Информационные процессы, Том 8, № 2, 2008, стр. 108–124.

Стационарные временные характеристики системы $G/M/n/r$ с некоторыми вариантами дисциплины обобщённого обновления[1]

И.С. Зарядов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 22.05.2008

Аннотация—Рассматривается система массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания, конечным накопителем и следующими вариантами дисциплины обслуживания и обобщённого обновления заявок: инверсионный порядок обновления при прямом порядке обслуживания, прямой и инверсионный порядки обновления при инверсионном порядке обслуживания. Найдены стационарные временные характеристики пребывания в накопителе «убитой» и обслуженной заявок.

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим n-линейную систему массового обслуживания (СМО) $G/M/n/r$ с конечным накопителем ёмкости r и обобщённым обновлением.

Входящий в систему поток является рекуррентным, причём время между соседними поступлениями заявок имеет произвольную функцию распределения (ФР) $A(x)$. Будем предполагать, что среднее время $a = \int\limits_0^\infty x\,dA(x)$ между поступлениями заявок конечно. Кроме того, для простоты изложения при выводе уравнений будем считать, что ФР $A(x)$ имеет плотность распределения $a(x) = A'(x)$.

Времена обслуживания заявок на приборах являются независимыми одинаково распределёнными по экспоненциальному с параметром μ закону случайными величинами. Заявка, заставшая в момент поступления в системе n заявок на приборах и r заявок в накопителе, теряется.

Обобщённое обновление определяется следующим образом. Находящаяся на приборе заявка в момент окончания обслуживания одновременно с уходом из системы либо с вероятностью $q(l)$, $l = \overline{0,r}$, «убивает» в накопителе ровно l заявок, если в нем находится более l заявок, либо с вероятностью $Q(l) = \sum\limits_{k=l}^{r} q(k)$, $l = \overline{0,r-1}$, полностью опустошает накопитель, если в нем было не более l заявок. Вероятности $q(l)$ при $l = \overline{1,r}$ будем называть вероятностями обновления. Очевидно, что $Q(0) = \sum\limits_{l=0}^{r} q(l) = 1$, а $p = q(0)$ — вероятность того, что закончившая обслуживание на приборе заявка покидает систему, не «убивая» заявок в накопителе.

В настоящей работе будут получены в терминах преобразований Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) стационарные распределения времён пребывания в накопителе «убитой» и обслуженной заявок для следующих вариантов дисциплины обслуживания и обобщённого обновления заявок:

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-07-89056)

инверсионный порядок обобщённого обновления (заявки «убиваются» в накопителе в порядке, обратном поступлению) при дисциплине обслуживания в порядке поступления ($FIFO$);

прямой порядок обобщённого обновления (заявки «убиваются» в накопителе в порядке поступления) при инверсионном порядке обслуживания ($LIFO$);

инверсионный порядок обобщённого обновления при дисциплине обслуживанияи $LIFO$.

Отметим, что при $p = 1$ рассматриваемая система превращается в стандартную систему $G/M/n/r$ (см., например, [1]), а при $q(r) = 1$ получаем систему с обновлением, исследовавшуюся в $[2, 3, 4, 5]$.

В случае прямого порядка обновления и дисциплины обслуживания $FIFO$ данная СМО была рассмотрена в работе [6], в которой были найдены следующие стационарные характеристики: распределения по вложенной цепи Маркова, образованной числом заявок в системе в моменты поступления заявок, вероятности потери из накопителя и обслуживания заявок, распределения времён пребывания в накопителе обслуженной и «убитой» заявок. Поскольку найденные в работе [6] характеристики остаются теми же самыми и для рассматриваемых в настоящей работе вариантов дисциплины обобщённого обновления и обслуживания, то формулы для их вычисления здесь не приводятся.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При исследовании описываемой системы будем использовать найденные в [6] стационарные по вложенной цепи Маркова распределение вероятностей $\vec{p}^{\,-} = (p_0^-, \ldots, p_{n+r}^-)^T$, где p_k^-, $k = \overline{0, n+r}$, — стационарная вероятность того, что поступившая в систему заявка застала в ней k других заявок, а также стационарные вероятностями p_{loss} потери и p_{serv} обслуживания принятой в систему заявки.

Кроме того, в данной работе будут использованы следующие вероятности, определённые в [6]:

$\pi_m(k)$, $k = \overline{1, n+r}$, $m = \overline{1, k}$, — вероятность того, что за время x систему покинет (будет обслужено и «убито») ровно k заявок, при условии, что за это время обслужится ровно m заявок и новые заявки в систему не поступят;

$\tilde{\pi}_m(k)$, $k = \overline{1, r}$, $m = \overline{1, k}$, — вероятность того, что в конце временного интервала x в системе останется $n-1$ заявок, при условии, что в начальный момент времени в системе было $n+k-1$ заявок, за время x обслужилось ровно m заявок и новые заявки в систему не поступили.

Обозначим через $W^{(\text{serv})}(x)$ ($W^{(\text{loss})}(x)$) стационарное распределение времени пребывания в накопителе обслуженной (соответственно, «убитой») заявки, а через $W_{i,j}^{(\text{serv})}(x)$ ($W_{i,j}^{(\text{loss})}(x)$) — вероятность того, что до момента времени x заявка, перед которой в накопителе стоит i, $i = \overline{0, r-1}$, а после неё — ещё j, $j = \overline{0, r-1-i}$, других заявок, начнёт обслуживаться на приборе (будет «убита»), при условии, что в начальный момент в систему поступила заявка. Через $w_{i,j}^{(\text{loss})}(x)$ и $w_{i,j}^{(\text{serv})}(x)$ обозначим производные (плотности) функций $W_{i,j}^{(\text{loss})}(x)$ и $W_{i,j}^{(\text{serv})}(x)$, а через $\omega_{i,j}^{(\text{loss})}(s)$ и $\omega_{i,j}^{(\text{serv})}(s)$ — ПЛС этих функций.

По формуле полной вероятности получаем

$$W^{(\text{loss})}(x) = \frac{1}{(1-\pi)p_{\text{loss}}} \sum_{i=0}^{r-1} W_{i,0}^{(\text{loss})}(x) p_{n+i}^-, \tag{1}$$

$$W^{(\text{serv})}(x) = \frac{1}{(1-\pi)p_{\text{serv}}} \sum_{i=0}^{r-1} W_{i,0}^{(\text{serv})}(x) p_{n+i}^-. \tag{2}$$

Заметим, что для для всех трех перечисленных во введении вариантов дисциплины обслуживания и обобщённого обновления (а также для для случая прямого порядка обновления и дисциплины обслуживания $FIFO$, рассмотренного в работе [6]) полученные выражения (1)–(2) одни и те же. Различие состоит только в выражениях для вероятностей $W_{i,j}^{(\mathrm{serv})}(x)$ ($W_{i,j}^{(\mathrm{loss})}(x)$), $i = \overline{0, r-1}$, $j = \overline{0, r-1-i}$. Нахождение этих вероятностей и представляет основную задачу настоящей работы. Эта задача для каждого из трех вариантов будет решена в следующих разделах.

В заключение этого раздела отметим, что формулы (1)–(2) в терминах ПЛС принимают следующий вид:

$$\omega^{(\mathrm{loss})}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dW^{(\mathrm{loss})}(x) = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{loss}}} \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{i,0}^{(\mathrm{loss})}(s) p_{n+i}^-, \tag{3}$$

$$\omega^{(\mathrm{serv})}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dW^{(\mathrm{serv})}(x) = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{serv}}} \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{i,0}^{(\mathrm{serv})}(s) p_{n+i}^-. \tag{4}$$

3. ПРЯМОЙ ПОРЯДОК ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИНВЕРСИОННЫМ ПОРЯДКОМ ОБОБЩЁННОГО ОБНОВЛЕНИЯ

Прежде чем перейти к вычислению стационарных распределений, связанных с временем пребывания заявки в системе, введём вспомогательные функции:

$U_0(x)$ — вероятность того, что за время x не обслужится ни одна заявка;

$U_{m,k}(x)$, $m \geq 1$, $k \geq 0$, $m + k = \overline{0, r-1}$, — условная вероятность того, что за время x обслужится ровно m заявок и будет «убито» ровно k заявок, при условии, что в начальный момент в накопителе было больше $m + k$ заявок;

$\tilde{U}_{m,j}(x)$, $m \geq 1$, $j \geq 0$, $m + j = \overline{1, r}$, — условная вероятность того, что m-я обслуженная заявка покинет прибор до момента x, после момента окончания обслуживания $(m-1)$-й заявки будет «убито» менее j заявок, но непосредственно после окончания обслуживания m-й заявки будут «убиты» все оставшиеся в накопителе заявки (всего за время x будет убито j заявок), при условии, что в начальный момент в накопителе было $m + j$ заявок и за время x новые заявки в систему не поступят;

$U_{m,j}^*(x)$, $m, j \geq 0$, $m + j = \overline{1, r-1}$, — условная вероятность того, что некоторая заявка поступит на прибор, причем до момента x, при условии, что в начальный момент в накопителе перед этой заявкой находилось m, а после нее j заявок и новые заявки за время x в систему не поступят.

Через $\tilde{u}_{m,j}(x)$ и $u_{m,j}^*(x)$ обозначим плотности вероятностей $\tilde{U}_{m,j}(x)$ и $U_{m,j}^*(x)$ соответственно.

Функции $U_0(x)$, $U_{m,k}(x)$, $\tilde{u}_{m,j}(x)$ и $u_{m,j}^*(x)$ имеют вид

$$U_0(x) = e^{-\mu n x}, \quad U_{m,k}(x) = \pi_m(m+k) \frac{(\mu n x)^m}{m!} e^{-\mu n x}, \quad m \geq 1, \quad k \geq 0, \quad m + k = \overline{0, r-1}, \tag{5}$$

$$\tilde{u}_{m,j}(x) = \tilde{\pi}_m(m+j) \frac{(\mu n)^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\mu n x}, \quad m \geq 1, \quad j \geq 0, \quad m + j = \overline{1, r}, \tag{6}$$

$$u_{m,j}^*(x) = \sum_{l=0}^{j} \pi_m(m+l) \frac{(\mu n)^m x^{m-1}}{m!} e^{-\mu n x}, \quad m \geq 1, \quad j \geq 0, \quad m + j = \overline{1, r}. \tag{7}$$

Для дальнейшего нам понадобятся также функции $\psi_0(s)$ $\psi_{m,k}(s)$, $\tilde{\psi}_{m,j}(s)$ и $\psi^*_{m,j}(s)$, которые в соответствии с (5)–(7) имеют вид

$$\psi_0(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} U_0(x)\, dA(x) = \alpha(\mu n + s),$$
$$\psi_{m,k}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} U_{m,k}(x)\, dA(x) = (-1)^m \pi_m(m+k) \frac{(\mu n)^m}{m!} \alpha^{(m)}(\mu n + s), \tag{8}$$
$$m \geq 1, \quad k \geq 0, \quad m+k = \overline{0, r-1},$$

$$\tilde{\psi}_{m,j}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} \tilde{u}_{m,j}(x) \bar{A}(x)\, dx =$$
$$= \tilde{\pi}_m(m+j) \left(\left(\frac{\mu n}{\mu n + s} \right)^m + (-1)^m \frac{(\mu n)^m}{(m-1)!} \tilde{\alpha}^{(m-1)}(\mu n + s) \right), \tag{9}$$
$$m \geq 1, \quad j \geq 0, \quad m+j = \overline{1, r},$$

$$\psi^*_{m,j}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} u^*_{m,j}(x) \bar{A}(x)\, dx =$$
$$= \sum_{l=0}^{j} \pi_m(m+l) \left(\left(\frac{\mu n}{\mu n + s} \right)^m + (-1)^m \frac{(\mu n)^m}{(m-1)!} \tilde{\alpha}^{(m-1)}(\mu n + s) \right), \tag{10}$$
$$m \geq 1, \quad j \geq 0, \quad m+j = \overline{1, r}.$$

Здесь $\alpha(s)$ и $\tilde{\alpha}(s)$ — ПЛС и преобразование Лапласа (ПЛ) ФР $A(x)$.

Найдём теперь стационарное распределение времени пребывания в системе (в накопителе) «убитой» заявки.

Плотности вероятностей $w^{(\mathrm{loss})}_{i,j}(x)$, $i = \overline{0, r-1}$, $j = \overline{0, r-1-i}$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$w^{(\mathrm{loss})}_{0,j}(x) = \tilde{u}_{1,j+1}(x) \bar{A}(x) + \int\limits_0^x U_0(y)\, dA(y) w^{(\mathrm{loss})}_{0,j+1}(x-y), \quad j = \overline{0, r-2}, \tag{11}$$

$$w^{(\mathrm{loss})}_{0,r-1}(x) = \tilde{u}_{1,r}(x) \bar{A}(x) + \int\limits_0^x U_0(y)\, dA(y) w^{(\mathrm{loss})}_{0,r-1}(x-y), \tag{12}$$

$$w^{(\mathrm{loss})}_{i,j}(x) = \sum_{m=1}^{i+1} \tilde{u}_{m,j+1}(x) \bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{i} \sum_{k=0}^{j} \int\limits_0^x U_{m,k}(y)\, dA(y) w^{(\mathrm{loss})}_{i-m,j-k+1}(x-y) +$$
$$+ \int\limits_0^x U_0(y)\, dA(y) w^{(\mathrm{loss})}_{i,j+1}(x-y), \quad i = \overline{1, r-2}, \quad j = \overline{0, r-i-2}, \tag{13}$$

$$w^{(\text{loss})}_{i,r-i-1}(x) = \sum_{m=1}^{i+1} \tilde{u}_{m,r-i}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{i}\sum_{k=0}^{r-i-1} \int_0^x U_{m,k}(y)\,dA(y) w^{(\text{loss})}_{i-m,r-i-k}(x-y) + \\ + \int_0^x U_0(y)\,dA(y) w^{(\text{loss})}_{i,r-i-1}(x-y), \quad i=\overline{1,r-2}, \tag{14}$$

$$w^{(\text{loss})}_{r-1,0}(x) = \sum_{m=0}^{r} \tilde{u}_{m,1}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{i} \int_0^x U_{m,0}(y)\,dA(y) w^{(\text{loss})}_{r-1-m,1}(x-y) + \\ + \int_0^x U_0(y)\,dA(y) w^{(\text{loss})}_{r-1,0}(x-y). \tag{15}$$

Покажем, как получены соотношения (11)–(15), на примерах (13) и (14).

Пусть перед некоторой (выделенной) заявкой в накопителе находится i, $i=\overline{1,r-2}$, а после неё ещё j, $j=\overline{0,r-i-2}$, заявок. Эта заявка может быть «убита» в момент x ещё до поступления новой заявки в систему, если в момент x обслужится последняя, m-я, $m=\overline{1,i+1}$, из m обслуженных за время x заявок, до ее ухода в накопителе будет «убито» менее $j{+}1$ заявок, а после ухода — не менее $j{+}1$ заявок (с плотностью вероятностей $\sum\limits_{m=1}^{i+1} \tilde{u}_{m,j+1}(x)$), а новая заявка не поступит до момента x (с вероятностью $\bar{A}(x)$). Такой случай отражен первым слагаемым (13). Если же новая заявка поступит в систему в момент $y<x$ (с плотностью вероятностей $a(y)$), то за время до поступления новой заявки могут обслужиться m, $m=\overline{1,i}$, заявок и в накопителе может быть «убито» k, $k=\overline{0,j}$, заявок (с вероятностью $\sum\limits_{m=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{j} U_{m,k}(y)$). Тогда после прихода в систему новой заявки перед выделенной заявкой в очереди на обслуживание будет находиться уже $i-m$, а после неё $j-k+1$ заявок, и выделенная заявка будет «убита» в момент x с плотностью вероятностей $w^{(\text{loss})}_{i-m,j-k+1}(x-y)$. Суммируя по всем промежуточным моментам y, получаем второе слагаемое (13). Наконец, если до момента y поступления новой заявки в систему ни на одном из приборов не закончится обслуживание, то число заявок, стоящих после выделенной, увеличится на одну, что дает нам третье слагаемое (13).

Пусть теперь система заполнена полностью, т.е. перед выделенной заявкой находится i, $i=\overline{1,r-2}$, а после неё $r-i-1$ заявок. От рассмотренного выше этот случай отличается только тем, что, если за время y ни на одном из приборов не закончится обслуживание, то поступающая в систему заявка будет потеряна и перед выделенной заявкой в накопителе по-прежнему будут находиться i, а после неё $r-i-1$ заявок. Эти рассуждения приводят к выражению (14).

Переходя к ПЛС, получаем из (11)–(15), получаем следующую систему уравнений:

$$\omega^{(\text{loss})}_{0,j}(s) = \tilde{\psi}_{1,j+1}(s) + \psi_0(s)\omega^{(\text{loss})}_{0,j+1}(s), \quad j=\overline{0,r-2}, \tag{16}$$

$$\omega^{(\text{loss})}_{0,r-1}(s) = \tilde{\psi}_{1,r}(s) + \psi_0(s)\omega^{(\text{loss})}_{0,r-1}(s), \tag{17}$$

$$\omega^{(\text{loss})}_{i,j}(s) = \sum_{m=1}^{i+1} \tilde{\psi}_{m,j+1}(s) + \sum_{m=1}^{i}\sum_{k=0}^{j} \psi_{m,k}(s)\omega^{(\text{loss})}_{i-m,j-k+1}(s) + \psi_0(s)\omega^{(\text{loss})}_{i,j+1}(s), \\ i=\overline{1,r-2}, \quad j=\overline{0,r-i-2}, \tag{18}$$

$$\omega^{(\mathrm{loss})}_{i,r-i-1}(s) = \sum_{m=1}^{i+1} \tilde{\psi}_{m,r-i}(s) + \sum_{m=1}^{i} \sum_{k=0}^{r-i-1} \psi_{m,k}(s)\omega^{(\mathrm{loss})}_{i-m,r-i-k}(s) + \psi_0(s)\omega^{(\mathrm{loss})}_{i,r-i-1}(s), \quad i=\overline{1,r-2}, \tag{19}$$

$$\omega^{(\mathrm{loss})}_{r-1,0}(s) = \sum_{m=1}^{r} \tilde{\psi}_{m,1}(s) + \sum_{m=1}^{r-1} \psi_{m,0}(s)\omega^{(\mathrm{loss})}_{r-1-m,1}(s) + \psi_0(s)\omega^{(\mathrm{loss})}_{r-1,0}(s). \tag{20}$$

Решение данной системы можно найти следующим образом. ПЛС $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-1}(s)$ непосредственно определяется из уравнения (17). Затем из уравнения (16) при $j=r-2$ ПЛС $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-2}(s)$ выражается через $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-1}(s)$, из этого же уравнения при $j=r-3$ ПЛС $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-3}(s)$ выражается через $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-2}(s)$ и т.д. Таким образом, каждое ПЛС $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,j}(s)$, $j=\overline{0,r-2}$, однозначно определяется через $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-1}$. Аналогичным образом из соотношений (19), (18) последовательно по $i=\overline{1,r-2}$ вычисляются через $\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-1}$ ПЛС $w^{(\mathrm{loss})}_{i,j}(x)$, а из соотношения (20) — ПЛС $\omega^{(\mathrm{loss})}_{r-1,0}(s)$.

Для вычисления в терминах ПЛС $\omega^{(\mathrm{loss})}(s)$ стационарного распределение времени пребывания в накопителе «убитой» заявки осталось воспользоваться формулой (3).

Перейдём к нахождению стационарного распределения времени пребывания в накопителе обслуженной заявки.

Как и в случае «убитой» заявки, для плотностей $w^{(\mathrm{serv})}_{i,j}(x)$, $i=\overline{0,r-1}$, $j=\overline{0,r-1-i}$, можно записать соотношения:

$$w^{(\mathrm{serv})}_{0,j}(x) = u^*_{1,j}(x)\bar{A}(x) + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w^{(\mathrm{serv})}_{0,j+1}(x-y), \quad j=\overline{0,r-2}, \tag{21}$$

$$w^{(\mathrm{serv})}_{0,r-1}(x) = u^*_{1,r-1}(x)\bar{A}(x) + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w^{(\mathrm{serv})}_{0,r-1}(x-y), \tag{22}$$

$$w^{(\mathrm{serv})}_{i,j}(x) = u^*_{i+1,j}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{i}\sum_{k=0}^{j}\int_0^x U_{m,k}(y)\,dA(y)w^{(\mathrm{serv})}_{i-m,j-k+1}(x-y) + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w^{(\mathrm{serv})}_{i,j+1}(x-y), \quad i=\overline{1,r-2}, \quad j=\overline{0,r-i-2}, \tag{23}$$

$$w^{(\mathrm{serv})}_{i,r-i-1}(x) = u^*_{i+1,r-i-1}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{i}\sum_{k=0}^{r-i-1}\int_0^x U_{m,k}(y)\,dA(y)w^{(\mathrm{serv})}_{i-m,r-i-k}(x-y) + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w^{(\mathrm{serv})}_{i,r-i-1}(x-y), \quad i=\overline{0,r-2}, \tag{24}$$

$$w_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(x) = u_{r,0}^{*}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{r-1}\int_{0}^{x} U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{r-1-m,1}^{(\mathrm{serv})}(x-y) + \\ + \int_{0}^{x} U_{0}(y)\,dA(y)w_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(x-y). \tag{25}$$

На примере выражений (23)–(24) покажем, как получены соотношения (21)–(25).

Снова рассмотрим некоторую (выделенную) заявку, перед которой в очереди на обслуживание находится i, $i=\overline{1,r-2}$, а после неё — ещё j, $j=\overline{0,r-i-2}$, заявок. Эта заявка может начать обслуживаться на приборе в момент времени x ещё до поступления новой заявки в систему, если за время x обслужится $i+1$ заявок и при этом она не будет «убита», т.е. из накопителя будет выбито не более j стоящих после неё заявок (с плотностью вероятностей $\sum\limits_{k=0}^{j} u_{i+1,k}^{*}(x)$), а новая заявка не поступит до момента x (с вероятностью $\bar{A}(x)$). Этот случай соответствует первому слагаемому (23). Если же новая заявка поступит в систему в момент времени $y<x$ (с плотностью вероятностей $a(y)$), то за время до поступления новой заявки могут обслужиться m, $m=\overline{0,i}$, заявок и из накопителя может быть потеряно k, $k=\overline{0,j}$, заявок (с вероятностью $\sum\limits_{m=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{j} U_{m,k}(y)$). При этом после прихода новой заявки перед выделенной заявкой в накопителе будет находиться $i-m$ заявок, а после неё — $j-k+1$ заявок, и она сможет начать обслуживаться в момент времени x с плотностью вероятностей $w_{i-m,j-k+1}^{(\mathrm{serv})}(x-y)$. Суммируя по всем промежуточным моментам y, получим второе слагаемое в (23). Наконец, третье слагаемое в (23) соответствует случаю, когда до момента y поступления новой заявки в систему ни на одном из приборов не закончится обслуживание и число заявок, стоящих после выделенной, увеличится на единицу.

Пусть теперь система заполнена полнотью, т.е. перед выделенной заявкой находится i, $i=\ \overline{1,r-2}$, а после неё $r-i-1$ заявок. От рассмотренного выше этот случай отличается только тем, что, если за время y до прихода новой заявки ни на одном из приборов не закончится обслуживание, то поступающая в систему заявка будет потеряна и перед выделенной заявкой в накопителе по-прежнему будут находиться i, а после неё $r-i-1$ заявок. Данные рассуждения приводят к выражению (24).

Переходя к ПЛС, из выражений (21)–(25), с учётом (8)–(10), получаем следующую систему уравнений:

$$\omega_{0,j}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_{1,j}^{*}(s) + \omega_{0,j+1}^{(\mathrm{serv})}(s)\psi_0(s), \quad j=\overline{0,r-2}, \tag{26}$$

$$\omega_{0,r-1}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_{1,r-1}^{*}(s) + w_{0,r-1}^{(\mathrm{serv})}(s)\psi_0(s), \tag{27}$$

$$\omega_{i,j}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_{i+1,j}^{*}(s) + \sum_{m=1}^{i}\sum_{k=0}^{j}\psi_{m,k}(s)\omega_{i-m,j-k+1}^{(\mathrm{serv})}(s) + \psi_0(s)\omega_{i,j+1}^{(\mathrm{serv})}(s), \\ i=\overline{1,r-2}, \quad j=\overline{0,r-i-2}, \tag{28}$$

$$\omega_{i,r-i-1}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_{i+1,r-i-1}^{*}(s) + \sum_{m=1}^{i}\sum_{k=0}^{r-i-1}\psi_{m,k}(s)\omega_{i-m,j-k+1}^{(\mathrm{serv})}(s) + \omega_{i,r-i-1}^{(\mathrm{serv})}(s)\psi_0(s), \\ i=\overline{0,r-2}. \tag{29}$$

$$\omega_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_{r,0}^{*}(s) + \sum_{m=1}^{r-1} \psi_{m,0}(s)\omega_{r-1-m,1}^{(\mathrm{serv})}(s) + \omega_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(s)\psi_0(s). \tag{30}$$

Решение данной системы можно найти следующим образом. При $j = 0$ из (26) ПЛС $\omega_{0,1}^{(\mathrm{serv})}(s)$ выражается через $\omega_{0,0}^{(\mathrm{serv})}(s)$. Положим $j = 1$. Тогда $\omega_{0,2}^{(\mathrm{serv})}(s)$ определяется через $\omega_{0,1}^{(\mathrm{serv})}(s)$ и, таким образом, через $\omega_{0,0}^{(\mathrm{serv})}(s)$. При $j = 2$ из уравнения (26) находим $\omega_{0,3}^{(\mathrm{serv})}(s)$ через $\omega_{0,1}^{(\mathrm{serv})}(s)$ и $\omega_{0,2}^{(\mathrm{serv})}(s)$, т.е. через $\omega_{0,0}^{(\mathrm{serv})}(s)$, и т.д. Для определения $\omega_{0,0}^{(\mathrm{serv})}(s)$ используется уравнение (27).

Аналогичным образом из соотношений (28)–(29) последовательно по $j = \overline{0, r-i-1}$ при каждом фиксированном значении индекса i, $i = \overline{1, r-2}$, вычисляются ПЛС $\omega_{i,j}^{(\mathrm{serv})}(s)$. Из соотношения (28) находится ПЛС $\omega_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(s)$.

Для того чтобы найти в терминах ПЛС $\omega^{(\mathrm{serv})}(s)$ стационарное распределение времени пребывания в накопителе обслуженной заявки, осталось воспользоваться формулой (4).

4. ИНВЕРСИОННЫЙ ПОРЯДОК ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРЯМЫМ ПОРЯДКОМ ОБОБЩЁННОГО ОБНОВЛЕНИЯ

Воспользуемся введёнными в предыдущем разделе функциями $U_0(x)$, $U_{m,k}(x)$, $\tilde{u}_{m,k}(x)$ и $u_{m,k}^{*}(x)$, удовлетворяющими (5)–(7), а также их преобразованиями (8)–(10) и найдём стационарное распределение времени пребывания в накопителе «убитой» заявки.

Плотности вероятностей $w_{i,j}^{(\mathrm{loss})}(x)$, $i = \overline{0, r-1}$, $j = \overline{0, r-1-i}$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$w_{0,j}^{(\mathrm{loss})}(x) = \sum_{m=1}^{j+1} \tilde{u}_{m,1}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=0}^{j} \int_0^x U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{0,j-m+1}^{(\mathrm{loss})}(x-y), \quad j = \overline{0, r-2}, \tag{31}$$

$$\begin{aligned} w_{0,r-1}^{(\mathrm{loss})}(x) = \sum_{m=1}^{r} \tilde{u}_{m,1}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{r-1} \int_0^x U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{0,r-m}^{(\mathrm{loss})}(x-y) \,+ \\ + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w_{0,r-1}^{(\mathrm{loss})}(x-y), \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} w_{i,j}^{(\mathrm{loss})}(x) = \sum_{m=1}^{j+1} \tilde{u}_{m,i+1}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{j}\sum_{k=1}^{i} \int_0^x U_{m,k}(y)\,dA(y)w_{i-k,j-m+1}^{(\mathrm{loss})}(x-y) \,+ \\ + \sum_{m=0}^{j} \int_0^x U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{i,j-m+1}^{(\mathrm{loss})}(x-y), \quad i = \overline{1, r-2}, \quad j = \overline{0, r-i-2}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} w_{i,r-i-1}^{(\mathrm{loss})}(x) = \sum_{m=1}^{r-i} \tilde{u}_{m,i+1}(x)\bar{A}(x) + \sum_{m=1}^{r-i-1}\sum_{k=1}^{i} \int_0^x U_{m,k}(y)\,dA(y)w_{i-k,r-i-m}^{(\mathrm{loss})}(x-y) \,+ \\ + \sum_{m=1}^{r-i-1} \int_0^x U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{i,r-i-m}^{(\mathrm{loss})}(x-y) + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w_{i,r-i-1}^{(\mathrm{loss})}(x-y), \quad i = \overline{1, r-2}, \end{aligned} \tag{34}$$

$$w^{(\text{loss})}_{r-1,0}(x) = \tilde{u}_{1,r}(x)\bar{A}(x) + \int\limits_0^x U_0(y)\,dA(y) w^{(\text{loss})}_{r-1,0}(x-y). \tag{35}$$

Поясним, как были получены соотношения (31)–(35), на примере выражений (33)–(34).

Пусть перед выделенной заявкой в накопителе находится i, $i=\overline{1,r-2}$, а после неё — ещё j, $j=\overline{0,r-i-1}$, заявок. Выделенная заявка может быть «убита» в момент времени x ещё до прихода новой заявки в систему, если обслужится хотя бы одна из $j+1$ заявок и при этом из накопителя будет выбито $i+1$ и более заявок (с плотностью вероятностей $\sum\limits_{m=1}^{j+1}\tilde{u}_{m,i+1}(x)$), а новая заявка не поступит в систему до момента x (с вероятностью $\bar{A}(x)$). Этот случай соответствует первому слагаемому выражения (33). Если же новая заявка поступит в систему в момент $y < x$ (с плотностью вероятностей $a(y)$), то за время до прихода новой заявки могут закончить обслуживание ровно m, $m=\overline{1,j}$, заявок, при этом из i заявок может быть «убито» ровно k, $k=\overline{1,i}$, заявок (с вероятностью $U_{m,k}(y)$). Тогда после прихода новой заявки в накопителе будет находиться перед выделенной заявкой $i-k$, а за нею — $j-m+1$ заявок, и рассматриваемая заявка будет «убита» в момент времени x (с плотностью вероятностей $w^{(\text{loss})}_{i-k,j-m+1}(x-y)$). Просуммировав по всем промежуточным моментам y, получим второе слагаемое (33). Наконец, третье слагаемое отражает случай, когда до поступления новой заявки в систему m, $m=\overline{0,j}$, обслужившимися заявками не выбивается ни одна заявка из накопителя.

Для вывода выражения (34) предположим, что система заполнена полностью. Тогда данный случай от рассмотренного выше будет отличаться только тем, что если до прихода новой заявки в систему ни на одном из приборов не закончится обслуживание, то поступающая в систему заявка потеряется.

Переходя к ПЛС и используя (8)–(10), из выражений (31)–(35) получаем следующую систему уравнений:

$$\omega^{(\text{loss})}_{0,j}(s) = \sum_{m=1}^{j+1}\tilde{\psi}_{m,1}(s) + \sum_{m=0}^{j}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\text{loss})}_{0,j-m+1}(s), \quad j=\overline{0,r-2}, \tag{36}$$

$$\omega^{(\text{loss})}_{0,r-1}(s) = \sum_{m=1}^{r}\tilde{\psi}_{m,1}(x) + \sum_{m=1}^{r-1}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\text{loss})}_{0,r-m}(s) + \omega^{(\text{loss})}_{0,r-1}(s)\psi_0(s), \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\omega^{(\text{loss})}_{i,j}(s) = \sum_{m=1}^{j+1}\tilde{v}_{m,i+1}(s) + \sum_{m=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\psi_{m,k}(s)\omega^{(\text{loss})}_{i-k,j-m+1}(s) + \sum_{m=0}^{j}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\text{loss})}_{i,j-m+1}(s),\\ i=\overline{1,r-2}, \quad j=\overline{0,r-i-2},\end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered}\omega^{(\text{loss})}_{i,r-i-1}(s) = \sum_{m=1}^{r-i}\tilde{\psi}_{m,i+1}(x) + \sum_{m=1}^{r-i-1}\sum_{k=1}^{i}\psi_{m,k}(s)\omega^{(\text{loss})}_{i-k,r-i-m}(s) + \\ + \sum_{m=1}^{r-i-1}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\text{loss})}_{i,r-i-m}(s) + \omega^{(\text{loss})}_{i,r-i-1}(s)\psi_0(s), \quad i=\overline{1,r-2},\end{gathered} \tag{39}$$

$$\omega^{(\text{loss})}_{r-1,0}(s) = \tilde{\psi}_{1,r}(s) + \omega^{(\text{loss})}_{r-1,0}(s)\psi_0(s). \tag{40}$$

Данная система решается аналогично системе уравнений (26)–(30). Теперь, для вычисления в терминах ПЛС $\omega^{(\text{loss})}(s)$ стационарного распределения времени пребывания в накопителе «убитой» заявки осталось воспользоваться формулой (3).

Перейдём к стационарному распределению времени пребывания в накопителе обслуженной заявки и выпишем соотношения, которым удовлетворяют плотности вероятностей $w_{i,j}^{(\text{serv})}(x)$, $i=\overline{0,r-1}$, $j=\overline{0,r-i-1}$:

$$w_{0,j}^{(\text{serv})}(x)=u_{j+1,0}^{*}(x)\bar{A}(x)+\sum_{m=0}^{j}\int\limits_{0}^{x}U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{0,j-m+1}^{(\text{serv})}(x-y),\quad j=\overline{0,r-2}. \tag{41}$$

$$\begin{aligned}w_{0,r-1}^{(\text{serv})}(x)=u_{r,0}^{*}(x)\bar{A}(x)+\sum_{m=1}^{r-1}\int\limits_{0}^{x}U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{0,r-m}^{(\text{serv})}(x-y)+&\\+\int\limits_{0}^{x}U_{0}(y)\,dA(y)w_{0,r-1}^{(\text{serv})}(x-y),&\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}w_{i,j}^{(\text{serv})}(x)=u_{j+1,i}^{*}(x)\bar{A}(x)+\sum_{m=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\int\limits_{0}^{x}U_{m,k}(y)\,dA(y)w_{i-k,j-m+1}^{(\text{serv})}(x-y)\,+&\\+\sum_{m=0}^{j}\int\limits_{0}^{x}U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{i,j-m+1}^{(\text{serv})}(x-y),\quad i=\overline{1,r-2},\quad j=\overline{0,r-i-2},&\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}w_{i,r-i-1}^{(\text{serv})}(x)=u_{r-i,i}^{*}(x)\bar{A}(x)+\sum_{m=1}^{r-i-1}\sum_{k=1}^{i}\int\limits_{0}^{x}U_{m,k}(y)\,dA(y)w_{i-k,r-i-m}^{(\text{serv})}(x-y)\,+&\\+\sum_{m=1}^{r-i-1}\int\limits_{0}^{x}U_{m,0}(y)\,dA(y)w_{i,r-i-m}^{(\text{serv})}(x-y)+\int\limits_{0}^{x}U_{0}(y)\,dA(y)w_{i,r-i-1}^{(\text{serv})}(x-y),&\\i=\overline{1,r-2},&\end{aligned} \tag{44}$$

$$w_{r-1,0}^{(\text{serv})}(x)=u_{1,r-1}^{*}(x)\bar{A}(x)+\int\limits_{0}^{x}U_{0}(y)\,dA(y)w_{r-1,0}^{(\text{serv})}(x-y). \tag{45}$$

В качестве примера вывода соотношений (42)–(45) поясним, как получены (43)–(44).

Снова выделим некоторую заявку в накопителе, перед которой находится i, $i=\overline{0,r-1}$, поступивших ранее, а после неё ещё j, $j=\overline{0,r-i-1}$, пришедших позже заявок. Выделенная заявка может начать обслуживаться на приборе в момент x ещё до поступления в систему новой заявки, если за время x обслужится $j+1$ заявок и при этом всеми $j+1$ обслуженными заявками в накопителе будет «убито» не более i заявок (с плотностью вероятностей $u_{j+1,i}^{*}(x)$), а новая заявка не поступит до момента времени x (с вероятностью $\bar{A}(x)$). Таким образом получаем первое слагаемое (43). Если же новая заявка поступает в систему в некоторый момент времни $y<x$ (с плотностью вероятностей $a(y)$), то за время до её прихода могут обслужиться

ровно m, $m=\overline{1,j}$, и быть выбитыми из накопителя ровно k, $k=\overline{1,i}$, заявок (с вероятностью $\sum\limits_{m=1}^{j}\sum\limits_{k=1}^{i}U_{m,k}(y)$). Тогда после поступления новой заявки в накопителе будет находиться $i-k$ заявок до выделенной заявки и $j-m+1$ после, а выделенная заявка перейдёт на прибор в момент времени x с плотностью вероятностей $w^{(\mathrm{serv})}_{i-k,j-m+1}(x-y)$. Данный случай описывается вторым слагаемым (43). Если же обслуживание m, $m=\overline{0,j}$, заявок (до прихода новой заявки в систему) не приведёт к потере заявок из накопителя (с вероятностью $\sum\limits_{m=0}^{j}U_{m,0}(y)$), то выделенная заявка в момент времени x начнёт обслуживаться с плотностью вероятностей $w^{(\mathrm{serv})}_{i,j-m+1}(x-y)$. Таким образом, получаем последнее слагаемое выражения (43).

Если система заполнена полностью, т.е. перед выделенной заявкой в накопителе находится i других заявок, а после неё — $r-i-1$, $i=\overline{1,r-2}$, заявок и до поступления новой заявки в системе ни на одном из приборов не закончится обслуживание, то поступающая заявка потеряется, что приводит к (44).

Переход к ПЛС приводит к следующей системе уравнений:

$$\omega^{(\mathrm{serv})}_{0,j}(s)=\psi^*_{j+1,0}(s)+\sum_{m=0}^{j}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\mathrm{serv})}_{0,j-m+1}(s),\quad j=\overline{0,r-2},\tag{46}$$

$$\omega^{(\mathrm{serv})}_{0,r-1}(s)=\psi^*_{r,0}(s)+\sum_{m=0}^{r-1}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\mathrm{loss})}_{0,r-m}(s),\tag{47}$$

$$\begin{gathered}\omega^{(\mathrm{serv})}_{i,j}(s)=\psi^*_{j+1,i}(s)+\sum_{m=1}^{j}\sum_{k=1}^{i}\psi_{m,k}(s)\omega^{(\mathrm{serv})}_{i-k,j-m+1}(s)+\sum_{m=0}^{j}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\mathrm{serv})}_{i,j-m+1}(s),\\ i=\overline{1,r-2},\quad j=\overline{0,r-i-2},\end{gathered}\tag{48}$$

$$\begin{gathered}\omega^{(\mathrm{serv})}_{i,r-i-1}(s)=\psi^*_{r-i,i}(s)+\sum_{m=1}^{r-i-1}\sum_{k=1}^{i}\psi_{m,k}(s)\omega^{(\mathrm{serv})}_{i-k,r-i-m}(s)+\sum_{m=1}^{r-i-1}\psi_{m,0}(s)\omega^{(\mathrm{serv})}_{i,r-i-m}(s)+\\ +\psi_0(s)\omega^{(\mathrm{serv})}_{i,r-i-1}(s),\quad i=\overline{1,r-2},\end{gathered}\tag{49}$$

$$\omega^{(\mathrm{serv})}_{r-1,0}(s)=\psi^*_{1,r-1}(s)+\psi_0(s)\omega^{(\mathrm{serv})}_{0,0}(s).\tag{50}$$

Решение данной системы аналогично решению системы (16)–(20). Для того чтобы вычислить в терминах ПЛС $\omega^{(\mathrm{serv})}(s)$ стационарное распределение времени пребывания в накопителе «убитой» заявки, осталось воспользоваться формулой (4).

5. ИНВЕРСИОННЫЙ ПОРЯДОК ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИНВЕРСИОННЫМ ПОРЯДКОМ ОБОБЩЁННОГО ОБНОВЛЕНИЯ

Перейдём к последнему рассматриваемому в данной работе случаю, когда инверсионными являются как дисциплина обслуживания заявок на приборах, так и дисциплина обобщённого обновления.

Для нахождения стационарного распределения времени пребывания в накопителе обслуженной и «убитой» заявок (в терминах ПЛС) введём вспомогательные функции:

$\tilde{U}_k(x)$, $k=\overline{0,r-1}$, — условная вероятность того, что к моменту времени x заявка, после которой в накопителе находится k заявок, будет «убита», при условии, что новые заявки в систему не поступят;

$U_k(x)$, $k=\overline{0,r-1}$, — условная вероятность того, что к моменту времени x систему покинет ровно k заявок, при условии, что новые заявки в систему не поступят;

$U_k^*(x)$, $k=\overline{0,r-1}$, — условная вероятность того, что к моменту времени x заявка, после которой в накопителе находится k заявок, встанет на обслуживание, систему покинет ровно k заявок, при условии, что новые заявки в систему не поступят.

Через $\tilde{u}_k(x)$ и $u_k^*(x)$ обозначим производные функций $\tilde{U}_k(x)$ и $U_k^*(x)$ соответственно. Функции $\tilde{u}_k(x)$, $U_k(x)$ и $u_k^*(x)$ имеют вид:

$$U_0(x)=\mathrm{e}^{-\mu n x},\quad U_k(x)=\sum_{m=1}^{k}\pi_m(k)\frac{(\mu n x)^m}{m!}e^{-\mu n x},\quad k=\overline{1,r-1},$$

$$\tilde{u}_k(x)=\sum_{m=1}^{k+1}\tilde{\pi}_m(k+2)\frac{(\mu n)^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\mu n x},\quad k=\overline{0,r-1},$$

$$u_k^*(x)=\sum_{m=1}^{k+1}\pi_m(k+1)\frac{(n\mu)^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\mu n x},\quad k=\overline{0,r-1}.$$

Выпишем преобразования, которые потребуются в дальнейшем:

$$\psi_0(s)=\alpha(\mu n+s), \tag{51}$$

$$\psi_k(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}U_k(x)\,dA(x)=\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\pi_m(k)\frac{(\mu n)^m}{m!}\alpha^{(m)}(\mu n+s),\quad k=\overline{1,r-1}, \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_k(s)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\tilde{u}_k(x)\bar{A}(x)\,dx=\\&=\sum_{m=1}^{k+1}\tilde{\pi}_m(k+2)\left(\left(\frac{\mu n}{\mu n+s}\right)^m+(-1)^m\frac{(\mu n)^m}{(m-1)!}\tilde{\alpha}^{(m-1)}(\mu n+s)\right),\quad k=\overline{0,r-1},\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\psi_k^*(s)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}u_k^*(x)\bar{A}(x)\,dx=\\&=\sum_{m=1}^{k+1}\pi_m(k+1)\left(\left(\frac{\mu n}{\mu n+s}\right)^m+(-1)^m\frac{(\mu n)^m}{(m-1)!}\tilde{\alpha}^{(m-1)}(\mu n+s)\right),\quad k=\overline{0,r-1}.\end{aligned} \tag{54}$$

Плотности вероятностей $w_{i,j}^{(\mathrm{loss})}(x)$, $i=\overline{0,r-1}$, $j=\overline{0,r-i-1}$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$w_{0,j}^{(\mathrm{loss})}(x)=\tilde{u}_{j+1}(x)\bar{A}(x)+\sum_{k=0}^{j}\int_0^x U_k(y)\,dA(y)w_{0,j-k+1}^{(\mathrm{loss})}(x-y),\quad j=\overline{0,r-2}, \tag{55}$$

$$w_{0,r-1}^{(\mathrm{loss})}(x) = \tilde{u}_r(x)\bar{A}(x) + \sum_{k=1}^{r-1}\int_0^x U_k(y)\,dA(y)w_{0,r-k}^{(\mathrm{loss})}(x-y) + \\ + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w_{0,r-1}^{(\mathrm{loss})}(x-y), \tag{56}$$

$$w_{i,j}^{(\mathrm{loss})}(x) = \tilde{u}_{j+1}(x)\bar{A}(x) + \sum_{k=0}^{j}\int_0^x U_k(y)\,dA(y)w_{i,j-k+1}^{(\mathrm{loss})}(x-y), \\ i = \overline{1, r-2}, \quad j = \overline{0, r-i-2}, \tag{57}$$

$$w_{i,r-i-1}^{(\mathrm{loss})}(x) = \tilde{u}_{r-i}(x)\bar{A}(x) + \sum_{k=1}^{r-i-1}\int_0^x U_k(y)\,dA(y)w_{i,r-i-k}^{(\mathrm{loss})}(x-y) + \\ + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w_{i,r-i-1}^{(\mathrm{loss})}(x-y), \quad i = \overline{1, r-2}, \tag{58}$$

$$w_{r-1,0}^{(\mathrm{loss})}(x) = \tilde{u}_1(x)\bar{A}(x) + \int_0^x U_0(y)\,dA(y)w_{r-1,0}^{(\mathrm{loss})}(x-y). \tag{59}$$

На примере выражений (57) и (58) поясним, как получены соотношения (55)–(59).

Пусть перед некоторой (выделенной) заявкой в накопителе находится i, $i = \overline{1, r-2}$, а после неё — j, $j = \overline{0, r-i-2}$, заявок. Выделенная заявка может быть «убита» в момент времени x до поступления в систему новой заявки за счёт того, что систему покинет не менее $j+1$ заявок (с плотностью вероятностей $\tilde{u}_{j+1}(x)$), а новая заявка не поступит до момента x (с вероятностью $\bar{A}(x)$). Таким образом, получаем первое слагаемое выражения (57). Если же новая заявка поступает в систему в некоторый момент времени $y < x$ (с плотностью вероятностей $a(y)$), то до её прихода систему могут покинуть от 0 до j заявок (с вероятностью $\sum\limits_{k=0}^{j} U_k(y)$). Тогда после прихода новой заявки в накопителе после выделенной заявки будут находиться $j-k+1$ заявок, и выделенная заявка будет «убита» в момент времени x с плотностью вероятностей $w_{i,j-k+1}^{(\mathrm{loss})}(x- \ y)$. Суммируя по всем промежуточным моментам времени y, получим второе слагаемое (57).

Для вывода (58) предположим, что система заполнена полностью, т.е. перед выделенной заявкой в накопителе находится i, $i = \overline{1, r-2}$, а после неё $r-i-1$ заявок. От рассмотренного выше примера этот отличается только тем, что если за время y до прихода новой заявки ни на одном из приборов не закончится обслуживание, то поступающая в систему заявка потеряется и после выделенной заявки в накопителе по-прежнему будет находиться $r-i-1$ заявок.

Переходя к ПЛС, из выражений (55)–(56) получим следующую систему уравнений:

$$\omega_{0,j}^{(\mathrm{loss})}(s) = \tilde{\psi}_j(s) + \sum_{k=0}^{j}\psi_k(s)\omega_{0,j-k+1}^{(\mathrm{loss})}(s) + \omega_{0,j+1}^{(\mathrm{loss})}(s)\psi_0(s), \quad j = \overline{0, r-2}, \tag{60}$$

$$\omega_{0,r-1}^{(\text{loss})}(s) = \tilde{\psi}_{r-1}(s) + \sum_{k=1}^{r-1} \psi_k(s)\omega_{0,r-k}^{(\text{loss})}(s) + \omega_{0,r-1}^{(\text{loss})}(s)\psi_0(s), \tag{61}$$

$$\omega_{i,j}^{(\text{loss})}(s) = \tilde{\psi}_j(s) + \sum_{k=1}^{j} \psi_k(s)\omega_{i,j-k+1}^{(\text{loss})}(s) + \psi_0(s)\omega_{i,j+1}^{(\text{loss})}(s),$$
$$i = \overline{1, r-2}, \quad j = \overline{0, r-i-2}, \tag{62}$$

$$\omega_{i,r-i-1}^{(\text{loss})}(s) = \tilde{\psi}_{r-i-1}(s) + \sum_{k=1}^{r-i-1} \psi_k(s)\omega_{i,r-i-k}^{(\text{loss})}(s) + \psi_0(s)\omega_{i,r-i-1}^{(\text{loss})}(s), \quad i = \overline{1, r-2}, \tag{63}$$

$$\omega_{r-1,0}^{(\text{loss})}(s) = \tilde{\psi}_1(s) + \psi_0(s)\omega_{r-1,0}^{(\text{loss})}(s), \tag{64}$$

решение которой можно получить аналогично решению системы (16)–(20).

Для вычисления в терминах ПЛС $\omega^{(\text{loss})}(s)$ стационарного распределение времени пребывания в накопителе «убитой» заявки осталось воспользоваться формулой (3).

Найдем теперь стационарное распределение времени пребывания в накопителе обслуженной заявки при инверсионном механизме обобщённого обновления.

Плотности вероятностей $w_{i,j}^{(\text{serv})}(x)$, $i = \overline{0, r-1}$, $j = \overline{0, r-i-1}$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$w_{0,j}^{(\text{serv})}(x) = u_{j+1}^*(x)\bar{A}(x) + \sum_{k=0}^{j} \int_0^x U_k(y)\, dA(y) w_{0,j-k+1}^{(\text{serv})}(x-y), \quad j = \overline{0, r-2}, \tag{65}$$

$$w_{0,r-1}^{(\text{serv})}(x) = u_r^*(x)\bar{A}(x) + \sum_{k=1}^{r-1} \int_0^x U_k(y)\, dA(y) w_{0,r-k}^{(\text{serv})}(x-y) +$$
$$+ \int_0^x U_0(y)\, dA(y) w_{0,r-1}^{(\text{serv})}(x-y), \tag{66}$$

$$w_{i,j}^{(\text{serv})}(x) = u_{j+1}^*(x)\bar{A}(x) + \sum_{k=0}^{j} \int_0^x U_k(y)\, dA(y) w_{i,j-k+1}^{(\text{serv})}(x-y),$$
$$i = \overline{1, r-2}, \quad j = \overline{0, r-i-2}, \tag{67}$$

$$w_{i,r-i-1}^{(\text{serv})}(x) = u_{r-i}^*(x)\bar{A}(x) + \sum_{k=1}^{r-i-1} \int_0^x U_k(y)\, dA(y) w_{i,r-i-k}^{(\text{serv})}(x-y) +$$
$$+ \int_0^x U_0(y)\, dA(y) w_{i,r-i-1}^{(\text{serv})}(x-y), \quad i = \overline{1, r-2}, \tag{68}$$

$$w_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(x) = u_1^*(x)\bar{A}(x) + \int\limits_0^x U_0(y)\,dA(y)w_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(x-y). \tag{69}$$

Покажем, как получены соотношения (65)–(69), на примере (67)–(68).

Пусть перед рассматриваемой (выделенной) заявкой в накопителе находится i, $i=\overline{1,r-2}$ а после неё — ещё j, $j=\overline{0,r-i-2}$, заявок. Выделенная заявка может начать обслуживаться в момент времени x до поступления в систему новой заявки, если за время x систему покинет ровно $j+1$ заявок с плотностью вероятностей $u_{j+1}^*(x)$) и до момента x новая заявка в систему не поступит (с вероятностью $\bar{A}(x)$). Этот случай отражён первым слагаемым (67). Если же новая заявка поступит в систему в некоторый промежуточный момент времени $y<x$ (с плотностью вероятностей $a(y)$), то за время y систему могут покинуть не более j заявок (с вероятностью $\sum\limits_{k=0}^{j} U_k(y)$). После прихода новой заявки в накопителе после выделенной будет находиться $j-k+1$ заявок и выделенная заявка начнёт обслуживаться в момент x с плотностью вероятностей $w_{i,j-k+1}^{(\mathrm{serv})}(x-\ y)$. Таким образом, получаем второе слагаемое выражения (67).

Случай, когда система заполнена полностью, описываемый формулой (68), отличается от рассмотренного только тем, что если до момента времени $y<x$ прихода новой заявки ни на одном из приборов не закончится обслуживание, то поступающая в систему заявка потеряется.

Перейдём к ПЛС. Выражения (65)–(69) преобразуются в систему уравнений

$$\omega_{0,j}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_j^*(s) + \sum_{k=1}^{j}\psi_k(s)\omega_{0,j-k+1}^{(\mathrm{serv})}(s) + \psi_0(s)\omega_{0,j+1}^{(\mathrm{serv})}(s), \quad j=\overline{0,r-2}, \tag{70}$$

$$\omega_{0,r-1}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_{r-1}^*(s) + \sum_{k=1}^{r-1}\psi_k(s)\omega_{0,r-k}^{(\mathrm{serv})}(s) + \psi_0(s)\omega_{0,r-1}^{(\mathrm{serv})}(s), \tag{71}$$

$$\begin{gathered}\omega_{i,j}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_j^*(s) + \sum_{k=1}^{j}\psi_k(s)\omega_{i,j-k+1}^{(\mathrm{serv})}(s) + \psi_0(s)\omega_{i,j+1}^{(\mathrm{serv})}(s),\\ i=\overline{1,r-2}, \quad j=\overline{0,r-i-2},\end{gathered} \tag{72}$$

$$\begin{gathered}\omega_{i,r-i-1}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_{r-i-1}^*(s) + \sum_{k=1}^{r-i-1}\psi_k(s)\omega_{i,r-i-k}^{(\mathrm{serv})}(s) + \psi_0(s)\omega_{i,r-i-1}^{(\mathrm{serv})}(s),\\ i=\overline{1,r-2},\end{gathered} \tag{73}$$

$$\omega_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(s) = \psi_1^*(s) + \psi_0(s)\omega_{r-1,0}^{(\mathrm{serv})}(s), \tag{74}$$

решение которой ищется аналогично решению системы (26)–(30). Стационарное распределение времени пребывания в накопителе обслуженной заявки можно найти в терминах ПЛС $\omega^{(\mathrm{serv})}(s)$ по формуле (4).

6. СРЕДНИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВРЕМЕНА ПРЕБЫВАНИЯ В НАКОПИТЕЛЕ «УБИТОЙ» И ОБСЛУЖЕННОЙ ЗАЯВОК

Дифференцирование ПЛС $\omega^{(\mathrm{serv})}(s)$ $(\omega^{(\mathrm{loss})}(s))$ обслуженной («убитой») заявки позволяет найти моменты стационарного распределения пребывания в накопителе обслуженной («убитой») заявки, в частности стационарное среднее время пребывания в накопителе.

Для «убитой» заявки данная характеристика находится по формуле

$$\bar{\omega}^{(\mathrm{loss})} = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{loss}}} \sum_{i=0}^{r-1} \bar{\omega}_i^{(\mathrm{loss})} p_{n+i}^{-},$$

где

$$\bar{\omega}_i^{(\mathrm{loss})} = -(\omega_{i,0}^{(\mathrm{loss})}(s))'\Big|_{s=0}, \quad i = \overline{0, r-1},$$

— стационарное среднее время пребывания в системе «убитой» заявки, заставшей в момент своего поступления в систему в накопителе i заявок, а p_{loss} — вероятность потери заявки из накопителя, найденная в [6].

Вычислив ПЛС $\omega_{i,0}^{\mathrm{loss}}(s)$, $i = \overline{0, r-1}$ из систем уравнений (16), (18) и (20) для инверсионного порядка обобщённого обновления при прямом порядке обслуживания, из систем уравнений (36), (38) и (40) для прямого порядка обобщённого обновления при инверсионном порядке обслуживания, из систем уравнений (60), (62) и (64) для инверсионного порядка обобщённого обновления при инверсионном порядке обслуживания и найдя значения их производных в точке $s = 0$, можно найти стационарное среднее время пребывания в системе принятой, но потерянной заявки.

Аналогичным образом находится стационарное среднее $\bar{\omega}^{(\mathrm{serv})}$ времени пребывания в накопителе обслуженной заявки:

$$\bar{\omega}^{(\mathrm{serv})} = \frac{1}{(1-\pi)p_{\mathrm{serv}}} \sum_{i=0}^{r-1} \bar{\omega}_i^{(\mathrm{serv})} p_{n+i}^{-},$$

где

$$\bar{\omega}_i^{(\mathrm{serv})} = -(\omega_{i,0}^{(\mathrm{serv})}(s))'\Big|_{s=0}, \quad i = \overline{0, r-1},$$

— стационарное среднее время пребывания в накопителе обслуженной заявки, заставшей в момент своего поступления в систему в накопителе i заявок, а p_{serv} — вероятность того, что поступившая в систему заявка будет обслужена, также найденная в работе [6].

Используя ПЛС $\omega_{i,0}^{(\mathrm{serv})}(s)$, $i = \overline{0, r-1}$, найденные из систем уравнений (26), (28) и (30) для инверсионного порядка обобщённого обновления при прямом порядке обслуживания, из систем (46), (48) и (50) для прямого порядка обобщённого обновления при инверсионном порядке обслуживания, (70), (72) и (74) для инверсионного порядка обобщённого обновления при инверсионном порядке обслуживания и вычислив значения их производных в точке $s = 0$, можно найти стационарное среднее время пребывания в накопителе обслуженной заявки.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена n-линейная система массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания, конечным накопителем и следующими вариантами дисциплины обобщённого обновления и обслуживания:

инверсионным порядком обновления при прямом порядке обслуживания заявок;

прямом порядкек обновления при инверсионном порядке обслуживания заявок;

инверсионном порядке обновления при инверсионном порядке обслуживании заявок.

Для каждого из трёх вышеуказанных случаев обобщённого обновления и обслуживания, используя результаты работы [6], получены системы уравнений (16)–(20), (36)–(40) и (60)–(64) для «убитой» заявки, системы (26)–(30), (46)–(50) и (70)–(74) для обслуженной заявки, позволяющие найти в терминах ПЛС стационарные распределения времен пребывания в накопителе «убитой» и обслуженной заявок сответственно, указаны способы решения полученных систем уравнений.

В работе также показано, как используя найденные соотношения вычислить средние стационарные времена пребывания в накопителе «убитой» и обслуженной заявок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bocharov P.P., D'Apice C., Pechinkin A.V., Salerno S. *Queueing Theory.* VSP: Utrecht, Boston, 2004.
2. Kreinin A. Queueing Systems with Renovation. *Journal of Applied Math. Stochast. Analysis*, 1997, vol. 10, № 4, pp. 431–443.
3. Kreinin A. Inhomogeneous Random Walks: Applications in Queueing and Finance. *CanQueue*, 2003, Fields Institute, Toronto.
4. Towsley D., Tripathi S.K. A single server priority queue with server failure and queue flushing. *Oper. Res. Lett.*, 1999.
5. Бочаров П.П., Зарядов И.С. Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением. *Вестник РУДН*, № 1–2, 2007, стр. 15-25.
6. Зарядов И.С. Стационарные характеристики обслуживания в системе $G/M/n/r$ с обобщённым обновлением. *Вестник РУДН*, № 2, 2008, стр. 3-10.