1$. Обозначим через $L(t)$ число требований в системе в момент t. В начальный момент времени $t = 0$ система свободна от требований. Известно [1,2], что преобразование Лапласа (ПЛ) вероятности $\mathsf{P}(L(t) = 0)$ отсутствия требований в системе имеет вид

$$\tilde{p}_{00}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathsf{P}_{00}(t)\,dt = [s + \lambda - \lambda\pi(s)]^{-1}, \tag{1.1}$$

где $\pi(s)$ — минимальное решение функционального уравнения

$$\pi(s) = \mathsf{E}[\mathrm{e}^{-s\Pi}] = \beta(s + \lambda - \lambda\pi(s)). \tag{1.2}$$

Здесь и далее дополнительный индекс 0 обозначает начальное состояние системы в нулевой момент, Π — случайная величина (сл.в.) длительности периода занятости. Явный вид функции $\mathsf{P}_{00}(t)$ известен только при экспоненциальной ф.р. $B(x)$. Однако ряд характеристик системы M/GI/1 с различными дисциплинами обслуживания выражается в терминах этой функции. Особое значение приобретает $\mathsf{P}_{00}(t)$ в случае системы M/GI/1 с дисциплиной (эгалитарного) разделения процессора (EPS) в силу обнаруженного недавно факта, что нестационарные вероятности состояний этой системы M/GI/1—EPS имеют (нетривиальное) геометрическое распределение с вероятностью успеха $s\tilde{p}_{00}(s)$ [2,3]. Поэтому представляют интерес аппроксимации вероятности $\mathsf{P}_{00}(t)$. Для ф.р. $B(x)$ с легким хвостом (т.е. таких, для которых производящая функция моментов $\beta(-s) < \infty$, $s > 0$) такие аппроксимации известны при $\rho < 1$ и $\rho > 1$, см. замечание 3.5 в [2]. Когда ф.р. $B(x)$ имеет правильно меняющийся хвост, т.е. $1 - B(x) \sim x^{-a}\ell(x)$,

[1] Эта работа частично поддержана грантом по программе фундаментальных исследований Российской Академии наук (отделение информатики) “Новые физические и структурные решения в инфотелекоммуникациях"(Руководитель Н.А.Кузнецов).

$x \to \infty$, где $\ell(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, асимптотика $\mathsf{P}_{00}(t)$ приведена без доказательства в формуле (39) статьи [4] с пояснением, что этот результат установили Асмуссен и Тейгельс в подготовленной для публикации работе [5]. Поскольку в доступной литературе и в Интернете ни статьи [5], ни доказательства обнаружить не удалось[2], то выводу указанного результата и посвящена данная заметка. Эта асимптотика, полученная независимо от [5], анонсировалась в [6, Th. 6.9]. Класс функций распределения с правильно меняющимся хвостом обозначается далее через $RV(-a)$, $a \geq 0$, см. детали в [2, §2.10]. Отметим, что такие ф.р. имеют тяжелый хвост, т.е. $\beta(-s) = \infty$ при некотором $s > 0$. В частности, при $1 < a < 2$, даже $\beta_2 = \mathsf{E}[B^2] = \infty$.

2. АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ $\mathsf{P}_{00}(t)$ В СЛУЧАЕ $B(x) \in RV(-a)$, $a > 1$

В этом разделе доказывается

Теорема 2.1. *Если $\rho < 1$ и $B(x) \in RV(-a)$, $a > 1$, то для консервативной системы $M/GI/1$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i)

$$\mathsf{P}_{00}(t) - (1-\rho) \sim \lambda(1-\rho)^{1-a}(a-1)^{-1}t^{-(a-1)}\ell(t), \quad t \to \infty, \tag{2.1}$$

(ii)

$$1 - B(t) \sim t^{-a}\ell(t), \quad t \to \infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. Докажем только импликацию (2.2) $\Rightarrow$ (2.1), используя некоторые приемы, введенные в [7]. Доказательство $(i) \Rightarrow (ii)$ проводится аналогично.

Введем функцию $H_0(t) = (1 - \mathsf{P}_{00}(t))/\rho$, которая имеет все свойства ф.р., в частности, $H_0(0) = 0$ и $H_0(\infty) = 1$. Принимая во внимание (1.1), находим вид ПЛС по t ф.р. $H_0(t)$

$$h_0(s) = \frac{1}{\rho}\left(1 - s\tilde{p}_{00}(s)\right) = \frac{1}{\beta_1}\frac{1-\pi(s)}{s + \lambda - \lambda\pi(s)}, \tag{2.3}$$

где $\pi(s)$ удовлетворяет уравнению (1.2).

Введем обозначение $f_\Pi(s) = (1-\pi(s))/(s\pi_1)$ для ПЛС ф.р. остаточной длительности F_Π периода занятости П. Здесь $\pi_1 = \mathsf{E}[\Pi] = \beta_1/(1-\rho)$. Тогда (2.3) можно привести к виду

$$h_0(s) = \frac{f_\Pi(s)}{1 - \rho + \rho f_\Pi(s)}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) вытекает после некоторых преобразований, что

$$1 - f_\Pi(s) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(1 - h_0(s)^{n+1}\right). \tag{2.5}$$

Иными словами,

$$1 - F_\Pi(t) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(1 - H_0^{*(n+1)}(t)\right), \tag{2.6}$$

где $H_0^{*(n+1)}(t)$ есть n–кратная свертка введенной выше ф.р. $H_0(t)$, а $F_\Pi(t)$ — ф.р. случайной величины F_Π.

[2] Это не удивительно, поскольку число серьезных научных журналов в отечественных библиотеках резко сократилось за последние пятнадцать лет.

Поделим обе части (2.6) на $(1 - H_0(t))$. В силу предположения, что $B(x) \in RV(-a)$, ф.р. $B(x) \subset \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ — класс субэкспоненциальных распределений (см., например, [2,8]). Принимая во внимание основное свойство класса $\mathcal{S}$ (см. вторую ненумерованную формулу после (2.61) в [2]) и теорему о мажорируемой сходимости, получаем асимптотику $1 - F_\Pi(t)$

$$1 - F_\Pi(t) \sim (1-\rho)^{-1}(1 - H_0(t)), \quad t \to \infty. \tag{2.7}$$

В силу теоремы де Мейера и Тейгельса (см. [8, 9] или [2, Th. 2.6]) имеем

$$\mathsf{P}(\Pi > t) \sim (1-\rho)^{-1}\mathsf{P}(B > (1-\rho)t), \quad t \to \infty. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) вытекает, что при $t \to \infty$

$$1 - H_0(t) \sim (1-\rho)(1 - F_\Pi(t)) = \frac{(1-\rho)^2}{\beta_1}\int_t^\infty (1 - \Pi(y))\,dy \sim$$
$$\frac{1}{\beta_1}\int_{(1-\rho)t}^\infty (1 - B(y))\,dy = 1 - F_B((1-\rho)t) \sim \frac{1}{\beta_1}(1-\rho)^{1-a}(a-1)^{-1}t^{-(a-1)}\ell(t). \tag{2.9}$$

В цепочке формул (2.9) использовались также:

(a) известный факт из теории асимптотических разложений — если $a(t) \sim b(t)$ при $t \to \infty$, то $\int_t^\infty a(y)\,dy \sim \int_t^\infty b(y)\,dy$ при $t \to \infty$ [10];

(b) теорема Карамата (см. [8, Th. A3.6, p. 543] или [2, сноска 41];

(c) формула для математического ожидания периода занятости $\pi_1 = \beta_1/(1-\rho)$;

(d) каноническое определение медленно меняющейся функции [8].

Учитывая вид функции $H_0(t)$, из (2.9) вытекает утверждение теоремы 2.1. □

Формула (2.1) обеспечивает также асимптотическую оценку скорости сходимости вероятности опустошения прибора в момент t к стационарной вероятности отсутствия требований $1-\rho$. Хорошая точность (2.1) подтверждена имитационным моделированием (на базе системы GPSS World) очереди M/GI/1 при распределениях $B(x)$ из класса распределений Парето.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье дан вывод асимптотической оценки нестационарной вероятности $\mathsf{P}_{00}(t)$ опустошения прибора (и ее скорости сходимости к стационарной вероятности) в системе обслуживания M/GI/1 для случая, когда функция распределения времени обслуживания имеет правильно меняющийся (тяжелый) хвост и $\rho < 1$. По–видимому, представляет интерес найти асимптотику такого сорта для скорости сходимости $\mathsf{P}_{00}(t)$ к нулю при $\rho > 1$ и распределениями времени обслуживания с тяжелыми хвостами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яшков С.Ф. *Анализ очередей в ЭВМ.* М: Радио и связь, 1989.
2. Яшков С.Ф., Яшкова А.С. Разделение процессора: обзор математической теории. *Информационные процессы*, 2007, том 7, № 3, pp. 248–322 (available at http://www.jip.ru/).
3. Yashkov S.F., Yashkova A.S. Some insight to the time-dependent properties of the queue length process in the M/G/1—EPS and LCFS–P queues. *Information Processes*, 2005, vol. 5, no. 2, pp. 102–105 (available at http://www.jip.ru/).
4. Abate J., Choudhuri G.L. and Whitt W. Calculating the M/G/1 busy–period density and LIFO waiting–time distribution by direct numerical transform inversion. *Oper. Res. Lett.*, 1995, vol. 18, pp. 113–119.

5. Asmussen S., Teugels J.L. Convergence rates for M/G/1 queues and ruin problems with heavy tails. *Adv. Appl. Probab.*, to appear.

6. Яшков С.Ф. *Математические модели систем с разделением времени.* М: ИППИ РАН, 2002.

7. Abate J. and Whitt W. Asymptotics for M/G/1 low–priority waiting–time tail probabilities. *Queueing Syst.*, 1997, vol. 25, pp. 173–233.

8. Embrechts P., Klüppelberg C. and Mikosch T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Heidelberg: Springer, 1997.

9. de Meyer A. and Teugels J.L. On the Asymptotic Behaviour of the Distributions of the Busy Period and Service–Time in M/G/1. *J. Appl. Probab.*, 1980, vol. 17, pp. 802–813.

10. Erdélyi A. *Asymptotics Expansions.* New York: Dover, 1956.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И.Венец