Информационные процессы, Том 7, № 4, 2007, стр. 411–424.

Стационарные характеристики, связанные с временем пребывания заявки в системе $BMAP/G/1/r$ с дисциплиной обслуживания $LCFS\ PP$[1]

Т.А. Милованова

Российский университет Дружбы Народов, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 01.11.2007

Аннотация—Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с групповым марковским входящим потоком, ограниченным накопителем, произвольным распределением времени обслуживания заявки и инверсионным порядком обслуживания с вероятностным приоритетом. Получены формулы для вычисления стационарных характеристик, связанных с временами ожидания начала обслуживания и пребыванием заявки в системе.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была рассмотрена система массового обслуживания (СМО) $BMAP/G/1/r$ с групповым марковским входящим потоком заявок, общим распределением времени обслуживания заявки, одним прибором, накопителем конечной емкости, инверсионным порядком обслуживания с вероятностным приоритетом (дисциплина $LCFS\ PP$) и найдено для нее стационарное распределение марковского процесса, описывающего поведение очереди. Настоящая статья продолжает изучение этой системы и посвящена вычислению стационарных распределений времен ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

Ниже будут использованы следующие обозначения (см. также [1]):

Λ — матрица, элемент $(\Lambda)_{ij},\ \ i \neq j$, которой является интенсивностью перехода процесса генерации с фазы i на фазу j без появления новой группы заявок;

N_k — матрица, элемент $(N_k)_{ij},\ \ k \geq 1$, которой является интенсивностью перехода процесса генерации с фазы i на фазу j, сопровождаемого появлением новой группы из k заявок;

$\tilde{N}_k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} N_{k+i},\ \ k \geq 1,$ — матрица из интенсивностей $(\tilde{N}_k)_{ij}$ переходов процесса генерации заявок с фазы i на фазу j, при которых в систему поступают группы, содержащие, по крайней мере, k заявок;

$\Lambda^* = \Lambda + \tilde{N}_1$ — инфинитезимальная матрица марковского процесса генерации заявок;

$\vec{\pi}$ — вектор стационарных вероятностей фаз генерации заявок, т.е. стационарных вероятностей состояний марковского процесса с инфинитезимальной матрицей Λ^*;

r — емкость накопителя;

$R = r + 1$ — максимальное число заявок в системе;

$\lambda = \vec{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} kN_k\vec{1}$ — интенсивность входящего в систему потока.

Времена обслуживания заявок (длины заявок) независимы в совокупности и имеют функцию распределения $B(x)$ с конечным средним $b = \int\limits_0^{\infty} x\,dB(x) < \infty$, причем для простоты

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-07-89056)

изложения будем считать, что $B(x)$ имеет плотность вероятностей $b(x) = B'(x)$. Заявки в поступающей группе располагаются в случайном порядке.

Инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом (дисциплина *LCFS PP*) заключается в том, что в момент поступления группы заявок (остаточная) длина y первой заявки из группы поступивших заявок сравнивается с длиной x заявки, находившейся ранее на приборе. С вероятностью $d(y, x)$ новая поступающая заявка становится на прибор, остальные заявки из группы занимают первые места в очереди, за ними помещаются ранее обслуживавшаяся и все остальные ранее находившиеся в системе заявки. С дополнительной вероятностью $1 - d(y, x)$ ранее обслуживавшаяся заявка продолжает обслуживаться, за ней становятся заявки из поступившей группы и далее помещаются все остальные ранее находившиеся в системе заявки. В случае если после поступления группы в системе окажется m "лишних" заявок, сначала происходит перестановка всех заявок по описанному выше алгоритму, а затем первые m заявок (включая ту, которая, если бы не было переполнения, встала бы на прибор), удаляются из системы (теряются) и на прибор становится m-я заявка из вновь сформированной очереди. Заявки с прерванным обслуживанием дообслуживаются (а также могут быть потеряны, если при прерывании обслуживания происходит переполнение системы). Более подробное описание дисциплины *LCFS PP* приведено в [1].

Пусть:

$\vec{p}_0$ — стационарная (предельная) вероятность того, что в системе отсутствуют заявки (здесь и далее векторная запись отражает фазы генерации заявок);

$\vec{P}_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n = \overline{1, R}$, — стационарная вероятность того, что в системе находится n заявок длин меньше $x_1, \ldots, x_n$;

$\vec{p}_n(x_1, \ldots, x_n) = \partial^n \vec{P}_n(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_1 \cdots \partial x_n$ — соответствующая плотность вероятностей;

$\vec{P}_n(x) = \vec{P}_n(x, \infty, \ldots, \infty)$, $n = \overline{1, R}$, — стационарная вероятность того, что в системе находится n заявок и остаточная длина заявки на приборе меньше x;

$\vec{p}_n(x) = \vec{P}_n'(x) = \vec{p}_n(x, \infty, \ldots, \infty)$ — соответствующая плотность вероятностей;

α_1 — стационарная вероятность потери поступающей заявки (из-за переполнения накопителя при поступлении новой группы);

α_2 — стационарная вероятность потери принятой в систему и уже частично обслуженной заявки (из-за удаления ее с прибора при поступлении новой группы).

Далее, наряду с исходной системой, будем рассматривать вспомогательную СМО $BMAP/G/1/n$ с дисциплиной *LCFS PP*, отличающуюся от исходной только числом мест ожидания n, $n = \overline{0, r}$. Такую систему будем называть n-системой.

Введем обозначения:

$F_n(x)$, $n = \overline{0, r}$, — матрица, элемент $(F_n(x))_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что в конце периода занятости (ПЗ) n-системы, открываемого заявкой длины x фаза генерации будет j, при условии, что в начале этого ПЗ фаза генерации была i;

$F_{n,k}(x)$, $n = \overline{0, r}$, $k = \overline{0, n}$, — матрица, элемент $(F_{n,k}(x))_{ij}$ которой является условной вероятностью того, что в конце ПЗ n-системы, открываемого заявкой длины x на приборе и еще k заявками произвольных длин в очереди, фаза генерации будет j, при условии, что в начале этого ПЗ фаза генерации была i;

$F_{n,k}$, $n = \overline{0, r}$, $k = \overline{0, n}$, — матрица, элемент $(F_{n,k})_{ij}$ которой представляет собой условную вероятность того, что в конце ПЗ n-системы, открываемого заявкой произвольной длины на приборе и еще k заявками произвольных длин в очереди, фаза генерации будет j, при условии, что в начале этого ПЗ фаза генерации была i.

Стационарные характеристики $\vec{p}_0$, $\vec{p}_n(x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{p}_n(x)$, α_1 и α_2, а также матрицы $F_n(x)$, $F_{n,k}(x)$ и $F_{n,k}$ были вычислены в [1].

Для определенности при вычислении стационарных характеристик, связанных с временем пребывания заявки в системе, будем рассматривать только заявки, принятые в систему (т.е. не потерянные при поступлении).

Как будет показано ниже, методы исследования рассматриваемой в данной работе системы являются дальнейшим развитием методов, использованных для анализа СМО $MAP/G/1/r$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом [2].

2. СТАЦИОНАРНОЕ ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ НАЧАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Обратимся сначала к ПЗ n-системы, $n = \overline{0, r}$, открываемому заявкой длины x, и обозначим через $H_n(s|x)$ матрицу, элементом $(H_n(s|x))_{ij}$ которой является преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) такого ПЗ и события, заключающегося в том, что в конце ПЗ фаза генерации будет j, при условии, что в начале ПЗ она была i. Через $H_n(s) = \int\limits_0^\infty b(x) H_n(s|x)\, dx$ обозначим аналогичную матрицу, но для ПЗ, открываемого заявкой произвольной длины.

Рассмотрим ПЗ, открываемый заявкой длины $x + \Delta$, и ПЗ, открываемый заявкой длины x. За время Δ может произойти одно из следующих событий:

в систему не поступит ни одной заявки (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $I + \Lambda\Delta$) и продолжится ПЗ n-системы, $n \geq 1$, открываемый заявкой длины x (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_n(s|x)$);

в систему поступит группа из k, $1 \leq k \leq n$, заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $N_k\Delta$). Первая заявка из этой группы, имеющая длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), встанет на прибор (с вероятностью $d(y, x)$) и откроет ПЗ $(n-k)$-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_{n-k}(s|y)$). Другие заявки из группы займут первые $k-1$ мест в очереди и первая из них начнет ПЗ $(n-k+1)$-системы, открываемый заявкой произвольной длины (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_{n-k+1}(s)), \ldots$, последняя из них образует открываемый заявкой произвольной длины ПЗ $(n-1)$-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_{n-1}(s)$), после окончания которого продолжится обслуживание исходной заявки остаточной длины x, снова откроющей ПЗ n-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_n(s|x)$);

в систему поступит группа из k, $1 \leq k \leq n$, заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $N_k\Delta$). Первая заявка из этой группы, имеющая длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), займет первое место в очереди (с вероятностью $1 - d(y, x)$), а остальные вновь пришедшие заявки встанут за ней с учетом порядка. Исходная заявка остаточной длины x продолжит обслуживание на приборе, но откроет ПЗ $(n-k)$-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_{n-k}(s|x)$), после окончания которого начнется обслуживание заявки длины y, откроющей ПЗ $(n-k+1)$-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_{n-k+1}(s|y)$), после чего вторая из пришедших заявок произвольной длины откроет ПЗ $(n-k+2)$-системы (с учетом фазы генерации с ПЛС $H_{n-k+2}(s), \ldots$, последняя из пришедших заявок произвольной длины откроет ПЗ n-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_n(s)$);

в систему поступит группа, содержащая, по крайней мере, $n+1$ заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $\tilde{N}_{n+1}\Delta$), первая заявка из вновь пришедших будет иметь длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), первые вновь пришедшие заявки до количества n потеряются (с вероятностью $d(y, x)$)), первая заявка из оставшихся вновь пришедших заявок встанет на прибор, другие заявки из группы займут $n-1$ мест в очереди, а недообслуженная заявка остаточной длины x займет n-е место в очереди. Заявка произвольной длины, поступившая на прибор, откроет ПЗ 0-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_0(s)), \ldots$, потом последняя из пришедших заявок произвольной длины откроет ПЗ

$(n-1)$-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_{n-1}(s)$), по окончании которого недообслуженная заявка откроет ПЗ n-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_n(s|x)$);

в систему поступит группа из $n+1$ заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $N_{n+1}\Delta$), первая заявка, имеющая длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), встанет на прибор (с вероятностью $1-d(y,x)$) и откроет ПЗ 0-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_0(s|y)$), после чего вторая из пришедших заявка произвольной длины откроет ПЗ 1-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_1(s)$), $\dots$, потом последняя из пришедших заявок произвольной длины откроет ПЗ n-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_n(s)$), а исходная заявка остаточной длины x покинет систему;

в систему поступит группа, содержащая, по крайней мере, $n+2$ заявок (с учетом изменения фазы генерации с матричной вероятностью $\tilde{N}_{n+2}\Delta$), и первая заявка будет иметь длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$). Заявка остаточной длины x на приборе и первые вновь пришедшие заявки до количества $n+1$ потеряются (с вероятностью $1-d(y,x)$), первая заявка произвольной длины из оставшихся вновь пришедших заявок встанет на прибор, открывая ПЗ 0-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_0(s)$), $\dots$ и, наконец, последняя из пришедших заявок произвольной длины откроет ПЗ n-системы (с учетом изменения фазы генерации с ПЛС $H_n(s)$).

Применяя формулу полной вероятности, получаем при $n=\overline{1,r}$ уравнение

$$H_n(s|x+\Delta) = e^{-s\Delta}\Bigg((I+\Lambda\Delta)H_n(s|x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} N_k\Delta\int_0^\infty b(y)\Big[d(y,x)H_{n-k}(s|y)H_{n-k+1}(s)\cdots H_{n-1}(s)H_n(s|x) +$$

$$+[1-d(y,x)]H_{n-k}(s|x)H_{n-k+1}(s|y)H_{n-k+2}(s)\cdots H_n(s)\Big]\,dy +$$

$$+\tilde{N}_{n+1}\Delta\int_0^\infty d(y,x)b(y)H_0(s)\cdots H_{n-1}(s)H_n(s|x)\,dy +$$

$$+N_{n+1}\Delta\int_0^\infty [1-d(y,x)]b(y)H_0(s|y)H_1(s)\cdots H_n(s)\,dy +$$

$$+\int_0^\infty \tilde{N}_{n+2}\Delta[1-d(y,x)]b(y)H_0(s)\cdots H_n(s)dy\Bigg) + o(\Delta),\quad n=\overline{1,r},$$

откуда, вычитая $H_n(s|x)$, деля на Δ и устремляя Δ к нулю, приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}H_n(s|x) = -(sI-\Lambda)H_n(s|x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} N_k\int_0^\infty b(y)\Big[d(y,x)H_{n-k}(s|y)H_{n-k+1}(s)\cdots H_{n-1}(s)H_n(s|x) +$$

$$+[1-d(y,x)]H_{n-k}(s|x)H_{n-k+1}(s|y)H_{n-k+2}(s)\cdots H_n(s)\Big]\,dy +$$

$$+\ \tilde{N}_{n+1}\int\limits_0^\infty d(y,x)b(y)H_0(s)\cdots H_{n-1}(s)H_n(s|x)\,dy\ +$$

$$+\ N_{n+1}\int\limits_0^\infty [1-d(y,x)]b(y)H_0(s|y)H_1(s)\cdots H_n(s)\,dy\ +$$

$$+\int\limits_0^\infty \tilde{N}_{n+2}[1-d(y,x)]b(y)H_0(s)\cdots H_n(s)\,dy,\quad n=\overline{1,r}. \tag{1}$$

По аналогии получим следующее выражение для $H_0(s)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}H_0(s|x) = -(sI-\Lambda)H_0(s|x) + \tilde{N}_1\int\limits_0^\infty d(y,x)b(y)H_0(s|x)\,dy\ +$$

$$+\ N_1\int\limits_0^\infty [1-d(y,x)]b(y)H_0(s|y)\,dy + \int\limits_0^\infty \tilde{N}_2[1-d(y,x)]b(y)H_0(s)\,dy. \tag{1$'$}$$

Начальным условием для уравнений (1) и (1$'$) является

$$H_n(s|0) = I,\quad n=\overline{0,r}. \tag{2}$$

Отметим, что $H_n(0|x) = F_n(x)$.

Система интегро-дифференциальных уравнений (1), (1$'$) с начальным условием (2) решается рекуррентно по n, начиная с $n=0$ и кончая $n=r$. Возможный способ численного решения каждого из получающихся уравнений заключается в приведении его к интегральному и использовании метода итераций.

Отметим, что далее мы не будем рассматривать отдельно случай $n=0$, как это было сделано выше для $H_n(s|x)$, и случай $n=r$, считая, что $\sum\limits_1^0 = 0$.

Для того чтобы вычислить ПЛС $\vec{w}(s)$ стационарного распределения (с учетом фазы генерации заявки в момент поступления ее на прибор) времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки (напомним, что при рассмотрении распределений, связанных с временем пребывания заявки в системе, мы рассматриваем только те заявки, которые не теряются сразу же при поступлении в систему из-за переполнения накопителя), заметим, что вероятность поступления произвольной заявки в группе из k заявок при изменении фазы генерации с i-й на j-ю равна элементу $\left(\frac{k}{\lambda}N_k\right)_{ij}$ матрицы $\frac{k}{\lambda}N_k$, и эта заявка занимает любое место в группе с вероятностью $1/k$.

Введем матрицу $W_n(s|m,x)$, $n=\overline{1,r}$, $m=\overline{1,n}$, элементом $(W_n(s|m,x))_{ij}$ которой является ПЛС времени ожидания начала обслуживания заявки, занимающей последнее место в очереди в n-системе, в которой находится m заявок в очереди, а заявка на приборе имеет длину x. Аналогичный смысл имеет матрица $W_n(s|m)$, $n=\overline{1,r}$, $m=\overline{1,n}$, но при условии, что заявка на приборе имеет произвольную длину. Тогда

$$W_n(s|m,x) = H_{n-m}(s|x)H_{n-m+1}(s)\cdots H_{n-1}(s),\quad n=\overline{1,r},\quad m=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$W_n(s|m) = \int\limits_0^\infty W_n(s|m,x)b(x)\,dx,\quad n=\overline{1,r},\quad m=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Теперь мы можем написать формулу для $\vec{w}(s)$, которая получается из рассмотрения следующих событий:

в системе не было заявок (с вероятностью $\vec{p}_0$) и поступила группа из k, $1 \le k \le R$, заявок (с интенсивностью N_k). Тогда для первой заявки время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I), для j-й, $2 \le j \le k$, заявки время ожидания начала обслуживания равно сумме времен обслуживания $j-1$ заявок перед ней (с ПЛС $W_{R-k+j-1}(s|j-1)$);

в системе не было заявок (с вероятностью $\vec{p}_0$) и поступила группа из k, $k \ge R+1$, заявок (с интенсивностью N_k). Тогда первые $k-R$ заявок потерялись (их мы не учитываем), для первой из оставшихся заявок время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I), для j-й, $2 \le j \le R$, из оставшихся заявок время ожидания начала обслуживания равно сумме времен обслуживания $j-1$ заявок перед ней (с ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)$);

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из k, $1 \le k \le R-n$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых, имеющая длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$), прерывает обслуживание и сама становится на прибор (с вероятностью $d(x,y)$), остальные пришедшие заявки занимают первые места в очереди. Тогда для первой заявки время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I), для j-й, $2 \le j \le k$, заявки время ожидания начала обслуживания равно сумме времен обслуживания $j-1$ заявок перед ней (с ПЛС $W_{R-k-n+j-1}(s|j-1,x)$);

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из $R-n+1$ заявок (с интенсивностью N_{R-n+1}), первая из которых, имеющая длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$), потерялась, вторая прервала обслуживание и встала на прибор, остальные заняли первые места в очереди (с вероятностью $d(x,y)$). Тогда для первой из оставшихся заявок время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I), для j-й, $2 \le j \le R-n$, из оставшихся заявок время ожидания начала обслуживания равно сумме времен обслуживания $j-1$ заявок перед ней (с ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)$);

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из $R-n+1$ заявок (с интенсивностью N_{R-n+1}), первая из которых, имеющая длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$), встала на прибор, остальные пришедшие заявки заняли первые места в очереди (с вероятностью $1-d(x,y)$), а заявка, обслуживавшаяся на приборе раньше, потерялась. Тогда для первой заявки время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I), для j-й, $2 \le j \le R-n+1$, заявки время ожидания начала обслуживания равно сумме времен обслуживания $j-1$ заявок перед ней (с ПЛС $W_{R-k-n+j-1}(s|j-1,x)$);

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из k, $k \ge R-n+2$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых, имеющая длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$), потерялась вместе с $k-R+n$ другими поступившими заявками, $k-R+n+1$-я из пришедших заявок прервала обслуживание и встала на прибор (с вероятностью $d(x,y)$), а остальные пришедшие заявки заняли первые места в очереди. Тогда для первой из оставшихся заявок время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I), для j-й, $2 \le j \le R-n$, из оставшихся заявок время ожидания начала обслуживания равно сумме времен обслуживания $j-1$ заявок перед ней (с ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)$);

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из k, $k \ge R-n+2$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Заявка с прибора и первые $k-R+n-1$ из пришедших заявок потерялись, $(k-R+n)$-я заявка заняла прибор, остальные заявки заняли первые места в очереди (с вероятностью $1-d(x,y)$). Тогда для первой из оставшихся заявок время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I), для j-й, $2 \le j \le R-n+1$, заявки время ожидания начала обслуживания равно сумме времен обслуживания $j-1$ заявок перед ней (с ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)$);

в системе было R заявок, и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_R(y)$). Поступила группа из $k,\ k \ge 1$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Поступившие заявки потерялись (с вероятностью $d(x,y)$), и мы их не рассматриваем;

в системе было R заявок, и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_R(y)$). Поступила одна заявка (с интенсивностью N_1) длины x (с плотностью вероятностей $b(x)$), которая заняла прибор (с вероятностью $1-d(x,y)$), и для нее время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I);

в системе было R заявок, причем заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_R(y)$) и поступила группа из $k,\ \ k \ge 1$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Заявка с прибора потерялась вместе со всеми поступившими заявками, кроме последней, которая встала на прибор (с вероятностью $1-d(x,y)$). Для последней поступившей заявки время ожидания начала обслуживания равно нулю (с ПЛС I).

Применяя теперь формулу полной вероятности, получаем:

$$
\begin{aligned}
\vec{w}(s) = \frac{1}{\lambda(1-\alpha_1)}\Bigg[\vec{p}_0\Bigg(\sum_{k=1}^{R} N_k\Bigg(I+\sum_{j=1}^{k-1} W_{R-k+j}(s|j)\Bigg) + \sum_{k=R+1}^{\infty} N_k\Bigg(I+\sum_{j=1}^{r} W_j(s|j)\Bigg)\Bigg) + \\
+ \sum_{n=1}^{r}\int_0^\infty\int_0^\infty \vec{p}_n(y)\Bigg(\sum_{k=1}^{R-n} N_k\Bigg[d(x,y)\Bigg(I+\sum_{j=1}^{k-1} W_{R-k-n+j}(s|j,x)\Bigg) + \\
+ [1-d(x,y)]H_{R-k-n}(s|y)\Bigg(I+\sum_{j=1}^{k-1} W_{R-k-n+j+1}(s|j,x)\Bigg)\Bigg] + \\
+ N_{R-n+1}\Bigg[d(x,y)\Bigg(I+\sum_{j=1}^{r-n} W_j(s|j)\Bigg) + [1-d(x,y)]\Bigg(I+\sum_{j=1}^{R-n} W_j(s|j,x)\Bigg)\Bigg] + \\
+ \sum_{k=R-n+2}^{\infty} N_k\Bigg[d(x,y)\Bigg(I+\sum_{j=1}^{r-n} W_j(s|j)\Bigg) + [1-d(x,y)]\Bigg(I+\sum_{j=1}^{R-n} W_j(s|j)\Bigg)\Bigg]\Bigg) b(x)\,dx\,dy + \\
+ \int_0^\infty \vec{p}_R(y)\int_0^\infty \tilde{N}_1[1-d(x,y)]b(x)\,dx\,dy\Bigg]. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВКИ В СИСТЕМЕ

Прежде чем найти ПЛС стационарного распределения времени пребывания в системе произвольной заявки, введем обозначения:

$A_1 = \alpha_2/(1-\alpha_1)$ — стационарная вероятность того, что заявка покинет систему недообслуженной, при условии, что она не была потеряна при поступлении;

$A_2 = 1 - A_1$ — стационарная вероятность того, что заявка будет обслужена полностью, при условии, что она не была потеряна при поступлении.

Введем вектор $\vec{u}_n^{(1)}(s|x)$, $n=\overline{0,r}$, элементом $(\vec{u}_n^{(1)}(s|x))_i$ которого является ПЛС времени от начала обслуживания заявки длины x, недообслуженной до конца, до момента ухода ее из системы, при условии, что в начале обслуживания она была i и в системе была очередь длины n.

Подсчитаем время, которое должно пройти, чтобы длина этой заявки уменьшилось на Δ. Это время обязательно включает в себя собственно время Δ, необходимое для уменьшения длины на Δ (с ПЛС $e^{-s\Delta}$). Кроме того, возможны следующие варианты событий:

в систему не поступит новая группа заявок (с вероятностью $I+\Lambda\Delta$);

в систему поступит группа из k, $1\le k\le r-n$, заявок (с вероятностью $N_k\Delta$), первая из которых будет иметь длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), эта группа прервет обслуживание заявки на приборе (с вероятностью $d(y,x)$), заявка длины y займет прибор, открывая ПЗ $(r-n-k)$-системы (с ПЛС $H_{r-n-k}(s|y)$), по окончании которого вторая из вновь пришедших заявок откроет ПЗ $(r-n-k+1)$-системы (с ПЛС $H_{r-n-k+1}(s)$), и т.д., после чего последняя из пришедших заявок откроет ПЗ $(r-n-1)$-системы (с ПЛС $H_{r-n-1}(s)$), по окончании которого продолжится обслуживание заявки длины x и время от начала обслуживания до момента ухода ее из системы будет иметь ПЛС $\vec{u}_n^{(1)}(s|x)$;

поступающая группа из k, $1\le k\le r-n$, заявок не прервет обслуживание заявки на приборе (с вероятностью $1-d(y,x)$), а займет первые места в очереди, и время от начала обслуживания заявки длины x до момента ухода ее из системы будет иметь ПЛС $\vec{u}_{n+k}^{(1)}(s|x)$;

в систему поступит k, $k\ge R-n$, заявок (с вероятностью $\tilde{N}_{R-n}\Delta$), первая заявка будет иметь длину y (с плотностью вероятностей $b(y)$), первые $k-r+n$ заявок потеряются (с вероятностью $d(y,x)$), следующая заявка займет прибор и откроет ПЗ 0-системы (с ПЛС $H_0(s)$) и т.д., после чего последняя из пришедших заявка откроет ПЗ $(r-n-1)$-системы (с ПЛС $H_{r-n-1}(s)$), по окончании которого продолжится обслуживание заявки длины x и время от начала обслуживания до момента ухода ее из системы будет иметь ПЛС $\vec{u}_n^{(1)}(s|x)$;

после поступления k, $k\ge R-n$, заявок находившаяся на приборе заявка покинет систему (с вероятностью $1-d(y,x)$).

По формуле полной вероятности получаем

$$\vec{u}_n^{(1)}(s|x)=e^{-s\Delta}\Bigg((I+\Lambda\Delta)\vec{u}_n^{(1)}(s|x-\Delta)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r-n}N_k\Delta\int_0^\infty b(y)\Big[d(y,x)H_{r-n-k}(s|y)H_{r-n-k+1}(s)\cdots H_{r-n-1}(s)\vec{u}_n^{(1)}(s|x)+$$

$$+[1-d(y,x)]\vec{u}_{n+k}^{(1)}(s|x)\Big]\,dy+$$

$$+\tilde{N}_{R-n}\Delta\int_0^\infty b(y)\Big[d(y,x)H_0(s)\cdots H_{r-n-1}(s)\vec{u}_n^{(1)}(s|x)+(1-d(y,x))\vec{1}\Big]\,dy\Bigg)+o(\Delta),\quad n=\overline{0,r},$$

и имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_n^{(1)}(s|x)=\Bigg(-(sI+\Lambda)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r-n}N_k\int_0^\infty b(y)d(y,x)H_{r-n-k}(s|y)\,dy\,H_{r-n-k+1}(s)\cdots H_{r-n-1}(s)+$$

$$+\ \tilde{N}_{R-n}\int\limits_0^\infty b(y)d(y,x)\,dy\,H_0(s)\cdots H_{r-n-1}(s)\Bigg)\vec{u}_n^{(1)}(s|x)\ +$$

$$+\ \sum_{k=1}^{r-n}N_k\int\limits_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]\,dy\,\vec{u}_{n+k}^{(1)}(s|x)+\int\limits_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]\,dy\,\tilde{N}_{R-n}\vec{1},\quad n=\overline{0,r}, \qquad (6)$$

с начальным условием

$$\vec{u}_n^{(1)}(s|0)=\vec{0},\quad n=\overline{0,r}. \qquad (7)$$

Система (6) с начальным условием (7) решается рекуррентно, начиная с $n=r$ и кончая $n=0$.

Положим

$$\vec{u}_n^{(1)}(s)=\int\limits_0^\infty \vec{u}_n^{(1)}(s|x)b(x)\,dx,\quad n=\overline{0,r}.$$

Введем вектор $\vec{u}_n^{(2)}(s|x)$, $n=\overline{0,r}$, элементом $(\vec{u}_n^{(2)}(s|x))_i$ которого является ПЛС времени от начала обслуживания заявки длины x, принятой в систему и дообслуженной, до момента ухода ее из системы, при условии, что в начале обслуживания она была i и в системе была очередь длины n.

Дифференциальное уравнение для $\vec{u}_n^{(2)}(s|x)$ получается аналогично уравнению для $\vec{u}_n^{(1)}(s|x)$, поэтому приведем его без вывода:

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_n^{(2)}(s|x)=\Bigg(-(sI+\Lambda)\ +$$

$$+\ \sum_{k=1}^{r-n}N_k\int\limits_0^\infty b(y)d(y,x)H_{r-n-k}(s|y)\,dy\,H_{r-n-k+1}(s)\cdots H_{r-n-1}(s)\ +$$

$$+\ \tilde{N}_{R-n}\int\limits_0^\infty b(y)d(y,x)\,dy\,H_0(s)\cdots H_{r-n-1}(s)\Bigg)\vec{u}_n^{(2)}(s|x)\ +$$

$$+\ \sum_{k=1}^{r-n}N_k\int\limits_0^\infty b(y)[1-d(y,x)]\,dy\,\vec{u}_{n+k}^{(2)}(s|x),\quad n=\overline{0,r}. \qquad (8)$$

Начальное условие для этого уравнения имеет следующий вид:

$$\vec{u}_n^{(2)}(s|0)=\vec{1},\quad n=\overline{0,r}. \qquad (9)$$

Система (8) с начальным условием (9) решается точно так же, как и система (6) с начальным условием (7).

Положим

$$\vec{u}_n^{(2)}(s)=\int\limits_0^\infty \vec{u}_n^{(2)}(s|x)b(x)\,dx,\quad n=\overline{0,r}.$$

Введем обозначения:

$v_1(s)$ — ПЛС стационарного распределения времени пребывания в системе произвольной заявки, недообслуженной до конца;

$v_2(s)$ — ПЛС стационарного распределения времени пребывания в системе произвольной заявки, обслуженной до конца.

Тогда

$$v_i(s) = \frac{1}{\lambda A_i}\Bigg[\vec{p}_0\Bigg(\sum_{k=1}^{R} N_k\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{k-1}(s) + \sum_{j=1}^{k-1} W_{r-k+j+1}(s|j)\vec{u}^{(i)}_{k-j+1}(s)\Bigg) +$$

$$+ \sum_{k=R+1}^{\infty} N_k\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{r}(s) + \sum_{j=1}^{r} W_j(s|j)\vec{u}^{(i)}_{r-j}(s)\Bigg)\Bigg) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{r}\int_0^\infty\int_0^\infty \vec{p}_n(y)\Bigg(\sum_{k=1}^{R-n} N_k\Bigg[d(x,y)\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{k+n-1}(s|x) + \sum_{j=1}^{k-1} W_{R-n-k+j}(s|j,x)\vec{u}^{(i)}_{n+k-j-1}(s)\Bigg) +$$

$$+ [1-d(x,y)]H_{R-k-n}(s|y)\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{k+n-2}(s|x) + \sum_{j=1}^{k-1} W_{R-n-k+j+1}(s|j,x)\vec{u}^{(i)}_{n+k-j-1}(s)\Bigg)\Bigg] +$$

$$+ N_{R-n+1}\Bigg[d(x,y)\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{r}(s) + \sum_{j=1}^{r-n} W_j(s|j)\vec{u}^{(i)}_{r-j}(s)\Bigg) +$$

$$+ [1-d(x,y)]\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{r}(s|x) + \sum_{j=1}^{r-n+1} W_j(s|j,x)\vec{u}^{(i)}_{r-j}(s)\Bigg)\Bigg] +$$

$$+ \sum_{k=R-n+2}^{\infty} N_k\Bigg[d(x,y)\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{r}(s) + \sum_{j=1}^{r-n} W_j(s|j)\vec{u}^{(i)}_{r-j}(s)\Bigg) +$$

$$+ [1-d(x,y)]\Bigg(\vec{u}^{(i)}_{r}(s) + \sum_{j=1}^{r-n+1} W_j(s|j)\vec{u}^{(i)}_{r-j}(s)\Bigg)\Bigg]\Bigg)b(x)\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty \vec{p}_R(y)\Bigg(N_1[1-d(x,y)]\vec{u}^{(i)}_{r}(s|x) + \sum_{k=2}^{\infty} N_k[1-d(x,y)]\vec{u}^{(i)}_{r}(s)\Bigg)b(x)\,dx\,dy\Bigg], \quad i=\overline{1,2}. \qquad (10)$$

Приведем вывод формулы (10) для $\vec{v}_1(s)$. Это формула получается следующим образом:

в системе не было заявок (с вероятностью $\vec{p}_0$) и поступила группа из k, $1 \le k \le R$, заявок (с интенсивностью N_k). Тогда для первой заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_{k-1}(s)$, для j-й, $2 \le j \le k$, заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{R-k+j-1}(s|j-1)\vec{u}^{(1)}_{k-j+2}(s)$;

в системе не было заявок (с вероятностью $\vec{p}_0$) и поступила группа из k, $k \ge R+1$, заявок (с интенсивностью N_k). Тогда первые $k-R$ заявок потерялись, и для первой из оставшихся заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_{r}(s)$, для j-й, $2 \le j \le R$, заявки из оставшихся время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)\vec{u}^{(1)}_{r-j+1}(s)$;

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из k, $1 \le k \le R-n$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых, имевшая длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$), прервала обслуживание и встала на прибор (с вероятностью $d(x,y)$), остальные пришедшие заявки заняли первые места в очереди. Тогда для первой заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_{k+n-1}(s|x)$, для j-й, $2 \le j \le k$, заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{R-k-n+j-1}(s|j-1,x)\vec{u}^{(1)}_{n+k-j}(s)$;

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из k, $1 \le k \le R-n$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Эти заявки заняли первые места в очереди (с вероятностью $d(x,y)$) и продолжилось обслуживание заявки длины y, открывшей ПЗ $(R-k-n)$-системы с ПЛС $H_{R-k-n}(s)$. Тогда для первой заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_{k+n-2}(s|x)$, для j-й, $2 \le j \le k$, заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{R-k-n+j}(s|j-1,x)\vec{u}^{(1)}_{n+k-j}(s)$;

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из $R-n+1$ заявок (с интенсивностью N_{R-n+1}), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Первая из пришедших заявка потерялась, вторая прервала обслуживание и встала на прибор, остальные пришедшие заявки заняли первые места в очереди (с вероятностью $d(x,y)$). Тогда для первой из оставшихся заявок время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_r(s)$, для j-й, $2 \le j \le R-n$, из оставшихся заявок время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)\vec{u}^{(1)}_{r-j+1}(s)$;

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из $R-n+1$ заявок (с интенсивностью N_{R-n+1}), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Заявка с прибора потерялась, первая из пришедших заявок встала на прибор, остальные пришедшие заявки заняли первые места в очереди (с вероятностью $1-d(x,y)$). Тогда для первой заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_r(s|x)$, для j-й, $2 \le j \le R-n+1$, заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{j-1}(s|j-1,x)\vec{u}^{(1)}_{r-j+1}(s)$;

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из k, $k \ge R-n+2$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых, имевшая длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$), потерялась вместе с $k-R+n$ заявками, $(k-R+n+1)$-я из пришедших заявок прервала обслуживание и встала на прибор (с вероятностью $d(x,y)$), остальные пришедшие заявки заняли первые места в очереди. Тогда для первой из оставшихся заявок время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_r(s)$, для j-й, $2 \le j \le R-n$, из оставшихся заявок время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)\vec{u}^{(1)}_{r-j+1}(s)$;

в системе было n, $1 \le n \le r$, заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_n(y)$). Поступила группа из k, $k \ge R-n+2$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Заявка с прибора потерялась вместе с первыми $k-R+n-1$ из пришедших, $(k-R+n)$-я заявка заняла прибор, остальные заявки заняли первые места в очереди (с вероятностью $1-d(x,y)$). Тогда для первой из оставшихся заявок время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_r(s)$, для j-й, $2 \le j \le R-n+1$, заявки время пребывания в системе имеет ПЛС $W_{j-1}(s|j-1)\vec{u}^{(1)}_{r-j+1}(s)$);

в системе было R заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_R(y)$). Поступила группа из k, $k \ge 1$, заявок (с интенсивностью N_k), которые потерялись (с вероятностью $d(x,y)$);

в системе было R заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_R(y)$). Поступила одна заявка (с интенсивностью N_1) длины x (с плотностью вероятностей $b(x)$), которая встала на прибор (с вероятностью $1-d(x,y)$), и ее время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}^{(1)}_r(s|x)$;

в системе было R заявок и заявка на приборе имела длину y (с плотностью вероятностей $\vec{p}_R(y)$). Поступила группа из k, $k \ge 2$, заявок (с интенсивностью N_k), первая из которых имела длину x (с плотностью вероятностей $b(x)$). Тогда потерялась заявка с прибора вместе со всеми поступившими заявками, кроме последней, которая встала на прибор (с вероятностью $1 - d(x, y)$), и для нее время пребывания в системе имеет ПЛС $\vec{u}_r^{(1)}(s)$.

Применяя формулу полной вероятности, получаем выражение (10) для $\vec{v}_1(s)$.

Формула (10) для $\vec{v}_2(s)$ выводится аналогично.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ

Использовать полученные соотношения для вычисления стационарных распределений, связанных с временем пребывания заявки в системе, сложно, однако их можно применить для вычисления моментов.

Для примера приведем алгоритм вычисления среднего времени ожидания начала обслуживания. Для этого введем обозначения

$$M_n(x) = -\frac{\partial}{\partial s} H_n(s|x)\Big|_{s=0}, \quad n = \overline{0, r},$$

$$M_n = -\frac{d}{ds} H_n(s)\Big|_{s=0} = \int_0^\infty b(x) M_n(x)\, dx, \quad n = \overline{0, r}.$$

Продифференцировав (1) и (1′) по s и положив $s = 0$, получаем интегро-дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} M_0(x) = F_0(x) + \Lambda M_0(x) \; + \tilde{N}_1 \int_0^\infty d(y,x) b(y) M_0(x)\, dy \; +$$

$$+ \; N_1 \int_0^\infty [1 - d(y,x)] b(y) M_0(y)\, dy \; + \int_0^\infty \tilde{N}_2 [1 - d(y,x)] b(y) M_0\, dy, \tag{11′}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} M_n(x) = F_n(x) + \Lambda M_n(x) \; +$$

$$+ \; \sum_{k=1}^{n} N_k \int_0^\infty b(y) \Big[d(y,x) \Big(M_{n-k}(y) F_{n-k+1} \cdots F_{n-1} F_n(x) \; +$$

$$+ \; F_{n-k}(y) M_{n-k+1} F_{n-k+2} \cdots F_{n-1} F_n(x) + \ldots + F_{n-k}(y) F_{n-k+1} \cdots F_{n-2} M_{n-1} F_n(x) \; +$$

$$+ \; F_{n-k}(y) F_{n-k+1} \cdots F_{n-1} M_n(x) \Big) \; +$$

$$+ \; [1 - d(y,x)] \Big(M_{n-k}(x) F_{n-k+1}(y) F_{n-k+2} \cdots F_n \; +$$

$$+ \; F_{n-k}(x) M_{n-k+1}(y) F_{n-k+2} \cdots F_n + \ldots + F_{n-k}(x) F_{n-k+1}(y) F_{n-k+2} \cdots F_{n-1} M_n \Big) \Big]\, dy \; +$$

$$+ \; \tilde{N}_{n+1} \int_0^\infty d(y,x) b(y) \Big(M_0 F_1 \cdots F_{n-1} F_n(x) \; +$$

$$+ \; F_0 M_1 F_2 \cdots F_{n-1} F_n(x) + \ldots + F_0(s) \cdots F_{n-1} M_n(x) \Big)\, dy \; +$$

$$+ \; N_{n+1} \int_0^\infty [1 - d(y,x)] b(y) \Big(M_0(y) F_1 \cdots F_n + F_0(y) M_1 F_2 \cdots F_n + \ldots + F_0(y) F_1 \cdots F_{n-1} M_n \Big)\, dy \; +$$

$$+\int_0^\infty \tilde{N}_{n+2}[1-d(y,x)]b(y)\Big(M_0F_1\cdots F_n + F_0M_1F_2\cdots F_n + \ldots + F_0\cdots F_{n-1}M_n\Big)\,dy,\quad n=\overline{1,r},\tag{11}$$

с начальным условием

$$M_n(0)=0,\quad n=\overline{0,r}.\tag{12}$$

Система уравнений (11), (11′) с начальным условием (12) решается точно так же и система (1), (1′) с начальным условием (2).

Введем обозначения

$$L_n(m,x) = -\frac{\partial}{\partial s}W_n(s|m,x)\Big|_{s=0},\quad n=\overline{0,r},$$

$$L_n(m) = -\frac{d}{ds}W_n(s|m)\Big|_{s=0},\quad n=\overline{0,r},$$

Тогда из (3) и (4) имеем:

$$L_n(m,x) = M_{n-m}(x)F_{n-m+1}\cdots F_{n-1} + F_{n-m}(x)M_{n-m+1}F_{n-m+2}\cdots F_{n-1} +$$

$$+\ldots + F_{n-m}(x)F_{n-m+1}\cdots F_{n-2}M_{n-1},\quad n=\overline{0,r},$$

$$L_n(m) = \int_0^\infty L_n(m,x)b(x)\,dx,\quad n=\overline{0,r}.$$

Обозначим через $\vec{w} = -\vec{w}'(0)$ среднее время ожидания начала обслуживания. Продифференцировав (5) и положив $s=0$, получим:

$$\vec{w} = \frac{1}{\lambda(1-\alpha_1)}\Bigg[\vec{p}_0\Bigg(\sum_{k=1}^{R}N_k\Big(-I+\sum_{j=1}^{k-1}L_{R-k+j}(j)\Big) + \sum_{k=R+1}^{\infty}N_k\Big(-I+\sum_{j=1}^{r}L_j(j)\Big)\Bigg) +$$

$$+\sum_{n=1}^{r}\int_0^\infty\int_0^\infty \vec{p}_n(y)\Bigg(\sum_{k=1}^{R-n}N_k\Bigg[d(x,y)\Big(-I+\sum_{j=1}^{k-1}L_{R-k-n+j}(j,x)\Big) +$$

$$+[1-d(x,y)]M_{R-k-n}(y)\Big(I+\sum_{j=1}^{k-1}W_{R-k-n+j+1}(0|j,x)\Big) +$$

$$+[1-d(x,y)]F_{R-k-n}(y)\Big(-I+\sum_{j=1}^{k-1}L_{R-k-n+j+1}(j,x)\Big)\Bigg] +$$

$$+N_{R-n+1}\Bigg[d(x,y)\Big(-I+\sum_{j=1}^{r-n}L_j(j)\Big) + [1-d(x,y)]\Big(-I+\sum_{j=1}^{R-n}L_j(j,x)\Big)\Bigg] +$$

$$+\sum_{k=R-n+2}^{\infty}N_k\Bigg[d(x,y)\Big(-I+\sum_{j=1}^{r-n}L_j(j)\Big) + [1-d(x,y)]\Big(-I+\sum_{j=1}^{R-n}L_j(j)\Big)\Bigg]\Bigg)b(x)\,dx\,dy\Bigg].$$

Аналогичным образом получаются соотношения для вычисления среднего времени пребывания заявки в системе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена однолинейная СМО с групповым марковским входящим потоком, ограниченным накопителем, произвольным распределением времени обслуживания заявки и дисциплиной обслуживания $LCLS\ PP$. Получены формулы для вычисления основных стационарных показателей функционирования, связанных с временем пребывания заявки в системе. Полученные соотношения могут быть использованы для написания программ вычисления стационарных характеристик, связанных с временем пребывания заявки в системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милованова Т.А. Система $BMAP/G/1/r$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом. *Информационные процессы.* 2007, № 1, стр. 153–167.

2. Печинкин А.В., Свищева Т.А. Система $MAP/G/1/r$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом. *Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика*, 2000, № 1, стр. 119–143.