Информационные процессы, Том 8, № 2, 2008, стр. 125–132.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ АНАЛИЗЕ СИСТЕМЫ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ПРОЦЕССОРА

С.Ф.Яшков

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича, Российская академия наук
Большой Каретный переулок, 19, 127994 Москва ГСП–4, Россия.
E-mail: yashkov@iitp.ru, fax: (7–095)209–05–79
Поступила в редколлегию 20.05.2008

Аннотация—В статье представлено новое доказательство теоремы о нестационарном распределении числа требований в системе обслуживания M/G/1 с эгалитарным разделением процессора. Для этой цели используется хорошо известный метод введения дополнительных переменных. Впервые полное доказательство этой нетривиальной теоремы получено с помощью принципиально нового аналитического метода в монографии автора [12, §2.8] (1989). Ранее эта задача считалась не поддающейся аналитическому решению. Мы опишем также результаты распространения доказанной теоремы на случай системы M/G/1—EPS с катастрофами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы представим новое доказательство теоремы о нестационарном (транзиентном) распределении числа требований в системе обслуживания M/G/1 с эгалитарным разделением процессора (EPS) (см. раздел 2, теорема 2.2). Для этой цели используется хорошо известный метод дополнительных переменных [3, Ch.1], [4, Ch. 10], [12, p. 199–202], введенный в теорию очередей в 1955 г. Д. Коксом [1]. Впервые полное доказательство этой нетривиальной теоремы получено с помощью принципиально нового аналитического метода в монографии автора [12, §2.8] (1989). Ранее эта задача считалась не поддающейся аналитическому решению. В разделе 3 теорема 2.2 распространена на случай системы обслуживания M/G/1—EPS с катастрофами, возникающими по пуассоновскому закону.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ В СИСТЕМЕ M/G/1—EPS В МОМЕНТ t

Рассмотрим систему обслуживания M/G/1, в которую поступают требования в соответствии с однородным пуассоновским процессом, имеющим параметр λ. Пусть $B(x) = \mathsf{P}(B \le x)$ ($B(0+) = 0$, $B(\infty) = 1$) будет функцией распределения независисмых и одинаково распределенных (н.о.р.) длительностей обслуживания требований[1], с математическим ожиданием $\beta_1 = \int_0^\infty (1 - B(x))\, dx < \infty$ и преобразованием Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) $\beta(s)$. Дисциплина обслуживания представляет собой так называемое эгалитарное разделение процессора: когда система обслуживания содержит $n \ge 1$ требований, то каждое из них получает обслуживание со скоростью $\frac{1}{n}$ безотносительно от своего достигнутого обслуживания или достигнутого обслуживания других требований. (Эта дисциплина обслуживания предложена Клейнроком

[1] В дальнейшем будет удобно называть н.о.р. длительности обслуживания требований их длинами из–за специфики дисциплины обслуживания.

в 1967 г. Особенности дисциплины EPS и результаты ее исследований представлены, например, в [10, 12, 13, 15].) Пусть $L(t)$ есть число требований в системе M/G/1—EPS в момент t. Дополнительно мы введем следующие предположения:

- загрузка системы, т.е $\rho = \lambda\beta_1$ может быть любой положительной конечной величиной;
- система свободна от требований в начальный момент времени $t = 0$;
- функция распределения $B(x)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т.е $B(x) = \int_0^x \beta(y)\,dy$, где $\beta(\cdot)$ есть (ограниченная) плотность распределения. Кроме того, $B(x) < 1$ для каждого $x < \infty$.

Большие трудности в нахождении распределения немарковского процесса $\{L(t) : t > 0\}$ обусловлены, в частности, тем же самым феноменом, который чрезвычайно усложнил получение стационарного распределения времени пребывания требования в системе M/G/1—EPS (см. [10]): дисциплина обслуживания EPS позволяет коротким требованиям обгонять более длинные.

Тем не менее, в [12, §2.8] (1989) была впервые доказана следующая теорема (см. также [13]), опирающаяся на результаты работы [11] (1988):

Теорема 2.1. (1989) [11,12,13] [2] *Функция*

$$g_0(z,s) \doteq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathsf{E}[z^{L(t)}|L(0)=0]\,dt = [s + \lambda(1-z)(1-\pi(s))]^{-1} \tag{2.1}$$

задает преобразование Лапласа (ПЛ) вероятностной производящей функции числа требований в момент t в системе обслуживания M/GI/1—EPS при начальном условии $\mathsf{P}(L(0) = 0) = 1$. Здесь $\pi(s)$ есть ПЛС распределения стандартного периода занятости $\Pi(x) = \mathsf{P}(\Pi \le x)$ в консервативной системе M/G/1, т.е. (минимальное) решение функционального уравнения

$$\pi(s) = \beta(s + \lambda - \lambda\pi(s)) \tag{2.2}$$

с наименьшим абсолютным значением.

Другой способ установления результата подобного (2.1) состоит в применении метода дополнительных переменных (ср. с теоремой 3 из [10], где этот метод использовался для нахождения стационарного распределения числа требований в системе M/G/1—EPS). Вообще говоря, цель введения дополнительных переменных по крайней мере двоякая. Во–первых, во многих случаях это позволяет выписать дифференциальные уравнения Колмогорова и попытаться решить их. Во–вторых, этот метод дает возможность использовать такое описание для моделирования случайных процессов в системах обслуживания. Однако, в отличие от классических очередей [3, Ch.1], [4, Ch. 10], [6] только успешное доказательство (нетривиальных) Леммы 2.1 и теоремы 2.6 из [12], теоремы 2.16 из [13], а также приведенной выше теоремы 2.1 позволяет опираться на этот метод в нестационарном (транзиентном) случае. Пусть E_i при $1 \le i \le L(t)$ являются прошедшими (достигнутыми) длительностями обслуживания каждого из $L(t) \ge 1$ требований, находящихся в системе в момент t. Тогда $A_0(t) = \{L(t), E_i(t),\ i = 1, \ldots, L(t);\ t \ge 0\}$ будет марковским процессом с пространством состояний

$$\{0\} \cup \{n, x_1, x_2, \ldots, x_n : n \ge 1,\ x_i \ge 0 \quad \text{при } 1 \le i \le L(t)\},$$

где x_i обозначает величину достигнутого времени обслуживания у i–го требования, находящегося в процессоре, при $i \ge 1$.

[2] Эта теорема, являющаяся следствием некоторых более общих теорем автора (см. [11,12] или обзоры [13,15]), впервые доказана в 1988–1989 г.г.

Введем обозначения

$$\mathsf{P}_n(t;x_1,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots,dx_n = \mathsf{P}\{L(t)=n;\ E_i(t)\in[x_i,x_i+dx_i), i=1,2,\ldots,n\}.$$

Напомним, что $\mathsf{P}_{00}(t)=\mathsf{P}\{L(t)=0|L(0)=0\}$.

Теорема 2.2. *Аналитическое решение для функции $\mathsf{P}_n(t;x_1,\ldots,x_n)$, полученное в терминах ПЛ по t этой функции, имеет вид*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathsf{P}_n(t;x_1,\ldots,x_n)\,dt = \tilde{p}_{00}(s)[1-s\tilde{p}_{00}(s)]^n\frac{1}{\beta_1^n}\prod_{i=1}^n(1-B(x_i)), \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{p}_{00}(s) \doteq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathsf{P}_{00}(t)\,dt = [s+\lambda-\lambda\pi(s)]^{-1}. \tag{2.4}$$

Здесь $\pi(s)$ есть решение хорошо известного функционального уравнения Такача (2.2).

Доказательство. Функционирование системы EPS описывается марковским процессом в непрерывном времени. С помощью известной техники [1, 3, 5, 9, 10] можно вывести дифференциальные уравнения Колмогорова, которым удовлетворяют совместные нестационарные функции плотностей $\mathsf{P}_{00}(t)$, $\mathsf{P}_n(t;x_1,\ldots,x_n)$, $n\geq\ 1$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)\mathsf{P}_{00}(t) = \int_0^\infty \mu(x_1)\mathsf{P}_1(t;x_1)\,dx_1, \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}+\mu(x_i)+\lambda\right]\mathsf{P}_n(t;x_1,\ldots,x_n)$$
$$= \int_0^\infty \mathsf{P}_{n+1}(t;x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\mu(x_{n+1})\,dx_{n+1}, \quad n\geq 1, \tag{2.6}$$

где $\mu(x)$ есть функция интенсивности отказов распределения $B(x)$, т.е.

$$\mu(x) = dB(x)/[1-B(x)]. \tag{2.7}$$

(Иными словами, функция распределения длин требований представляется в виде $B(x)=1-\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu(y)\,dy}$. Иногда применяется следующий англоязычный термин для таких распределений: Lebesque–dominated distributions.)

Граничные условия имеют вид

$$\mathsf{P}_1(t,0) = \lambda\mathsf{P}_{00}(t), \tag{2.8}$$
$$\mathsf{P}_{n+1}(t;x_1,\ldots,x_n,0) = \lambda\mathsf{P}_n(t;x_1,\ldots,x_n), \quad n\geq 1. \tag{2.9}$$

Условием нормировки для системы уравнений (2.5)—(2.9) является

$$\mathsf{P}_{00}(t)+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \mathsf{P}_n(t;x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = 1. \tag{2.10}$$

Отметим, что уравнения в [10] выводились для случая, когда рассматривались траектории стационарного процесса $\{L(t)=n;\ E_i(t)\in[x_i,x_i+dx_i), i=1,2,\ldots,n\}$, и $L(t)$ изучался только при $t\to\infty$, а под $E_i(t)$ понималась остаточная длина i–го требования в текущий момент, находящаяся в инфинитезимальной окрестности точки x_i. В рассматриваемом случае дополнительные переменные E_i означают величины достигнутого времени обслуживания (возраста)

i–го требования, $i \geq 1$, находящегося в процессоре в момент t, а под $L(t)$ понимается нестационарное число требований в системе в момент $t \leq \infty$. Поэтому уравнения (2.5) — (2.9) являются относительно простым распространением уравнений (4.4) из [5] на транзиентный случай (в [5] использовались те же дополнительные переменные, но исследовался только стационарный режим). Решение этих уравнений в стационарном режиме дается равенством

$$\mathsf{P}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}_0 \lambda^n \prod_{i=1}^{n} [1 - B(x_i)], \; n \geq 1, \tag{2.11}$$

где $\mathsf{P}_0 = \mathsf{P}\{\emptyset\} = 1 - \rho$.

Такие же как в [10] дополнительные переменные использовались в уравнениях статьи [9] (1980), описывающих более общий класс позиционно–сбалансированных дисциплин в системе M/G/1 в стационарном режиме (частным случаем этого класса дисциплин является класс симметричных дисциплин Келли (Kelly)).

После некоторых математических манипуляций с использованием ПЛ и ПЛС, можно убедиться, что решение системы уравнений (2.5) — (2.9) принимает вид (2.3), напоминающий равенство (2.11). В решении (2.3) $\tilde{p}_{00}(s)$ дается равенством (2.4). Отметим, что $\tilde{p}_{00}(s) \equiv g_0(0, s)$. Следует подчеркнуть, что $[1 - s\tilde{p}_{00}(s)]$ в формуле (2.3) совпадает с правой частью ненумерованного равенства перед замечанием 2.4 в [12, с. 98] (ср. также с равенством (2.4) из [14] или с равенством (3.19) из [15]).

Решение (2.3) в конечном счете приводит к (2.1). Дополнительные детали вывода можно найти в цитированных работах. Если $\rho < 1$ и $t \to \infty$, то равенство (2.11) вытекает из (2.3) как частный случай. Это доказывается с помощью классической тауберовой теоремы. Отметим, что в этом случае $[1 - s\tilde{p}_{00}(s)]^n$ сводится к ρ^n. Это завершает доказательство.

$\square$

Замечание 2.1. Используя (2.1), можно формально установить, что переходное поведение процесса $\{L(t)\}$ в системе M/M/1–EPS идентично переходному поведению соответствующего процесса в системе M/M/1 с классической дисциплиной FCFS при нулевом начальном условии. Уравнение (2.2) при $\beta(s) = \mu/(s + \mu)$ сводится к квадратному уравнению, решением которого является

$$\pi(s) = \left[(s + \lambda + \mu) - ((s + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu)^{1/2} \right] / (2\lambda).$$

(Следует выбрать знак “$-$” перед корнем, поскольку $|\pi(s)| \leq 1$.) Теперь после простых преобразований можно показать, что ПЛ вероятностной производящей функции числа требований в момент t в системе M/M/1—FCFS совпадает с частным случаем равенства (2.1) при $B(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu x}$. Это справедливо при $\mathsf{P}(L(0) = 0) = 1$. В качестве другого способа доказательства этого утверждения можно убедиться, что процессы числа требований в обеих системах EPS и FCFS имеют одинаковый инфинитезимальный оператор в рассматриваемом случае $B(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu x}$.

Следующее утверждение содержит информацию о среднем числе требований в системе M/GI/1–EPS в момент t.

Следствие 2.1. [3]

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathsf{E}[L(t)]\,dt = \lambda(1-\pi(s))/s^2\ . \tag{2.12}$$

Доказательство. Простое вычисление производной по z функции $g_0(z,s)$ из теоремы 2.1, а именно,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathsf{E}[L(t)]\,dt = \lim_{z\to1}\frac{\partial g_0(z,s)}{\partial z}.$$

□

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НА СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ M/G/1 С КАТАСТРОФАМИ

В этом разделе мы покажем, как можно распространить результаты предыдущего раздела на случай системы M/G/1 с катастрофами. Хорошо известна роль, которую играет концепция катастроф в различных областях науки и техники. В частности, модели процессов рождения и гибели, включающие катастрофы, обсуждаются в контекстах теории очередей, динамики популяций, нейронных сетей и компьютерных сетей (см., например, [2,7]). Приведем только два примера. Процессы с катастрофами хорошо описывают такую важную тему в биологических исследованиях как взаимодействие между миозином и актиновыми волокнами, которые ответственны за генерацию усилий при сокращении мускулов. В вычислительных системах, если задача инфицирована вирусом, то ее дальнейшая обработка может привести к отказу операционной системы. Согласно концепции отрицательных требований (см.. например, [2]), если все (положительные) требования, присутствующие в системе, уничтожаются при поступлении отрицательного требования, то такое отрицательное требование представляет собой катастрофу. Отметим, что в литературе исследуются, как правило, только системы обслуживания M/M/1 с катастрофами (и стандартными дисциплинами типа FCFS).

Далее мы рассмотрим систему обслуживания M/G/1—EPS в тех же предположениях, что и в разделе 2, но с дополнительным однородным пуассоновским процессом катастроф интенсивности $\nu > 0$. Приход требования из потока катастроф немедленно уничтожает все (положительные) требования, обслуживающиеся в системе EPS. Чтобы сделать систему обслуживания марковской, введем те же дополнительные переменные, что в разделе 2. (В дальнейшем мы убедимся, что изучаемая модель не сводится, в общем, к модели раздела 2, хотя ряд обозначений для характеристик у них совпадают.) По аналогии с доказательством теоремы 2.2 будет составлена система уравнений Колмогорова, которой удовлетворяют транзиентные вероятности состояний системы M/G/1 с катастрофами. Эту систему уравнений удается решить при простейших начальных условиях (3.1):

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_{00}(0) = 1,\\ &\mathsf{P}_n(0; x_1,\ldots,x_n) = 0,\ n \ge 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

[3] Для классической системы M/GI/1–FCFS ПЛ от $\mathsf{E}[L(t)]$ по t имеет вид, отличающийся от равенства (2.12) и зависящий также от $\beta(s)$. А именно,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathsf{E}[L(t)_{FCFS}]\,dt = \frac{\lambda}{s^2} - \frac{\lambda}{s}\frac{\beta(s)}{1-\beta(s)}\frac{1-\pi(s)}{s+\lambda-\lambda\pi(s)}.$$

Эта формула становится эквивалентной равенству (2.12) при $B(x) = 1-\mathrm{e}^{-\mu x}$ в силу замечания 2.1.

Теорема 3.1. *Аналитическое решение для функции* $\mathsf{P}_n(t; x_1, \ldots, x_n)$*, полученное в терминах ПЛ по* t *этой функции, имеет вид*

$$\begin{aligned}\tilde{p}_n(s; x_1, \ldots, x_n)\, dt &\doteq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \mathsf{P}_n(t; x_1, \ldots, x_n)\, dt \\ &= [sq(s)]^{-1} \lambda^n \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-(s+\nu)q(s)x_i}(1 - B(x_i)),\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $q(s) > 1$ *есть минимальное решение функционального уравнения*

$$q(s) = 1 + \frac{\lambda[1 - \beta((s+\nu)q(s))]}{s+\nu}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Аналогично получению системы уравнений (2.5), (2.6), граничных условий (2.8), (2.9) и условия нормировки (2.10), можно вывести следующую систему уравнений, которой удовлетворяют нестационарные функции плотностей $\mathsf{P}_{00}(t)$, $\mathsf{P}_n(t; x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) \mathsf{P}_{00}(t) &= \int_0^\infty \mu(x_1) \mathsf{P}_1(t; x_1)\, dx_1, \\ &+ \nu \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \mathsf{P}_n(t; x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n,\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu(x_i) + \lambda + \nu\right] \mathsf{P}_n(t; x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int_0^\infty \mathsf{P}_{n+1}(t; x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mu(x_{n+1})\, dx_{n+1}, \quad n \geq 1.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $\mu(x_i)$ задается равенством (2.7).

Граничные условия и условие нормировки даются равенствами (2.8), (2.9) и (2.10) соответственно.

Взятие ПЛ по t для обеих частей уравнения (3.5) приводит к

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + \mu(x_i) + \lambda + \nu\right] \tilde{p}_n(s; x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int_0^\infty \tilde{p}_{n+1}(s; x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mu(x_{n+1})\, dx_{n+1}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

После ряда преобразований уравнения (3.6) получаем

$$\tilde{p}_n(s; x_1, \ldots, x_n) = C(s) \lambda^n \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-(s+\nu)q(s)x_i}(1 - B(x_i)),\ n \geq 1, \tag{3.7}$$

где $q(s) > 1$ есть минимальное решение функционального уравнения (3.3) и $C(s)$ есть некоторая неизвестная функция, подлежащая дальнейшему определению.

После взятия ПЛ по t для обеих частей уравнений (3.4), (2.8), (2.9) и (2.10) можно получить с учетом начальных условий (3.1)

$$\begin{aligned}(s+\lambda)\tilde{p}_{00}(s) - 1 &= \int_0^\infty \tilde{p}_1(s; x_1) \mu(x_1)\, dx_1 \\ &+ \nu \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \tilde{p}_n(s; x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\tilde{p}_1(s;0) = \lambda \tilde{p}_{00}(s), \tag{3.9}$$

$$\tilde{p}_{n+1}(s;x_1,\ldots,x_n,0) = \lambda \tilde{p}_n(s;x_1,\ldots,x_n),\ n \geq 1, \tag{3.10}$$

$$\tilde{p}_{00}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \tilde{p}_n(s;x_1,\ldots,x_n)\, dx_1,\ldots,dx_n = 1/s. \tag{3.11}$$

Подставляя уравнение (3.7) при $n = 1$ в (3.9) и затем подставляя уравнения (3.7) и (3.11) в (3.8), находим вид функции $C(s)$

$$C(s) = \tilde{p}_{00}(s) = \frac{1}{s}\left[1 + \lambda \frac{1 - \beta((s+\nu)q(s))}{s+\nu}\right]^{-1}. \tag{3.12}$$

Из равенств (3.12) и (3.3) вытекает, что

$$\tilde{p}_{00}(s) = C(s) = [sq(s)]^{-1.} \tag{3.13}$$

Нетрудно убедиться, что равенство (3.7) удовлетворяет уравнению (3.10). Таким образом, решение системы уравнений (3.6) и (3.8) — (3.11) дается равенствами (3.7) и (3.13). Это завершает доказательство теоремы.

□

Близкие результаты недавно получены в статье [8], которая существенно опирается на результаты работ [5, 9, 10, 12, 13, 14].

Замечание 3.1. При строго положительном ν процесс $\{L(t) :\ t \geq 0\}$ имеет единственное стационарное распределение, а именно,

$$\mathsf{P}_0 = \lim_{s \downarrow 0+} s\tilde{p}_{00}(s) = q(0)^{-1},$$

$$\mathsf{P}_n = \lim_{s \downarrow 0+} s\tilde{p}_n(s) = q(0)^{-1}\left(\frac{q(0)-1}{q(0)}\right)^n,\ n \geq 1.$$

Кроме того,

$$\mathsf{P}_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\lambda^n}{q(0)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\nu q(0) x_i}(1 - B(x_i)),\ n \geq 1. \tag{3.14}$$

Замечание 3.2. При $B(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu x}$ и $s \downarrow 0+$ нетрудно получить из уравнения (3.3), что $q(0) \geq 1 + \lambda/(2\nu) > 1$. Подчеркнем, что $\lim_{\nu \downarrow 0+} q(0) = \frac{1}{1-\rho}$. В этом случае уравнение (3.14) превращается в уравнение (2.11).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 дано новое доказательство теоремы о нестационарном распределении числа требований в момент t в системе обслуживания M/G/1 с эгалитарным разделением процессора. Кроме того, в разделе 3 эта теорема распространена на случай системы обслуживания M/G/1—EPS с катастрофами. Вопросы, связанные с установлением единственности решениия системы уравнений в доказательствах теорем 2.2 и 3.1 требуют дополнительного обоснования. Это обоснование предполагается дать в одной из последующих статей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cox, D., The Analysis of Non–Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1955, vol. 50, pp. 433–441.
2. Gelenbe, E., Glynn P., and Sigman, K., Queues with Negative Arrivals, *J. Appl. Probab.*, 1991, vol. 28, pp. 245–250.
3. Jaiswal, N.K., *Priority Queues*, New York: Academic Press, 1968.
4. Kalashnikov, V.V., *Mathematical Methods in Queueing Theory*, Dordrecht: Kluwer, 1994.
5. Kitayev, M.Yu. and Yashkov, S.F., Analysis of a Single-Channel Queueing Systems with the Discipline of Uniform Sharing of a Device, *Eng. Cybernetics*, 1979, vol. 17, no. 6, pp. 42–49.
6. Kosten, L., *Stochastic Theory of Service Systems*, Oxford: Pergamon, 1973.
7. Krishna Kumar, B. and Arivudainambi, D., Transient Solution of an M/M/1 Queue with Catastrophes, *Computers & Mathematics with Appl.*, 2000, vol. 40, no. 10–11, pp. 1233–1240.
8. Li, Q.-L. and Lin, C., The M/G/1 Processor–Sharing Queue with Disasters, *Computers & Math. with Appl.*, 2006, vol. 51, no. 5, pp. 987–998.
9. Yashkov, S.F., Properties of Invariance of Probabilistic Models of Adaptive Scheduling in Shared–Use Systems, *Autom. Contr. Comput. Sci.*, 1980, vol. 14, no. 6, pp. 46–51.
10. Yashkov, S.F., A Derivation of Response Time Distribution for an M/G/1 Processor-Sharing Queue, *Problems of Control and Info. Theory*, 1983, vol. 12, no. 2, pp. 133–148.
11. Yashkov, S.F., The Non–Stationary Distribution of Numbers of Calls in the M/G/1 Processor–Sharing Queue, in: *Advances in Simulation*, Lukar, P.A. and Schmidt, B., Eds., Berlin: Springer, 1988, vol. 2, pp. 158–162.
12. Yashkov, S.F., *Analiz ocheredei v EVM* (Analysis of Queues in Computers), Moscow: Radio i Svyaz', 1989.
13. Yashkov, S.F., Mathematical Problems in the Theory of Shared-Processor Systems, *J. Soviet Math.*, 1992, vol. 58, no. 2, pp. 101–147 (English translation of the original Russian–language paper of 1990).
14. Yashkov, S.F. and Yashkova, A.S., Some Insight to the Time-Dependent Properties of the Queue Length Process in the M/G/1—EPS and LCFS—P Queues, *Information Processes*, 2005, vol. 5, no. 2, pp. 102–105 (available at http://www.jip.ru/).
15. Yashkov, S.F. and Yashkova, A.S., Processor Sharing: A Survey of the Mathematical Theory, *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 9, pp. 1662–1731.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И.Венец