Информационные процессы, Том 7, № 4, стр. 405–410

============= **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ** ============

Декомпозиция измерений при оценке параметра сигнала на фоне шумов

М.Г. Сергеев*, А.П. Серебровский, Г.Ш. Цициашвили*****

** Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*
*** Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича,*
Российская академия наук, Москва, Россия
**** Институт прикладной математики ДВО, РАН, Владивосток, Россия*

Поступила в редколлегию 03.10.2007

Аннотация—Предлагается нетрадиционный метод оценки параметра произвольного сигнала, наблюдаемого в смеси с гауссовским шумом в дискретные моменты времени. Интервал наблюдений предполагается меньшим, чем характерный временной размер самого сигнала. Погрешности метода оценены аналитически. Приводятся примеры вычислительных экспериментов, демонстрирующие устойчивость и эффективность предложенного метода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей, особенно при разработке аппаратуры систем связи, является задача оценки параметров полезного сигнала, поступающего на вход приёмника, на фоне случайного шума. Традиционно, при решении таких задач, используют разложения в комплексный ряд Фурье, либо метод наименьших квадратов.

Однако для реализации разложения в комплексный ряд Фурье требуются наблюдения за достаточно длительный интервал времени, больший или сравнимый с периодом принимаемого сигнала. Если условия задачи этого не позволяют – остаётся использовать метод наименьших квадратов, который для достижения точности требует большего объёма вычислений.

В настоящей работе предлагается новый нетрадиционный метод оценки параметра произвольного зашумленного сигнала, основанный на декомпозиции результатов наблюдений, что позволяет на порядок снизить объём вычислений. Применение этого метода оказалось особо эффективным в приложениях к задачам акустики [1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется оценить неизвестный параметр a сигнала $f(a,t)$, наблюдаемого на фоне помех. Измерение $u(t) = f(a,t) + \xi(t)$ производится в дискретные моменты времени в окрестности t_0 с шагом h. Возможности аппаратуры позволяют изменять величину h в зависимости от желаемой точности и требований на скорость вычислений.

Предполагается, что $\xi(t)$ - стационарный гауссовский процесс, $M\xi(t) = 0$,

$$M\xi(t)\xi(s) = \begin{cases}\sigma^2, t=s\\ 0, t\neq s\end{cases}.$$

3. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Решение поставленной задачи состоит из двух этапов.

Этап первый.

Разобьём результаты измерений значения функции $u(t)$ $\{t, u(t)\}$ на две группы по $2N$ точек, как показано на рисунке 1.

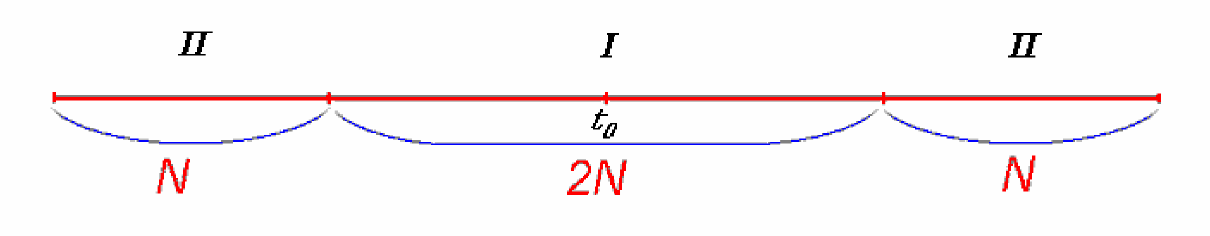

Рис. 1.

Все вычисления будем производить относительно точки t_0, объединив в первую группу $2N$ точек, близких к t_0, а во вторую – остальные, далёкие. Как будет видно из дальнейшего, это призвано минимизировать ошибку вычислений.

Для N пар точек первой группы, расположенных симметрично относительно t_0, найдём среднее значение функции $u(t)$ в точке t_0, а затем усредним его по N парам. Таким образом, получим параметр A_1^*, характеризующий оценку значения функции $u(t)$ в точке t_0.

Аналогичную операцию совершим и по отношению к точкам второй группы, только вместо поиска среднего в точке t_0, будем находить «производную», а затем также усредним её по N парам точек. Таким образом, получим параметр A_2^*, характеризующий производную функции $u(t)$ в точке t_0.

Опишем это математически. В качестве оценок величин A_1 и A_2

$$\begin{cases} A_1 = f(a\ \ ,t)\Big|_{t=t_0}, \\ A_2 = f_t'(a\ \ ,t)\Big|_{t=t_0} \end{cases}$$

по значениям наблюдаемого процесса $u(t)$ в моменты времени t_0-$2Nh,\dots,t_0$-$h,t_0+h,\dots,t_0+2Nh$ вычисляем

$$A_1^* = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \upsilon_1(kh), \tag{1}$$

$$A_2^* = \frac{1}{N}\sum_{k=N+1}^{2N} \upsilon_2(kh) \tag{2}$$

где

$$\upsilon_1(\tau) = \frac{1}{2}\{u(t_0+\tau)+u(t_0-\tau)\},$$

$$\upsilon_2(\tau) = \frac{1}{2\tau}\{u(t_0+\tau)-u(t_0-\tau)\},$$

h – шаг проведения измерений,
$4N$ – количество измерений,
4Δ – интервал наблюдения ($\Delta = Nh$)

Этап второй.

Оценки A_1^* и A_2^* параметров A_1 и A_2 соответственно свяжем с искомыми оценками параметров a и t_0 следующим образом:

$$\begin{cases} A_1^* = f(a^*,t)\Big|_{t=t_0^*}, \\ A_2^* = f_t'(a^*,t)\Big|_{t=t_0^*} \end{cases} \tag{3}$$

и для нахождения a^* решим систему уравнений (3) (аналитически или численно). Найденное значение a^* назовём искомой оценкой параметра a.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ

Покажем, что этот метод обеспечивает сходимость.

Вычислим погрешности оценок

$$\delta_1^2 = M(A_1^* - A_1)^2,\ \delta_2^2 = M(A_2^* - A_2)^2. \tag{4}$$

Разобьём общую ошибку на две компоненты – ошибку, вызванную шумом и ошибку, связанную с погрешностью самого метода.

Погрешности метода заложим в $R_1(\tau), R_2(\tau)$:

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2}\{f(t_0+\tau) + f(t_0-\tau)\} = A_1 + R_1(\tau) \tag{5}$$

$$f_2(\tau) = \frac{1}{2\tau}\{f(t_0+\tau) - f(t_0-\tau)\} = A_2 + R_2(\tau) \tag{6}$$

Подставляя (5), (6) в (1), (2), получим

$$A_1^* = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\upsilon_1(kh) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(f_1(kh) + \frac{1}{2}\xi_{kh} + \frac{1}{2}\xi_{-kh}\right) = A_1 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}R_1(kh) + \frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{N}\xi_{kh} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} A_2^* &= \frac{1}{N}\sum_{k=N+1}^{2N}\upsilon_2(kh) = \frac{1}{N}\sum_{k=N+1}^{2N}\left(f_2(kh) + \frac{1}{2kh}\xi_{kh} + \frac{1}{2kh}\xi_{-kh}\right) = \\ &= A_2 + \frac{1}{N}\sum_{k=N+1}^{2N}R_2(kh) + \frac{1}{2N}\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{\xi_{kh}+\xi_{-kh}}{kh} \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, из (4), с учётом (7), (8), следует

$$\delta_1^2 = M\left(A_1^* - A_1\right)^2 = M\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}R_1(kh) + \frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{N}\xi_{kh}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=1}^{N}R_1(kh)\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2N} = \frac{R_1^{N,h}}{N^2} + \frac{\sigma^2}{2N} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \delta_2^2 &= M\left(A_2^* - A_2\right)^2 = M\left(\frac{1}{N}\sum_{k=N+1}^{2N}R_2(kh) + \frac{1}{2N}\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{\xi_{kh}+\xi_{-kh}}{kh}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=N+1}^{2N}R_2(kh)\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2N^2}\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k^2h^2} = \frac{R_2^{N,h}}{N^2} + \frac{\sigma^2}{2N^2}\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k^2h^2} \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$R_1^{N,h} = \left(\sum_{k=1}^{N}R_1(kh)\right)^2,\ R_2^{N,h} = \left(\sum_{k=N+1}^{2N}R_2(kh)\right)^2 \tag{11}$$

Определим далее $R_1(\tau)$, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора функции $f_1(\tau)$ из (5):

$$f_1(\tau)=\frac{1}{2}\left\{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)\right\}=\frac{1}{2}\Big(f(t_0)+f'(t_0)\tau+r_1(t_0+\tau)+$$
$$+f(t_0)-f'(t_0)\tau+r_1(t_0-\tau)\Big)=f(t_0)+\frac{r_1(t_0+\tau)+r_1(t_0-\tau)}{2}$$

Выписывая остаточный член $r_1(t)$ в форме Лагранжа, получим

$$R_1(\tau)=\frac{\dfrac{f''(c_1)}{2!}\tau^2+\dfrac{f''(c_2)}{2!}\tau^2}{2}=\frac{f''(c)}{2}\tau^2,\ \text{где}\ t_0-\tau<c<t_0+\tau \tag{12}$$

Аналогично для $f_2(\tau)$ и $R_2(\tau)$ из (6)

$$f_2(\tau)=\frac{1}{2\tau}\left\{f(t_0+\tau)-f(t_0-\tau)\right\}=\frac{1}{2\tau}\left(f(t_0)+f'(t_0)\tau+\frac{f''(t_0)}{2}\tau^2+r_2(t_0+\tau)-\right.$$
$$\left.-f(t_0)+f'(t_0)\tau-\frac{f''(t_0)}{2}\tau^2+r_2(t_0-\tau)\right)=f'(t_0)+\frac{r_2(t_0+\tau)+r_2(t_0-\tau)}{2\tau}$$

$$R_2(\tau)=\frac{\dfrac{f'''(c_1)}{3!}\tau^3+\dfrac{f'''(c_2)}{3!}\tau^3}{2\tau}=\frac{f'''(c)}{6}\tau^2,\ \text{где}\ t_0-\tau<c<t_0+\tau \tag{13}$$

Тогда из (11) – (13)

$$\frac{R_1^{N,h}}{N^2}\le\frac{f''^2(c)}{36}\Delta^4 a_N,\quad a_N=\left(1+\frac{1}{N}\right)^6 \tag{14}$$

$$\frac{R_2^{N,h}}{N^2}\le\frac{f'''^2(c)}{324}\Delta^4 b_N,\ b_N=\left(\left(2+\frac{1}{N}\right)^3-\left(1+\frac{1}{N}\right)^3\right)^2 \tag{15}$$

Объединяя соотношения (14), (15) с (9), (10), получаем окончательно оценку погрешностей

$$\delta_1^2\le\frac{f''^2(c)}{36}\Delta^4 a_N+\frac{\sigma^2}{2N},\ \delta_2^2\le\frac{f'''^2(c)}{324}\Delta^4 b_N+\frac{\sigma^2}{2N\Delta^2},\ t_0-2\Delta<c<t_0+2\Delta$$

Эти формулы показывают, что путём выбора интервала наблюдения 4Δ и числа наблюдений $4N$ можно добиться требуемой погрешности в определении величин A_1 и A_2.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ МЕТОДА

Вычислительный эксперимент – сравнение с методом наименьших квадратов (сложность вычислений).

Рассмотрим предложенный метод в качестве альтернативы традиционному методу наименьших квадратов и сравним их на примере важной практической задачи оценки параметров достаточно сложной функции – солитона, возникающей в гидроакустике и связанной с повышенными требованиями к быстродействию [3] .

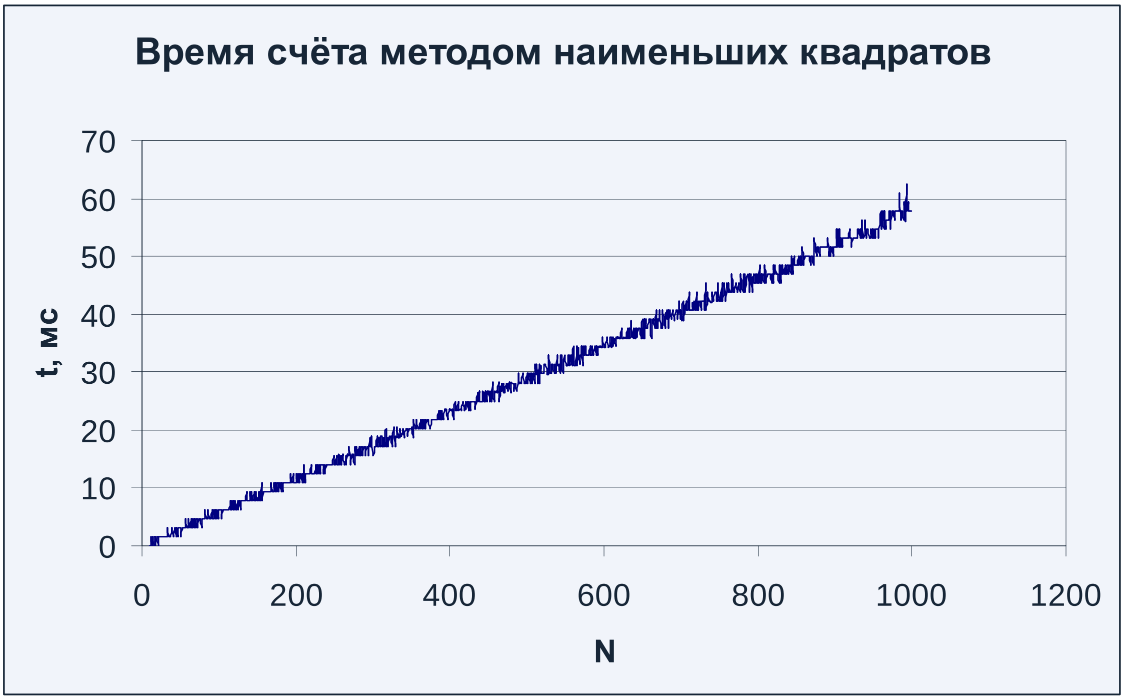

Рис. 2.

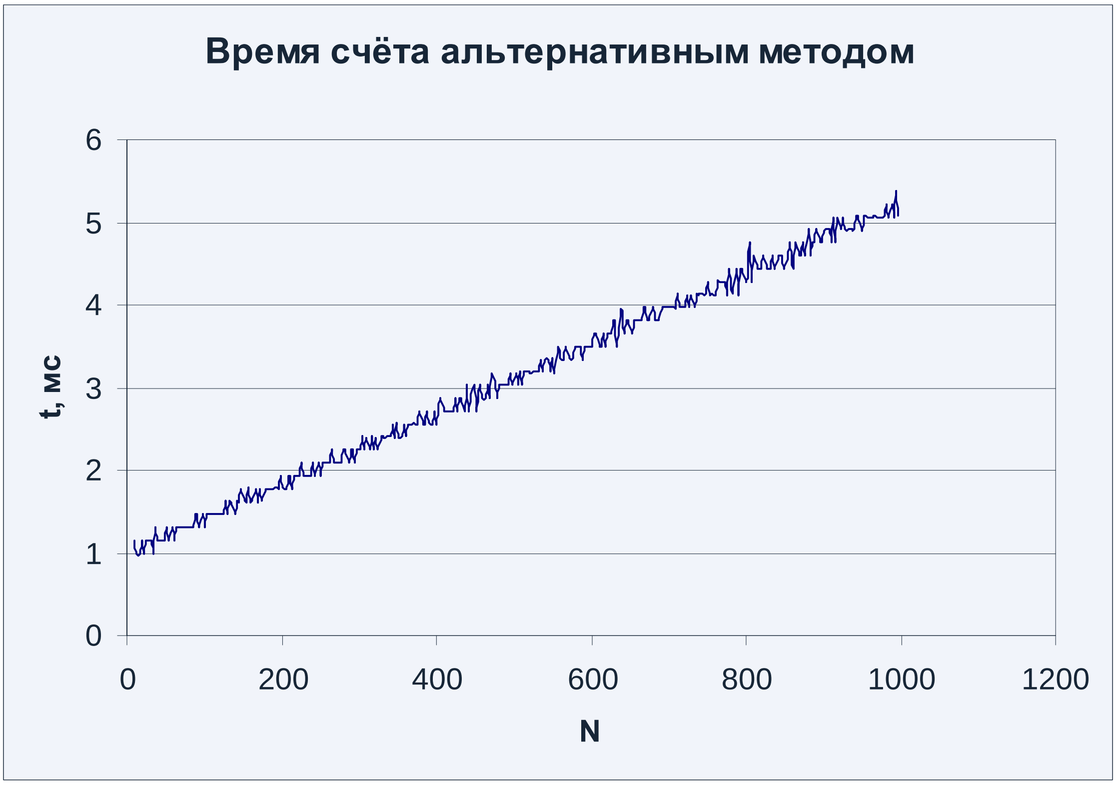

Рис. 3.

Как видно из результатов моделирования, предложенный алгоритм выигрывает на порядок у традиционно используемого метода наименьших квадратов.

Исследование точности определения параметра.

Для простейшей функции $f(a,t) = a\sin(t)$, $u(t) = f(a,t) + \xi(t)$, $a=1$, построим зависимость величины ошибки от количества измерений, для разного отношения “сигнал/шум”, задаваемого параметром σ из диапазона [0.01; 0.3] (что соответствует отношению “сигнал/шум” в пределах от 5 до 20).

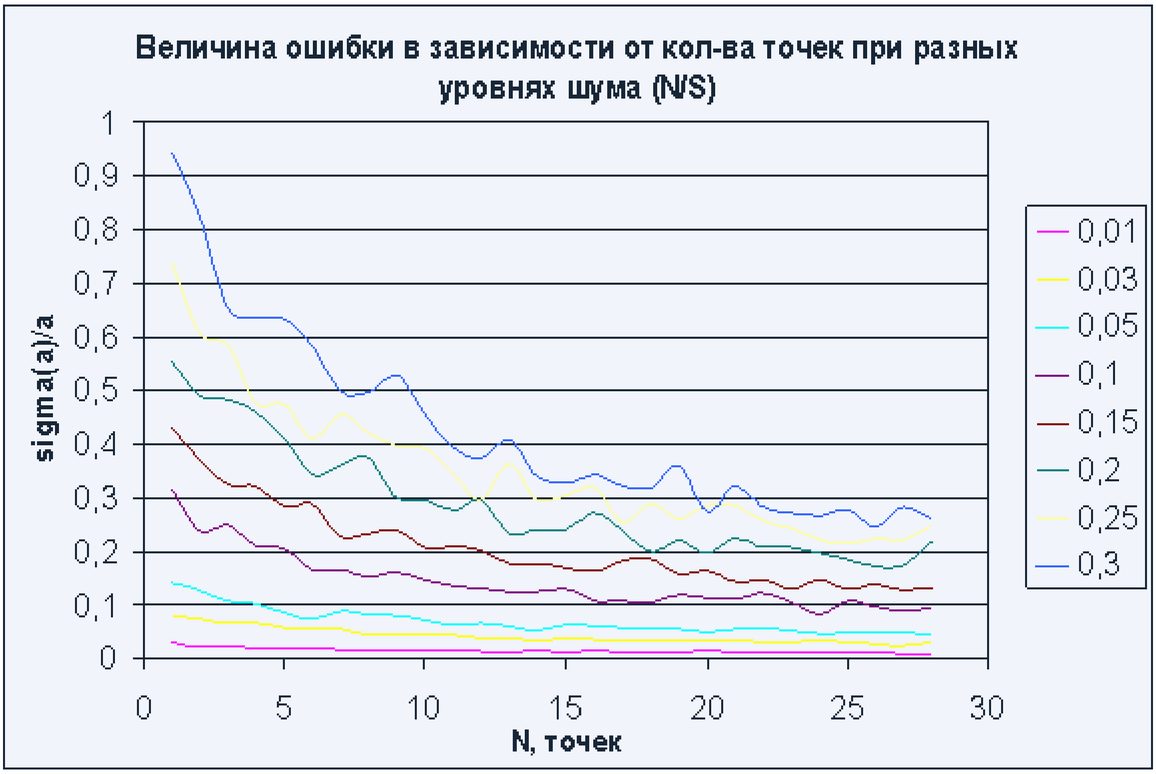

Рис. 4.

Область применения метода.

Из описания метода и исследования его на устойчивость, можно сформулировать несколько ограничений на область его применения.

- Ограничение, накладываемое постановкой задачи – узость окна, в котором проводятся измерения, по сравнению с периодом (характерным временем) функции.
- Достаточная гладкость функции. Это ограничение вытекает из формул оценки погрешностей. А именно, требуется непрерывность и конечность самой функции и её производных до третьего порядка включительно. Также желательно, чтобы вторая и третья производные были не очень велики по абсолютному значению. В противном случае потребуется провести много измерений за очень короткий промежуток времени, что не очень желательно, в то время как , например, метод наименьших квадратов не столь критичен к этой характеристике и может оказаться предпочтительнее в данной ситуации.
- Разрешимость уравнений (3). Эта система двух уравнений с двумя неизвестными всегда имеет решение, но его нахождение может потребовать численные методы.

В заключение следует отметить, что многочисленные вычислительные эксперименты, проведенные авторами, показали высокую эффективность предложенного метода при оценивании параметров самых разнообразных нелинейных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Угольков В. Н. «Цифровые методы определения параметров акустических сигналов по времени, близкому к реальному». Препр./ТОИ. Владивосток: ДВО АН СССР, 1989. 29 с.

2. Беспалов В. М., Цициашвили Г. Ш. «Оценка параметров нелинейного периодического сигнала на фоне случайного шума по наблюдениям в дискретные моменты времени». Математическая физика и математическое моделирование в экологии. Владивосток: ДВО АН СССР, 1990. С. 91-99

3. Цициашвили Г. Ш., Беспалов В. М., Осипова М. А. «Кооперативные и декомпозиционные эффекты в многоэлементных стохастических системах». Владивосток: ДВО РАН. С. 153-159.