*Информационные процессы, Том 8, № 4, 2008, стр. 240–255.*




# О сжатии томографических данных[1]

**Д. В. Сушко, Ю. М. Штарьков**

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*
Поступила в редколлегию 1.12.2008

**Аннотация**—Предложен метод сжатия (кодирования) изображений без искажений после частичной декорреляции отсчетов. Он основан на кардинальном уменьшении числа параметров исходной статистической модели. Рассмотрена специфика томографических изображений и способы ее учета для повышения эффективности сжатия. Приведены экспериментальные данные.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время созданы и быстро пополняются многочисленные банки данных томографических исследований, используемых в медицине для диагностики, лечения и других задач. Они позволяют врачам и исследователям обмениваться этими данными, проводить на расстоянии консультации, вести научную работу и т. д.

Однако хранение и передача томографических данных затруднены их большим объемом. Действительно, результат томографического исследования – набор до сотен томограмм, каждая из которых – полутоновое изображение большого размера с большим диапазоном значений яркости в каждой точке. Поэтому на передачу одной томограммы может потребоваться несколько секунд, а на набор томограмм – в десятки и сотни раз больше. Такие задержки неудобны для пользователей. Один из способов их уменьшения – сжатие данных.

В настоящей работе рассмотрен один из подходов к сжатию изображений, основанный на универсальном арифметическом кодировании. Использована статистическая модель "источника изображений" с вычислимой последовательностью состояний. Применены два одновременно используемых способа кардинального сокращения числа неизвестных параметров модели, увеличивающие сжатие несмотря на уменьшение точности статистического описания данных. В результате разработан метод сжатия изображений без искажений.

Выбор свободных параметров этого метода позволяет адаптировать его к различным типам изображений. Эта задача была решена для компьютерных томограмм. Корреляция последовательных срезов тканей не использовалась, а для декорреляции отсчетов отдельной томограммы применялся переход к ошибкам предсказания. Для шести реальных томограмм трех видов тканей определены оптимальные параметры алгоритма сжатия и соответствующие скорости кодирования. Приведены экспериментальные данные.

## 2. МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ДЕКОРРЕЛЯЦИЯ

Полутоновое изображение – это матрица $X = \{x_{ij},\, i = 1, \ldots, n_1,\, j = 1, \ldots, n_2\}$ *отсчетов* $x_{ij} \in A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ в *точках* $(i, j)$. Будем считать, что вероятность равенства $x_{ij} = a$

[1] Работа частично поддержана в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Фундаментальные науки — медицине", проект "Разработка методов, алгоритмов и программ сжатия томографических изображений для их архивации, хранения и передачи по каналам связи"; работа второго автора частично поддержана РФФИ (проект № 06-01-00225).

зависит только от *контекста* $\omega_{ij}$ – $\tau$ отсчетов, координаты которых отличаются от $(i,j)$ векторами $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с целочисленными компонентами. Таким образом, $p(x_{ij} = a) = p(a|\omega_{ij})$, а $\omega_{ij}$ – элемент множества $\Omega \subseteq A^\tau$.

Обычно изображение $X$ состоит из однородных областей, в каждой из которых отсчеты $x_{ij}$ можно аппроксимировать простой функцией $\phi(i,j|\gamma) = \tilde{x}_{ij}$. Это означает, что существует значение свободного векторного параметра $\gamma$, при котором неравенство $|x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| \ll m$ выполняется почти для всех точек соответствующей области.

Возможность такой аппроксимации – проявление глубокой статистической зависимости отсчетов. Все алгоритмы сжатия изображений в разной форме используют ее, несмотря на то что вероятности $p(a|\omega_{ij})$, границы однородных областей и значения параметра $\gamma$ заранее не известны. Для этого перед кодированием (сжатием) обычно производят взаимно однозначное декоррелирующее преобразование отсчетов, уменьшающее область значений получаемых величин и/или увеличивающее для них неравномерность условных распределений вероятностей. Далее рассматривается самое простое из них – переход от отсчетов к ошибкам предсказания.

*Предсказание* $\hat{x}_{ij} = \hat{x}(\omega_{ij}) \in A$ – функция отсчетов контекста $\omega_{ij}$, а *ошибка предсказания*

$$\delta_{ij} = x_{ij} - \hat{x}(\omega_{ij}) \in A(\omega_{ij}) = [-\hat{x}(\omega_{ij}), m-1-\hat{x}(\omega_{ij})] \subset A^* = [-m+1, m-1]$$

– буква алфавита $A^*$. Матрице $X$ соответствует матрица $\Delta$ ошибок предсказания. Попадание отсчетов контекста в разные однородные области уменьшает точность предсказания. Чем ближе отсчеты $\omega_{ij}$ к точке $(i,j)$, тем реже возникают такие ситуации и сильнее статистическая зависимость $x_{ij}$ от $\omega_{ij}$.

Предсказанием может служить значение функции $\phi(i,j|\gamma)$ (см. выше), в которой $\gamma$ – аргумент минимума $\sigma_{ij}$ суммы взвешенных ошибок аппроксимации отсчетов $\omega_{ij}$:

$$\sigma_{ij} = \sigma(\omega_{ij}) = \min_{\gamma} \left[ \sum_{(\xi_1,\xi_2)} \alpha(\xi_1,\xi_2) \, |x_{i-\xi_1, j-\xi_2} - \phi(i-\xi_1, j-\xi_2|\gamma)|^{\lambda} \right], \tag{1}$$

где $\lambda \geqslant 1$ – константа, а $|z|$ – модуль вещественного числа $z$. Коэффициенты $\alpha(\xi_1,\xi_2) > 0$, в сумме равные 1, позволяют учесть разную степень статистической зависимости $x_{ij}$ от отсчетов контекста. Размерность вектора $\gamma$ должна быть меньше $\tau$: в противном случае правая часть (1) может стать тождественно равной нулю. Функция $\phi(i,j|\gamma) = \mathrm{const}$ определяет предсказание *нулевого порядка*.

Последовательная обработка элементов матриц $X$ и/или $\Delta$ означает их упорядочение в виде последовательностей $x^n = x_1, \ldots, x_n$ и $\delta^n = \delta_1, \ldots, \delta_n$, где $n = n_1 \times n_2$. Если $x_{ij} = x_k$, а $\omega_{ij} = \omega_k$ содержит только отсчеты с индексами $k' < k$, то $X$ и $\Delta$ описываются моделью с вычислимой последовательностью состояний (контекстов) и условными распределениями вероятностей $\tilde{p}(\delta_k|\omega_k) \neq p(x_k|\omega_k)$. При этом вероятность $p(\delta^n)$ – произведение $\tilde{p}(\delta_k|\omega_k)$ по $k = \overline{1,n}$, а декодирование $\delta_k$ и восстановление $x_k$ происходят без задержки. Построчный просмотр – один из видов упорядочения.

## 3. КОДИРОВАНИЕ ОШИБОК ПРЕДСКАЗАНИЯ

Все чаще в алгоритмах сжатия применяют *универсальное арифметическое* кодирование. При арифметическом кодировании (см., например, [1]) множество $Q = \{\{q(\delta|\omega), \ \delta \in A(\omega)\}, \ \omega \in \Omega\}$ *кодовых* условных распределений вероятностей используется для того, чтобы любой последовательности $\delta^n$ приписать кодовую вероятность $q(\delta^n)$ и *кодовое слово* (результат сжатия) длины $L(\delta^n) < -\log q(\delta^n) + 2$ бит (здесь и далее $\log z = \log_2 z$). Задача универсального кодирования – выбор $\{q(\delta|\omega)\}$ при неизвестных $\{\tilde{p}(\delta|\omega)\}$.

Пусть $\delta^n(\omega)$ – подпоследовательность независимых (согласно используемой модели) букв, "порождаемых" в состоянии $\omega \in \Omega$, $n(\omega)$ – длина $\delta^n(\omega)$, а $n(\delta|\omega)$ – число вхождений буквы $\delta$ в $\delta^n(\omega)$. Тогда *скорость кодирования* (среднее число $L(\delta^n)/n$ бит, затрачиваемых на описание одной ошибки предсказания) равна

$$R(\delta^n|Q) = \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) \sum_{\delta\in A(\omega)} f(\delta|\omega)\,[-\log q(\delta|\omega)\,] \;=\; \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)\; R[\,\delta^n(\omega)|Q\,] \;= \\ = H(\delta^n|\Omega) \,+\, r(\delta^n|Q) \;\geqslant\; H(\delta^n|\Omega)\,, \quad (2)$$

где $\{f(\omega) = n(\omega)/n,\, \omega \in \Omega\}$ и $\{f(\delta|\omega) = n(\delta|\omega)/n(\omega),\, \delta \in A(\omega)\}$ – *частотные* распределения вероятностей,

$$H(\delta^n|\Omega) \;=\; \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)\, h[\,\delta^n(\omega)\,] \;=\; \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) \sum_{\delta\in A(\omega)} f(\delta|\omega)\,[-\,\log f(\delta|\omega)] \quad (3)$$

– *эмпирическая энтропия* (*квазиэнтропия*) последовательности $\delta^n$, а

$$r(\delta^n|Q) \;=\; R(\delta^n|\,Q) - H(\delta^n|\,\Omega) \;=\; \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) \left[\sum_{\delta\in A^*} f(\delta|\omega)\, \log\Big(\frac{f(\delta|\omega)}{q(\delta|\omega)}\Big)\right] \geqslant 0 \quad (4)$$

– *индивидуальная* (для конкретной $\delta^n$) *избыточность* кодирования. Выражения (2) и (3) суть *верхняя и нижняя границы* скорости кодирования, причем нижняя граница груба, если $2\,m\,|\Omega| > n$, где $|Z|$ – число элементов множества $Z$.

Согласно (4) $r(\delta^n|Q) = 0$, тогда и только тогда, когда $\{q(\delta|\omega)\} = \{f(\delta|\omega)\}$ для всех $\omega$. Но частоты $f(\delta|\omega)$ – случайные величины, и в среднем (по $\delta^n$) оптимален выбор $q(\delta|\omega) = \tilde{p}(\delta|\omega)$. Однако $\tilde{p}(\delta|\omega)$ также неизвестны. Поэтому используем упрощенное *комбинаторное* универсальное кодирование (см., например, [2]).

Кодовое слово комбинаторного кода (описание изображения) состоит из двух частей. Первая из них (преамбула) содержит значения всех $n(\delta|\omega) \in [0, n]$, $\delta \in A^*, \omega \in \Omega$; ее длина – $\kappa(A^*, \Omega)\log(n+1)$ бит, где $\kappa(A^*, \Omega) \leqslant (2m-1)\,|\Omega| - 1$. А вторая часть – результат арифметического кодирования $\delta^n$ с помощью частотных распределений $\{f(\delta|\omega)\}$, $\omega \in \Omega$. Получив кодовое слово, декодер выделяет его преамбулу, "считывает" все $n(\delta|\omega)$ и вычисляет все $n(\omega)$ – суммы $n(\delta|\omega)$ по $\delta \in A^*$. В результате становятся известными частотные распределения $\{f(\delta|\omega)\}$, использовавшиеся при кодировании, что позволяет однозначно декодировать вторую часть кодового слова.

Поскольку длина второй части кодового слова равна $n\,H(\delta^n|\Omega)$ (см. (3)), избыточность комбинаторного кодирования определяет длина преамбулы: для него

$$r(\delta^n) \;=\; \frac{\kappa(A^*, \Omega)\, \log(n+1)}{n} \;\leqslant\; \frac{[(2m-1)\,|\Omega| - 1]\, \log(n+1)}{n}\,. \quad (5)$$

При больших $\kappa(A^*, \Omega)$ правая часть (5) недопустимо велика: если $|\Omega| > n$, то она не меньше $(2m-1)\,\log(n+1)$. Разумеется, в этом случае многие $n(\delta|\omega) \ll n$. Поэтому можно уменьшить избыточность приблизительно в 2 раза (см., например, [3,4]), но для изображений это обычно не решает проблему.

Пусть, например, $m = 256$, $\tau = 2$, а $n = 512^2$. Даже если $|\Omega| = 64$, то есть в *тысячу раз* меньше максимального значения $m^2$ и в *четыре тысячи раз* меньше $n$, из (5) получаем, что $r(\delta^n|Q) \approx 2.24$ бит на пиксель (бт/п) – в *десятки раз* больше допустимых значений.

Для уменьшения избыточности нужно кардинально уменьшить число $\kappa(A^*, \Omega)$ параметров модели. При этом квазиэнтропия увеличится (из–за уменьшения точности описания модели), но избыточность (5) уменьшится и скорость кодирования также может стать меньше. Способ решения этой задачи определяет важный этап адаптации универсального кодирования к характерным свойствам изображений.

Границы однородных областей и условные распределения $\{\tilde{p}(\delta|\omega)\}$ неизвестны, но контекст $\omega_{ij}$ позволяет оценить уровень флюктуаций отсчетов в окрестностях точки $(i,j)$ и выбрать кодовое распределение $\{q(\delta|\omega_{ij})\}$. В качестве оценки используем функцию (1) и будем считать, что чем ближе значения $\sigma(\omega)$, тем меньше различие распределений $\{\tilde{p}(\delta|\omega)\}$, измеряемое избыточностью их совместного кодирования.

Следуя этой гипотезе, выберем $u_0 = 0$, $u_D = m^\lambda$ и множество $U = \{u_d,\, d < D\}$ натуральных *порогов*, где $u_{d-1} < u_d$. Оно определяет множество $S = S(U)$ *укрупненных* состояний $s_d = \{\omega \,:\, \sigma(\omega) \in [\,u_{d-1}, u_d - 1]\,\}$ и подпоследовательности $\delta^n(s)$ – объединения $\delta^n(\omega)$ по всем $\omega \in s$ суммарной длины $n(s)$. Минимальная длина описания изображения (квазиэнтропия) $H(\delta^n|S) = H(\delta^n|U)$ определяется так же, как в (4).

В правой части (5) нужно уменьшить не только число состояний $|\Omega|$, но и число $m-1$ независимых параметров условных распределений. Для произвольных распределений это невозможно. Но $\{f(\delta|s)\}$ – достаточно "гладкие" функции $\delta$, и их можно аппроксимировать простыми функциями $q(\delta|s)$. Одна такая функция не обеспечивает приемлемую точность аппроксимации всей $f(\delta|s)$. Поэтому разобъем алфавит $A^*$ на $2\mu(s){+}1$ *диапазонов* $M_k(s) = [\,m_{k-1}(s)+1, m_k(s)\,]$, $k \in [-\mu(s),\, \mu(s)]$, где $m_{-\mu-1}(s) = -m$, $m_\mu(s) = m-1$, и используем в них разные кодовые распределения $\{q(\delta|s,k),\, \delta \in M_k(s)\}$.

Обозначив через $f(k|s)$ сумму $f(\delta|s)$ по $\delta \in M_k(s)$, учитывая, что $q(\delta|s,k)$ нормированы в $M_k(s)$, и полагая, что $f(k|s)$ известны не только кодеру, но и декодеру, имеем

$$q(\delta|s) \;=\; f(k|s)\, q(\delta|s,k) \qquad \forall\, \delta \in M_k(s)\,. \tag{6}$$

Из выражений (2) и (6) следует, что

$$R(\delta^n|S) \;=\; \sum_{s\in S} f(s) \Bigg\{ \sum_{k=-\mu(s)}^{\mu(s)} f(k|s) \Big[ -\log f(k|s) \;+\; \sum_{\delta\in M_k(s)} f(\delta|s,k)\,(-\log q(\delta|s,k)) \Big] \Bigg\}, \tag{7}$$

а поскольку $f(\delta|s) = f(k|s)\, f(\delta|s,k)$, из выражений (4) и (6) получаем

$$r(\delta^n|Q) \;=\; \sum_{s\in S} f(s) \Bigg\{ \sum_{k=-\mu(s)}^{\mu(s)} f(k|s) \Bigg[ \sum_{\delta\in M_k(s)} f(\delta|s,k)\, \log\Big( \frac{f(\delta|s,k)}{q(\delta|s,k)} \Big) \Bigg] \Bigg\}. \tag{8}$$

К этой величине нужно добавить "избыточность" $r(\delta^n)$ преамбулы кодового слова, но теперь вместо всех $n(\delta|s)$ последняя содержит только описания $m_k(s)$, $f(k|s)$ и функций $q(\delta|s,k)$ (без этих данных декодер не сможет восстановить $\delta^n$).

Выражения в квадратных и фигурных скобках в (7) и (8) – скорость кодирования и избыточность аппроксимации частотных распределений для $k$-го диапазона состояния $s$ и всего состояния $s$, соответственно.

В результате перехода к укрупненным состояниям и аппроксимации частотных распределений $\{f(\delta|s,k)\}$ значение $\kappa(A^*,\Omega)$ в (5) заменяется на

$$\kappa^*(M,S) \;=\; 2\sum_{s\in S} \mu(s) + |S|,$$

где $M$ – множество разбиений алфавита $A^*$ на диапазоны для всех $s \in S$. Структура комбинаторного кода сохраняется, длина его преамбулы кардинально уменьшается, а длина второй части увеличивается на величину, зависящую от точности аппроксимации.

По-видимому, впервые в упрощенном виде подобный подход был применен в [5].

## 4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТОМОГРАММ

Адаптация описанного выше общего метода сжатия к любому типу изображений состоит в выборе "предсказателя", множества состояний $S$, числа и границ диапазонов для каждого $s \in S$ и функций $q(\delta|s,k)$ для всех пар $(s,k)$. Далее мы ограничимся рассмотрением компьютерных томограмм. В качестве экспериментального материала используем по две томограммы трех видов тканей: брюшной полости (T1,T2), легких (T3,T4) и головного мозга (T5,T6). Томограммы были предоставлены Отделением лучевой диагностики Клиники пропедевтики внутренних болезней им. В.Х. Василенко (томограф HiSpeed CT/i компании General Electric).

### *4.1. Компьютерные томограммы как изображения*

Компьютерная (рентгеновская) томограмма – полутоновое изображение размера $N = 512 \times \times 512$ пикселей. Оно содержит область восстановления (обычно это круг, вписанный в квадрат) и область фона, в которой восстановление не производилось. Значения яркости, полное число которых равно 4096, взаимно однозначным преобразованием переводятся в диапазон [1, 4096], а точкам фона приписывается значение 0.

Диапазон значений яркости томограмм заметно превышает возможности человеческого глаза по их наблюдению, а заодно и возможности большинства видеоадаптеров по воспроизведению полутоновых изображений: глаз различает порядка 64 градаций серого, воспроизводимые полутоновые изображения имеют стандартно 256 градаций яркости. Поэтому производится визуализация томограмм в окне $[x_{\min}, x_{\max}]$, которое выбирается исходя из диагностических задач. Это означает, что диапазон $[x_{\min}, x_{\max}]$ линейно отображается на диапазон [0, 255], значения $x < x_{\min}$ – в 0, значения $x > x_{\max}$ – в 255.

На рис. 1*а* – *е* представлены томограммы T1–T6 в окнах визуализации [864, 1264], [0, 1174] и [1024, 1120] для трех пар томограмм, соответственно. Для второй пары $x_{\min} = 0$, и на рис. 1*в* и 1*г* хорошо различаются области фона и восстановления, а на рис. 1*е* проявилось образование, неразличимое при использовании полного диапазона.

### *4.2. Алгоритм предсказания и состояние для фона*

Используем простейший предсказатель: $\tau = 2$, $\omega_{ij} = \{x_{i,j-1}, x_{i-1,j}\}$ – самый компактный контекст, $\hat{x}_{ij} = (x_{i,j-1} + x_{i-1,j})/2$ (с точностью до округления), и $\sigma_{ij} = |x_{i,j-1} - x_{i-1,j}|$. Предсказание для элементов с $i = 1$ или $j = 1$ обеспечим добавлением строки с $i = 0$ и столбца с $j = 0$, все элементы которых равны нулю. В результате ошибки предсказания почти всех элементов первой строки и первого столбца равны нулю.

Для описания значений $\delta$ в области фона добавим к множеству $S$ состояние $s_0$. Его нельзя определить, как состояния $s_d$, $d > 0$, поскольку $\sigma_{ij} = 0$ не только для точек фона. Но $\omega = (0,0)$ *только* для фона, и в качестве $s_0$ используется этот контекст:

$$s_0 = \omega = (0,0)\,. \tag{9}$$

Одновременно в определение остальных обобщенных состояний добавляется дополнительное условие $x_{i,j-1} + x_{i-1,j} > 0$. Таким образом, число состояний увеличилось до $D+1$.

### *4.3. Квазиэнтропийные нижние границы скорости кодирования*

Если $D = 0$, то частотные распределения $\{f(\cdot)\}$ значений всех элементов матриц $X$ и $\Delta$ определяют их квазиэнтропии нулевого порядка (суммирование по $s$ отсутствует). При $D = 1$ используются состояния $s_0$ и "не $s_0$". Отметим, что для всех томограмм $f(s_0) = 0.210278$, а значения $H(s_0)$ равны 0.0384, 0.0413, 0.0426, 0.0429, 0.0374 и 0.0284 бт/п, соответственно.

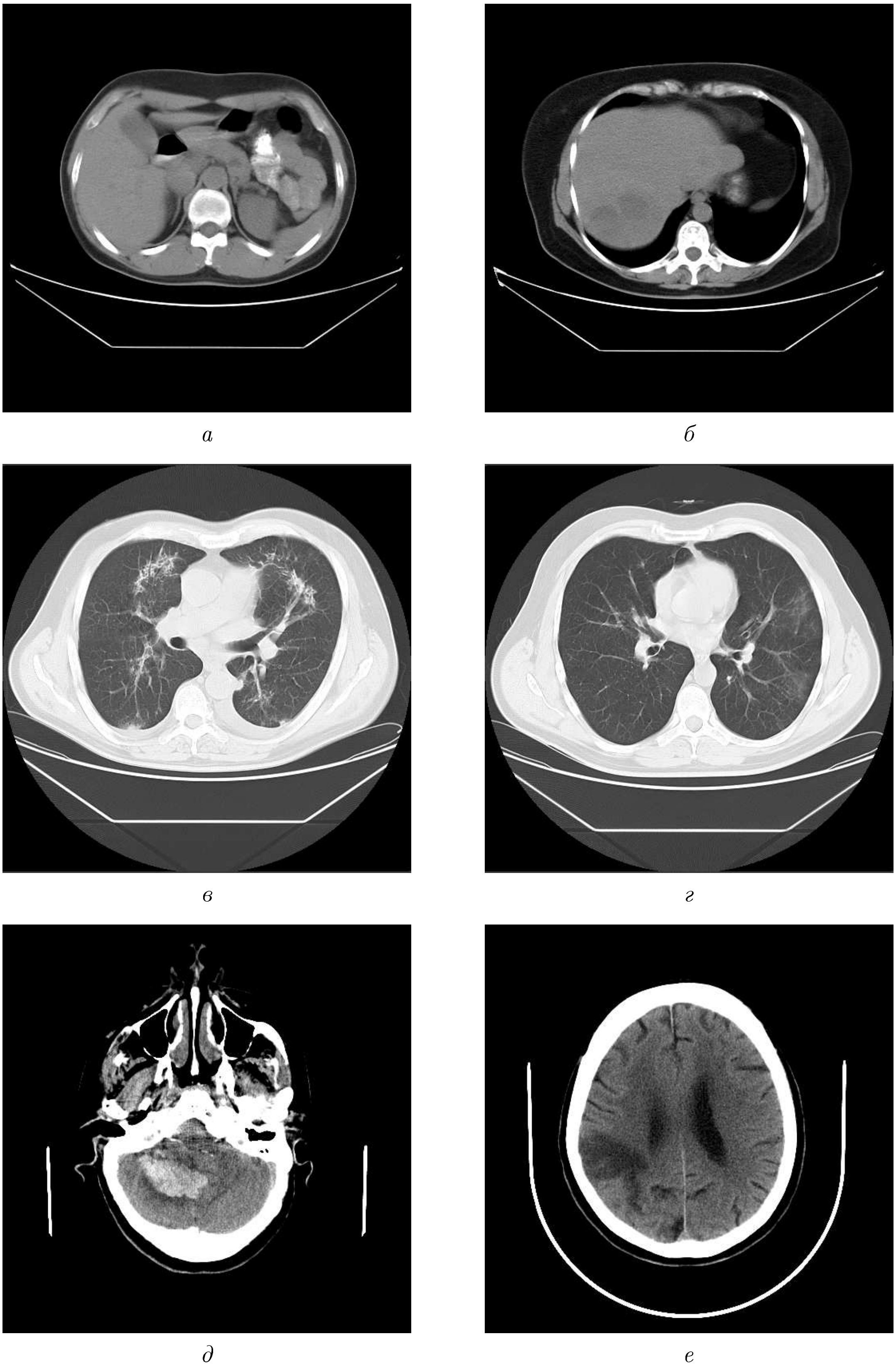


Рис. 1. Томограммы Т1–Т6 в окнах визуализации [864, 1264], [0, 1174] и [1024, 1120] для первой (*а*, *б*), второй (*в*, *г*) и третьей (*д*, *е*) пары, соответственно.

Полученные данные приведены в табл. 1. Буква $x$ или $\delta$ в начале строки таблицы означает, что она содержит значения квазиэнтропии $x^n$ или $\delta^n$. Из приведенных данных следует, что при $D=0$ переход от отсчетов к ошибкам предсказания уменьшает квазиэнтропию на 1.165 – 2.434, а при $D=1$ – на 1.123 – 2.207 бт/п. Поэтому целесообразность этого перехода очевидна.

**Таблица 1.** Нижние границы скорости кодирования, $D = 0, 1$

| | $D$ | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 7.334 | 7.692 | 8.374 | 8.208 | 7.427 | 7.301 |
| $x$ | 1 | 6.643 | 6.981 | 7.663 | 7.497 | 6.716 | 6.586 |
| $\delta$ | 0 | 5.353 | 5.636 | 7.132 | 7.043 | 5.115 | 4.867 |
| $\delta$ | 1 | 4.769 | 5.032 | 6.451 | 6.374 | 4.674 | 4.379 |

В табл. 2 каждой томограмме отведены три строки и три пары столбцов в этих строках для $D=2, 3, 4$. Три строки первого столбца содержат: 1) множество порогов $U^* = \{u_1^*, \ldots, u_{D-1}^*\}$, минимизирующее квазиэнтропию для $S^* = S(U^*)$, 2) вероятности $f(s)$ для $U = U^*$ и всех $s \neq s_0$ (данные по $s_0$ см. выше) и 3) значения $H(\delta^N|s)$. Число в средней строке второго столбца (выделенное жирным шрифтом) содержит значение $H(U^*)$.

Уже при $D=3$ разность значений $H(U^*)$ для $D$ и $D+1$ составляет всего 0.015 – 0.023 бт/п, и лишь для наиболее "неоднородной" томограммы T5 она равна 0.061. Кроме того, с ростом $D$ увеличиваются число неизвестных параметров и избыточность $r(\delta^n)$ (см. аналог (5)). Поэтому нет оснований для дальнейшего увеличения числа $D$.

Не исключено, что другое определение обобщенных состояний может улучшить результаты: его поиск – тема отдельного исследования.

**Таблица 2.** Нижние границы скорости кодирования, $D = 2 - 4$

| $D$ | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T1 | 37<br>0.683; 0.107<br>5.321; 8.622 | **4.564** | 23, 101<br>0.625; 0.116; 0.049<br>5.194; 6.195; 9.277 | **4.508** | 15, 37, 114<br>0.536; 0.146; 0.062; 0.045<br>5.088; 5.955; 7.416; 9.286 | **4.487** |
| T2 | 41<br>0.672; 0.118<br>5.669; 8.622 | **4.835** | 29, 106<br>0.628; 0.107; 0.055<br>5.575; 7.258; 9.216 | **4.790** | 16, 37, 117<br>0.495; 0.166; 0.078; 0.051<br>5.434; 6.122; 7.535; 9.239 | **4.771** |
| T3 | 149<br>0.696; 0.094<br>7.780; 9.721 | **6.335** | 101, 257<br>0.629; 0.113; 0.048<br>7.699; 8.664; 10.04 | **6.309** | 87, 175, 468<br>0.593; 0.121; 0.053; 0.022<br>7.671; 8.336; 9.404; 10.11 | **6.294** |
| T4 | 161<br>0.711; 0.079<br>7.682; 9.900 | **6.250** | 87, 270<br>0.617; 0.128; 0.045<br>7.560; 8.510; 10.19 | **6.219** | 1, 87, 270<br>0.013; 0.604; 0.128; 0.045<br>6.010; 7.561; 8.510; 10.19 | **6.200** |
| T5 | 19<br>0.578; 0.212<br>4.549; 8.235 | **4.381** | 1, 21<br>0.094; 0.494; 0.201<br>2.279; 4.819; 8.301 | **4.276** | 1, 14, 61<br>0.094; 0.446; 0.140; 0.110<br>2.279; 4.649; 6.746; 8.879 | **4.215** |
| T6 | 16<br>0.605; 0.185<br>4.088; 8.366 | **4.024** | 12, 44<br>0.580; 0.091; 0.119<br>3.992; 6.715; 8.798 | **3.976** | 12, 39, 274<br>0.580; 0.084; 0.101; 0.025<br>3.991; 6.612; 8.450; 9.242 | **3.957** |

## 5. ПАРАМЕТРЫ АЛГОРИТМА СЖАТИЯ. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Для каждой томограммы можно найти оптимальные значения порогов, границ и функции $q(\delta|s,k)$ (из выбранного семейства) прямым перебором. Упростить такую трудоемкую процедуру можно совершенствованием алгоритма поиска решения или/и ценой увеличения избыточности. Эта проблема не является главной для проводимого в настоящей работе изучения потенциальных возможностей предложенного выше метода сжатия, но не игнорируется полностью.

Назовем параметр *устойчивым*, если существует его значение, при котором скорости кодирования томограмм одного класса мало отличаются от минимальных, и *неустойчивым* в противном случае. Поиск решения тем проще, чем больше доля устойчивых параметров. Их значения включают в программу алгоритма сжатия, а значения неустойчивых нужно искать, а затем приводить в преамбуле кодового слова. Устойчивость проверяют, "настраивая" параметр с помощью томограмм одной группы и оценивая эффективность выбора на другой (контрольной) группе.

Далее $D=4$, если не оговаривается другое.

### *5.1. О выборе и устойчивости порогов*

Чем точнее функции $q(\delta|s,k)$ описывают соответствующие $f(\delta|s,k)$, тем ближе оптимальные множества порогов $U$ к приведенным в табл. 2 множествам $U^* = U^*(\delta^n)$, а скорости кодирования – к минимумам квазиэнтропии $H(\delta^n|U^*)$.

Расчеты показывают, что $H(\delta^n|U)$ – достаточно "гладкая" функция порогов $u_d$, $d>0$, и чем больше $d$, тем слабее увеличение избыточности

$$r(U) = H(\delta^n|U) - H(\delta^n|U^*) \tag{10}$$

зависит от $|u_d - u_d^*|$. Так, при замене $U^*(\text{T3}) = (87, 175, 468)$ на $U = (70, 150, 400)$ получаем $r(U) = 0.0007$ бт/п. Этот и многие другие примеры позволяют надеяться на существование устойчивых множеств $U$.

Обозначим через Ti $\to$ Tj использование множества $U^*(\text{Ti})$, оптимального для Ti, при сжатии томограммы Tj. Получаемые в результате значения избыточности (10) для трех пар томограмм равны

$$\begin{array}{llllll} \text{T1} \to \text{T2}: & 0.0002; & \text{T3} \to \text{T4}: & 0.0064; & \text{T5} \to \text{T6}: & 0.0191; \\ \text{T2} \to \text{T1}: & 0.0006; & \text{T4} \to \text{T3}: & 0.0056; & \text{T6} \to \text{T5}: & 0.0866. \end{array}$$

Эти результаты приемлемы (кроме 0.0866). Большие значения для T5 и T6 объясняются, по-видимому, тем, что T5 содержит не только ткани головного мозга, как T6, но и лицевую часть. В целом же результаты можно считать обнадеживающими.

Если для томограммы T некоторой пары $u_1^* = 1$, то в качестве общего (для этой пары) множества порогов предпочтительнее использовать $U = U^*(\text{T})$. Для (T3,T4) различие в использовании $U^*(\text{T3})$ или $U^*(\text{T4})$ невелико, но для (T5,T6) составляет 4.5 раза (!). Более того, при $u_1=1$ отличие минимумов квазиэтропии по $u_2$ и $u_3$ от $H(\delta^N|U^*)$ меньше 0.02 бт/п для всех шести гистограмм и быстро убывает с ростом $D$.

Эти факты привлекли внимание к значению $u_1$. При $u_1=1$ для каждой томограммы были найдены оптимальные значения порогов $u_2$ и $u_3$ и соответствующие им избыточности (10). Для шести рассматриваемых томограмм они равны:

$$\begin{array}{lll} \text{T1}: \{23,\ 101\},\ 0.0189; & \text{T3}: \{101,\ 257\},\ 0.0044; & \text{T5}: \{14,\ 061\},\ 0.0000; \\ \text{T2}: \{29,\ 113\},\ 0.0191; & \text{T4}: \{087,\ 270\},\ 0.0000; & \text{T6}: \{12,\ 044\},\ 0.0171. \end{array}$$

По сравнению с данными табл. 2 различие порогов для T1 и T2 немного увеличилось, а для двух других пар уменьшилось. Перейдя к средним арифметическим значениям порогов $u_2$ и $u_3$ этих пар, получаем для них множества $\overline{U}_1$, скорости кодирования и избыточности

$$\begin{array}{llll} \text{T1 и T2}: & \{1,\,26,\,107\}, & 4.5067 \text{ и } 4.7886, & 0.0199 \text{ и } 0.0171; \\ \text{T3 и T4}: & \{1,\,94,\,263\}, & 6.2991 \text{ и } 6.2000, & 0.0048 \text{ и } 0.0004; \\ \text{T5 и T6}: & \{1,\,13,\,052\}, & 4.2166 \text{ и } 3.9748, & 0.0012 \text{ и } 0.0176. \end{array}$$

На различие этих приемлемых результатов могут влиять области воздуха. Действительно, отсчеты этой области одинаковы с точностью до квантового шума, и для них велика вероятность того, что $\sigma(\omega)=0$ и $\delta=0$ одновременно. Выбор $u_1=1$ позволяет рассмотреть эту ситуацию отдельно от других. С этой гипотезой согласуются экспериментальные данные. Для T3 и T4, содержащих много распределенного воздуха в легких, $r(\overline{U}_1) < 0.005$ бт/п (см. (10)), а для T5, содержащей много воздуха в лицевой части, $r(\overline{U}_1) = 0.0012$ бт/п. А в T1, T2 и T6 воздуха мало, и для $u_1=1$ и средних значений $u_2$ и $u_3$ избыточность лишь немного меньше 0.020 бт/п.

Можно усреднять и значение $u_1$. Например, для T1 и T2 в этом случае получаем множество $\overline{U} = \{15, 37, 115\}$ и избыточности (10), равные 0.0001 и 0.0003 бт/п соответственно. Имеются и другие способы получения устойчивых множеств $U$. Но далее для упрощения расчетов используются множества $\overline{U}_1$, приведенные выше.

### *5.2. Симметризация условных распределений вероятностей*

Следующий способ позволяет уменьшить число искомых границ диапазонов и аппроксимирующих функций $q(\delta|\tilde{s},k)$.

Пусть $f=\{f(\delta),\,\delta\in A^*\}$ – произвольное частотное распределение вероятностей. Перейдем от него к распределению $g(f)=\{g(\delta|f),\ \delta\in A^*\}$, где $g(0|f)=f(0)$ и

$$g(\delta|f) \;=\; g(-\delta|f) \;=\; 0.5\,[\,f(\delta)\,+\,f(-\delta)\,] \;=\; 0.5\,f(|\delta|)\,, \qquad \delta\neq 0\,.$$

В этом распределении любому $|\delta|\in A$ приписывается оптимальная вероятность $f(|\delta|)$, а знаку $\delta\neq 0$ – вероятность 0.5. Если при кодировании заменить распределение $f$ на $g(f)$, то из–за описания знака одним битом скорость кодирования увеличится на

$$r(g|f) \;=\; \sum_{\delta\in A^*} f(\delta)\,\log\Big[\,\frac{f(\delta)}{g(\delta|f)}\,\Big] \;=\; h[g(f)]\,-\,h(f)\,\in\,[\,0,\,1-f(0)\,]\,, \tag{11}$$

где $h(\cdot)$ – энтропийная функция соответствующего распределения вероятностей. Эта величина – *избыточность симметризации* распределения $f$ относительно $\delta=0$. Ее минимум и максимум достигаются, когда соответственно $f(\delta)=f(-\delta)$ и $f(\delta)\cdot f(-\delta)=0$ для всех $\delta\neq 0$.

Заменив в (11) распределение $f=\{f(\delta)\}$ на $f_s=\{f(\delta|s)\}$, получим $r(g|f_s)=r(g|s)$. А для всей томограммы избыточность симметризации равна

$$r(G) \;=\; \sum_{s\in S} f(s)\,r(g|s)\,, \tag{12}$$

где $r(g|s)=0$, если $\{f(\delta|s)\}$ по каким либо причинам не симметризовано. Правая часть (12) – увеличение скорости кодирования (цена симметризации).

### *5.3. Диапазоны и аппроксимирующие функции*

Оптимальные границы диапазонов для $\{g(\delta|f_s)\}$ симметричны относительно центра $\delta=0$, $q(\delta|s,k)=q(-\delta|s,-k)$, т. е. число искомых границ и функций $q(\delta|s,k)$ уменьшилось вдвое (!) .

Поэтому далее почти всегда рассматриваются симметризованные условные распределения вероятностей и всегда $k \geqslant 0$.

Нередко $f(0|s)$ значительно отличается от соседних частот. Поэтому для всех $s$ будем использовать диапазон $M_0(s) = [\,0\,]$, включающий только $\delta = 0$. Для единственного значения аппроксимация не имеет смысла, а избыточность равна нулю.

Совместная избыточность кодирования подпоследовательности $\delta^n(s)$, вызванная симметризацией $f_s = \{f(\delta|s)\}$ и последующей аппроксимацией $g(\delta|f_s)$, равна

$$r(g,q|s) = \sum_{\delta\in A^*} f(\delta|s)\,\log\Big[\,\frac{f(\delta|s)}{q(\delta|s)}\,\Big] \;=\; \sum_{\delta\in A^*} f(\delta|s)\,\Big\{\log\Big[\,\frac{f(\delta|s)}{g(\delta|f_s)}\,\Big] + \log\Big[\,\frac{g(\delta|f_s)}{q(\delta|s)}\,\Big]\Big\}, \qquad (13)$$

где сумма по $\delta$ первого слагаемого в фигурной скобке – избыточность $r(g|s)$ (см. (11)).

Для симметризованного распределения в (6)–(8) нужно заменить $f(k|s)$ и $f(\delta|s,k)$ на $g(k|s)$ (сумму $g(\delta|f_s)$ по $\delta\in M_k(s)$) и $g(\delta|s,k) = g(\delta|f_s)/g(k|s)$, соответственно. В результате сумма по $\delta$ второго слагаемого в фигурной скобке выражения (13) равна

$$r(q|g,s) \;=\; 2\sum_{k=1}^{\mu(s)} g(k|s)\Big\{\sum_{\delta\in M_k(s)} g(\delta|s,k)\,\log\Big[\,\frac{g(\delta|s,k)}{q(\delta|s,k)}\,\Big]\Big\} \;=\; 2\sum_{k=1}^{\mu(s)} g(k|s)\,r(q|g,s,k) \qquad (14)$$

(это аналог выражения в фигурной скобке в (8)). При этом учитывалось, что: 1) границы диапазонов и функций $q(\delta|s,k)$ симметричны относительно $\delta = 0$; 2) при $k = 0$ соответствующее слагаемое равно нулю; 3) $f(\delta|s) + f(-\delta|s) = 2\,g(\delta|f_s) = 2\,g(k|s)\,g(\delta|s,k)$ при $k \neq 0$. Выражение в фигурных скобках – избыточность $r(q|g,s,k)$ аппроксимации распределения $\{g(\delta|s,k),\ \delta\in M_k(s)\}$ кодовым условным распределением $\{q(\delta|s,k)\}$. Таким образом, $r(g,q|s)$ – сумма избыточностей симметризации и аппроксимации.

Первое равенство в (13) позволяет сразу вычислить $r(g,q|s)$. Но $q(\delta|s)$ – составная функция, и вычисления пришлось бы выполнять так же, как в (14). Кроме того, при этом не выявляется влияние двух разных факторов на избыточность. Поэтому далее будем представлять $r(g,q|s)$ и ее среднее (по $s\in S$) значение $r(G,Q)$ в виде сумм $r(g|s)+r(q|g,s)$ и $r(G)+r(Q|G)$, соответственно.

Итак, для каждого $s$ совместный выбор числа диапазонов, их границ и аппроксимирующих функций должен быть основан на анализе избыточности $r(q|g,s)$. Опишем процедуру, которая может служить основой такого выбора.

Поскольку $M_0(s) = [\,0\,]$ (см. выше), начинаем с диапазона $M_1(s) = [1, m_1(s)]$. Взяв одну из функций семейства, увеличиваем $m_1(s)$ до тех пор, пока при *оптимальных значениях* ее свободных параметров выполняется *условие расширения*. Затем повторяем эту процедуру для других функций. Функция и значения ее параметров, для которых $m_1(s)$ максимальна, определяют $M_1(s)$ и $q(\delta|s,1)$. После этого переходим к диапазону $M_2(s)$, у которого левая граница $m_1(s)+1$ уже известна, и т. д.

Условием расширения можно было бы считать выполнение неравенства $r(q|g,s,k)\leqslant\varepsilon$: тогда $r(q|g,s)$ и $r(Q|G)$ не больше $\varepsilon$ (см. (14)). При больших $f(s)$ и малых $|\delta|$ распределения $g(\delta|f_s)$ – достаточно гладкие функции (см. рис. 2 *а*), и применение этого неравенства может быть оправдано. Но при малых $f(s)$ или средних $|\delta|$ распределения содержат большую “флюктуационную” составляющую, а при больших $|\delta|$ положительные значения перемежаются нулями (см. рис. 2 *б* и 2 *в*, соответственно). Поэтому для гладких функций $q(\delta|s,k)$ в двух последних случаях значения $r(q|g,s,k)$ ограничены снизу положительными константами. Недостаток упомянутого условия ослабляется переходом к неравенству $g(k|s)\cdot r(q|g,s,k) \leqslant \varepsilon$: в этом случае допустимые искажения тем больше, чем меньше $g(k|s)$. Но и это условие может служить лишь некоторым ориентиром.

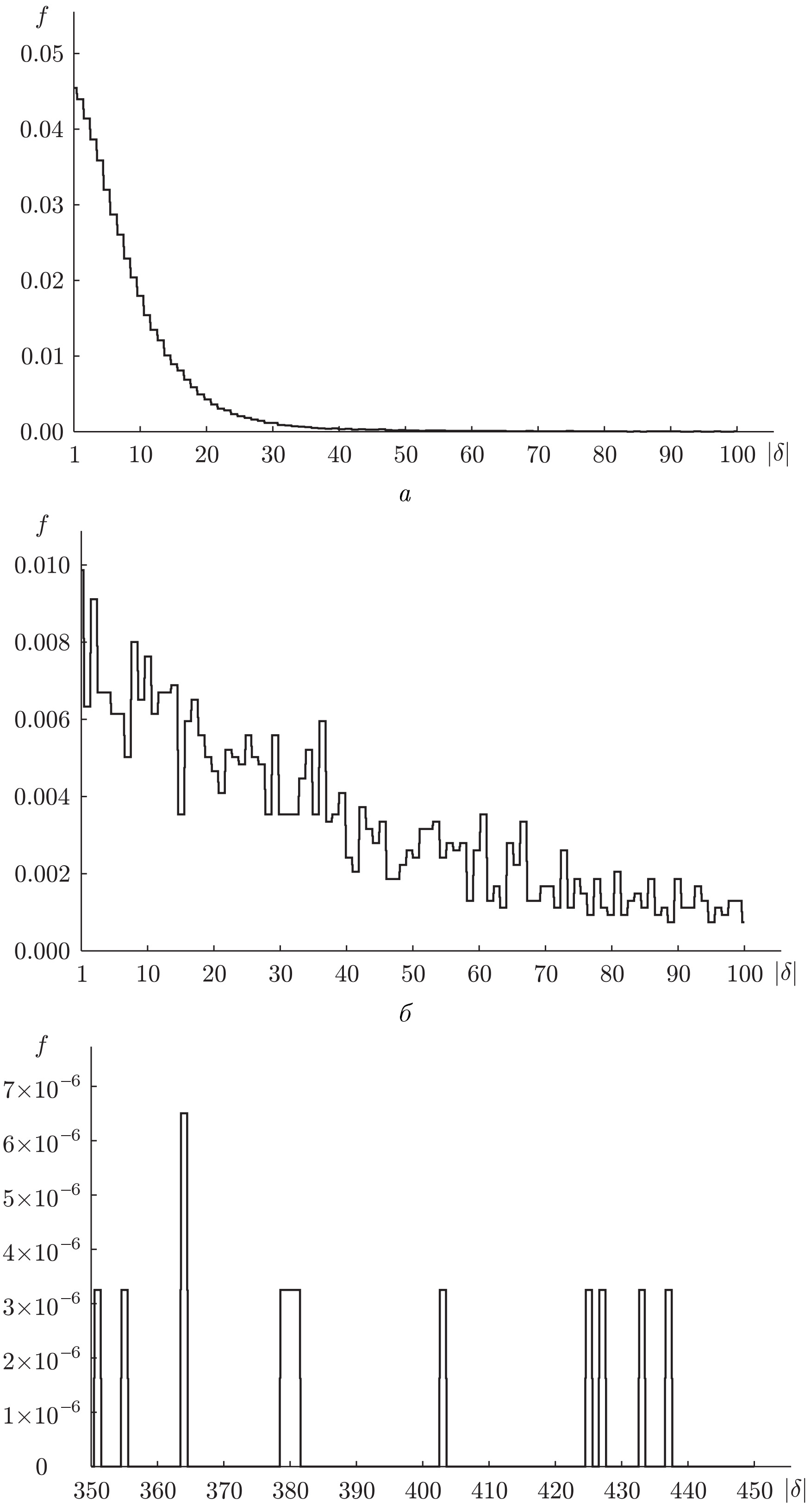


Рис. 2. Участки частотных распределений: томограмма Т2 состояние $S_2$ (*а*, *в*), томограмма Т3 состояние $S_1$ (*б*).

Будем выбирать $q(\delta|s,k)$ в небольшом семействе простых гладких функций с малым числом свободных параметров. Далее используется семейство двух видов функций, не возрастающих с ростом $|\delta|$:

$$\text{L:}\ q(\delta|s,k) = c_0 - c_1|\delta|\,, \quad c_1 \geqslant 0\,; \qquad \text{E:}\ q(\delta|s,k) = c\,e^{-\beta|\delta - \delta_0|^\gamma}\,, \quad \beta \geqslant 0\,, \tag{15}$$

где $\delta_0$ – левая граница диапазона ($\delta \geqslant \delta_0$). Поскольку функция $q(\delta|s,k)$ должна быть нормирована в диапазоне $M_k(s)$, линейная функция имеет один свободный параметр, а экспоненциальная – два.

Таким образом, для большинства пар $(s,k)$ преамбула кодового слова должна содержать: 1) значения границы $m_k(s)$ и вероятность диапазона $g(k|s)$; 2) тип аппроксимирующей функции (L или E) и значения ее свободных параметров. Нетрудно показать, что такая преамбула увеличивает избыточность менее чем на 0.01 бт/п. В п. 6.2 эта оценка уточнена.

## 6. ВЫБОР ДИАПАЗОНОВ И КОДОВЫХ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Уточним общую идею совместного выбора диапазонов и функций $q(\delta|s,k)$, описанную в п. 5.3, для разных ситуаций.

### *6.1. Экспериментальные результаты*

Границы области фона практически фиксированы, и $f(0|s_0) = 0.997\,315$ для всех шести томограмм. Все $\delta \geqslant 0$, и для T1 – T6 все $\delta > 0$ с $f(\delta|s_0) > 0$ лежат в интервалах небольшой длины $[35, 141]$, $[14, 87]$, $[1, 182]$, $[1, 147]$, $[13, 38]$ и $[1, 36]$, соответственно. Поэтому симметризация *не нужна*, и используются только диапазоны $M_0(s_0) = [0]$ (см. п. 5.3) и $M_1(s_0) = [1, m_1(s_0)]$, где $m_1(s_0)$ – правый край приведенного выше интервала для рассматриваемой томограммы. Поскольку вероятность $f(1|s_0) = 1 - f(0|s_0) = 0.002\,685$ известна, ее не нужно описывать в преамбуле томограммы. Для всех $d > 0$ распределения $\{f(\delta|s_d)\}$ симметризованы, $\mu(s_d) = 3$, и в целом имеем

$$r(Q|G) = f(1|s_0)\,r(q|s_0,1) + \sum_{d=1}^{3} f(s_d)\,r(q|g,s_d)\,; \tag{16}$$

величины $r(q|g,s_d)$, $d > 0$, определены в (14).

Табл. 3 – 5 содержат данные для одной томограммы из каждой пары(для $s_0$ и $k = 1$ приведены $f(1|s_0)$, а не $g(1|s_0)$). Данные для остальных томограмм вычислены, но не приведены в целях экономии места. Для всех томограмм в сводной табл. 6 приведены значения компонент избыточности. Первый параметр $\alpha \geqslant 1$ функции $q(\delta|s_d,k)$ – отношение ее значений на левом и правом краях $M_k(s_d)$, а второй (для E) – значение $\gamma \in [0.001,\ 3.999]$ (см. (15)). Описание параметра $\alpha$ – три цифры и, в скобках, число цифр перед точкой (если оно равно четырем, то к трем цифрам справа добавляется нуль). Поэтому $100\,(1) = 1.00 \leqslant \alpha \leqslant 9990 = 999\,(4)$. Для каждого $d$ жирным шрифтом приведены значения $r(q|g,s_d)$ (см. (14) и (16)).

Выбранные способы описания оптимальных $\alpha = \alpha^*$ и $\gamma = \gamma^*$, включая замену $\alpha^* > 9990$ для $M_3(s_3)$ томограмм T1, T2 и T3 на 9990 (при этом $\gamma^*$ уменьшается) и $\gamma^* < 0.001$ для $M_1(s_0)$ томограммы T6 на 0.001 (при этом $\alpha^*$ становится больше), увеличивают $r(Q|G)$ менее чем на $5 \cdot 10^{-6}$. Поскольку такими увеличениями можно пренебречь, другие способы описания параметров не рассматривались.

Точность описания вероятностей, избыточностей и их произведений – $10^{-6}$, так как некоторые вероятности меньше $10^{-4}$ (например, $g(3|s_2) = 0.000\,062$ для T2), определение оптимальных $\alpha = \alpha^* \leqslant 9990$ и/или $\gamma^* \geqslant 0.001$ требует вычисления избыточности с точностью до $10^{-6}$ бт/п, произведения в последнем столбце нередко меньше $10^{-3}$.

**Таблица 3.** Характеристики аппроксимаций для T1

| $d$ | $g(s_d)$ | $k$ | $m_k$ | $g(k\|s_d)$ | функция $q(\delta\|s_d,k)$ | | | $r(q\| g,s_d,k)$ | $g(\cdot)\cdot r(\cdot)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.210 278 | 1 | 141 | 0.002 685 | L | 369 (2) | — | 2.549 927 | 0.006 847 |
| | | | | | | | | | **0.006 847** |
| 1 | 0.028 015 | 1 | 20 | 0.440 428 | E | 500 (2) | 1.400 | 0.001 317 | 0.000 580 |
| | | 2 | 45 | 0.009 259 | E | 117 (2) | 0.829 | 0.112 421 | 0.001 041 |
| | | 3 | 137 | 0.001 906 | L | 170 (2) | — | 1.648 920 | 0.003 143 |
| | | | | | | | | | **0.009 528** |
| 2 | 0.615 376 | 1 | 30 | 0.463 098 | E | 150 (3) | 1.267 | 0.002 289 | 0.001 060 |
| | | 2 | 234 | 0.009 187 | E | 821 (3) | 0.561 | 0.082 429 | 0.000 757 |
| | | 3 | 1183 | 0.000 118 | E | 423 (4) | 0.808 | 2.852 807 | 0.000 337 |
| | | | | | | | | | **0.004 308** |
| 3 | 0.099 632 | 1 | 80 | 0.462 803 | E | 790 (2) | 1.465 | 0.006 278 | 0.002 906 |
| | | 2 | 309 | 0.026 170 | E | 168 (2) | 0.622 | 0.144 617 | 0.003 785 |
| | | 3 | 1271 | 0.002 297 | E | 999 (4) | 0.547 | 1.213 262 | 0.002 787 |
| | | | | | | | | | **0.018 956** |
| 4 | 0.046 700 | 1 | 150 | 0.317 677 | L | 100 (1) | — | 0.036 878 | 0.011 715 |
| | | 2 | 400 | 0.178 280 | E | 152 (2) | 2.220 | 0.057 806 | 0.010 306 |
| | | 3 | 910 | 0.002 859 | E | 264 (3) | 0.409 | 2.202 466 | 0.006 297 |
| | | | | | | | | | **0.056 636** |

**Таблица 4.** Характеристики аппроксимаций для T3

| $d$ | $g(s_d)$ | $k$ | $m_k$ | $g(k\|s_d)$ | функция $q(\delta\|s_d,k)$ | | | $r(q\| g,s_d,k)$ | $g(\cdot)\cdot r(\cdot)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.210 278 | 1 | 182 | 0.002 685 | E | 596 (2) | 0.119 | 0.888 540 | 0.002 386 |
| | | | | | | | | | **0.002 386** |
| 1 | 0.010 250 | 1 | 70 | 0.293 264 | E | 435 (1) | 1.020 | 0.033 084 | 0.009 702 |
| | | 2 | 165 | 0.077 224 | E | 576 (1) | 1.204 | 0.169 078 | 0.013 057 |
| | | 3 | 540 | 0.009 304 | E | 460 (2) | 0.476 | 2.573 357 | 0.023 943 |
| | | | | | | | | | **0.093 404** |
| 2 | 0.602 440 | 1 | 170 | 0.488 191 | E | 178 (3) | 1.353 | 0.001 910 | 0.000 932 |
| | | 2 | 500 | 0.006 487 | E | 483 (2) | 0.723 | 0.118 028 | 0.000 766 |
| | | 3 | 1323 | 0.000 294 | E | 197 (4) | 0.900 | 1.901 680 | 0.000 559 |
| | | | | | | | | | **0.004 514** |
| 3 | 0.130 596 | 1 | 170 | 0.453 337 | E | 134 (2) | 1.828 | 0.005 591 | 0.002 535 |
| | | 2 | 500 | 0.039 433 | E | 380 (2) | 0.823 | 0.091 538 | 0.003 610 |
| | | 3 | 1521 | 0.004 396 | E | 999 (4) | 1.160 | 1.111 250 | 0.004 885 |
| | | | | | | | | | **0.022 060** |
| 4 | 0.046 436 | 1 | 200 | 0.262 795 | L | 100 (1) | — | 0.022 354 | 0.005 868 |
| | | 2 | 600 | 0.221 802 | E | 670 (1) | 1.145 | 0.060 146 | 0.013 341 |
| | | 3 | 1048 | 0.014 335 | E | 117 (4) | 1.403 | 0.628 694 | 0.009 012 |
| | | | | | | | | | **0.056 442** |

Вряд ли все приведенные результаты оптимальны: некоторые их них улучшались несколько раз. Но все они определяют *достижимые* верхние границы избыточности.

Проведенные расчеты позволяют сформулировать ряд рекомендаций.

**Таблица 5.** Характеристики аппроксимаций для Т6

| $d$ | $g(s_d)$ | $k$ | $m_k$ | $g(k\|s_d)$ | функция $q(\delta\|s_d,k)$ | | | $r(q\|\,g,s_d,k)$ | $g(\cdot)\cdot r(\cdot)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.210 278 | 1 | 36 | 0.002 685 | E | 438 (3) | 0.001 | 0.151 609 | 0.000 407 |
| | | | | | | | | | **0.000 407** |
| | | 1 | 10 | 0.417 372 | E | 149 (3) | 1.390 | 0.001 435 | 0.000 599 |
| 1 | 0.051 846 | 2 | 39 | 0.007 946 | E | 500 (1) | 0.209 | 0.226 988 | 0.001 804 |
| | | 3 | 320 | 0.001 656 | E | 450 (3) | 0.722 | 1.931 304 | 0.003 198 |
| | | | | | | | | | **0.011 202** |
| | | 1 | 10 | 0.414 660 | E | 703 (2) | 1.390 | 0.000 795 | 0.000 330 |
| 2 | 0.536 312 | 2 | 180 | 0.018 714 | E | 457 (3) | 0.496 | 0.028 440 | 0.000 532 |
| | | 3 | 399 | 0.000 295 | E | 331 (1) | 1.072 | 1.659 383 | 0.000 486 |
| | | | | | | | | | **0.002 696** |
| | | 1 | 25 | 0.358 866 | E | 478 (1) | 1.451 | 0.007 648 | 0.002 745 |
| 3 | 0.092 033 | 2 | 150 | 0.119 208 | E | 203 (2) | 0.592 | 0.022 753 | 0.002 712 |
| | | 3 | 405 | 0.009 388 | E | 213 (2) | 0.449 | 0.484 080 | 0.004 545 |
| | | | | | | | | | **0.020 004** |
| | | 1 | 35 | 0.154 547 | L | 100 (1) | — | 0.004 990 | 0.000 771 |
| 4 | 0.109 531 | 2 | 190 | 0.281 719 | E | 609 (1) | 1.063 | 0.008 534 | 0.002 403 |
| | | 3 | 435 | 0.061 749 | E | 765 (2) | 1.773 | 0.058 065 | 0.003 586 |
| | | | | | | | | | **0.013 520** |

От расширения диапазона, вызывающего резкое увеличение избыточности, обычно следует отказываться. Например, для Т6 $r(\delta|g,s_1,1)=0.001\,435$, если $M_1(s_1)=[1,10]$ (см. табл. 5). Расширение диапазона до $[1,11]$ увеличивает избыточность до $0.002\,114$ (в 1.5 раза), поэтому нужно вернуться к диапазону $[1,10]$. Заметим, что при расширении диапазона избыточность может уменьшаться, а при сужении – увеличиваться.

В последнем диапазоне $m_{\mu(s)}$ – минимальное натуральное число, такое что $f(\delta|s)=0$ для всех $|\delta|>m_{\mu(s)}$. Действительно, в противном случае значение оптимальной $q(\delta|s,k)$ может быть равно или близко к нулю при $\delta=m_k(s)$: не имеет смысла выбирать $q[m_k(s)\,|s,k]>0$, уменьшая общую кодовую вероятность других $\delta\in M_k(s)$. В результате $\alpha^*$ может быть сколь угодно велико.

Для невозрастающих по $|\delta|$ функций $q(\delta|s,k)$ (как в (15)) значения $\alpha^*$ нередко велики, если вероятности в диапазоне сильно “перекошены”. Это означает, что сумма вероятностей в малой левой части диапазона много больше, чем в остальной части. Например, для Т1 $M_3(s_3)=[310,1271]$ и $g(3|s_3)=0.002\,297$. Вероятности “поддиапазонов” [310,440] и [441,1271] равны $0.002\,440$ и $g(1271|s_3)=0.000\,057$, несмотря на то что длина первого из них – 131, а второго – 831. Поскольку $q(\delta|s,k)\geqslant q(1271|s,k)$, приходится выбирать $q(1271|s,k)\ll g(1271|s,k)$, чтобы не приписать второму поддиапазону чрезмерно большую вероятность. Отсюда получаем, что $\alpha^*=1.7\cdot10^6$.

### *6.2. Сводная таблица компонент избыточности*

Значения $r(U)$ и $r(G)$, не зависящие от диапазонов и аппроксимирующих функций, были вычислены согласно (10)–(12) для $U=\overline{U}_1$. Значения $r(Q)=r(Q|G)$ вычислялись по формулам (14) и (16) (значения $g(s)$ содержатся во втором столбце табл. 3 – 5, а значения $r(q|g,s)$ – в последнем столбце, жирным шрифтом). Результаты вычислений сведены в табл. 6 (в последней строке – сумма трех компонент).

**Таблица 6.** Компоненты избыточности

| | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(U)$ | 0.0199 | 0.0171 | 0.0048 | 0.0004 | 0.0012 | 0.0176 |
| $r(G)$ | 0.0061 | 0.0037 | 0.0100 | 0.0101 | 0.0074 | 0.0098 |
| $r(Q)$ | 0.0089 | 0.0066 | 0.0097 | 0.0106 | 0.0075 | 0.0055 |
| $\Sigma$ | 0.0349 | 0.0274 | 0.0245 | 0.0211 | 0.0161 | 0.0329 |

В заключение определим дополнительное увеличение избыточности из–за сведений, помещаемых в преамбуле сжатого описания томограммы и необходимых для ее восстановления (см., например, конец п. 5.3).

На детальное описание типа (класса) ткани, при котором, например, T5 и T6 могут быть отнесены к разным классам, достаточно 6 бит.

На описание $m_k$ и $g(k|s)$ достаточно 12 и 18 бит, соответственно. В первом случае это очевидно, а во втором следует из того, что $g(k|s)$, как и каждая вероятность в (8), – отношение двух целых чисел, не превышающих $n = 2^{18}$.

Тип функции (L или E) определяет один бит. Поскольку $\alpha_{\max} = 999\,(4) = 9990$, на описание $\alpha$ достаточно 12 бит: 2 и 10 бит тратятся на описание положения точки (от 1 до 4) и трех десятичных цифр, соответственно. Точно так же 2 и 10 бит нужны, чтобы описать целую часть $\gamma$ (от 0 до 3) и три десятичных разряда после запятой. Следовательно, на описание аппроксимирующей функции нужно не больше 25 бит, а на все сведения об одном диапазоне – не более 55 бит.

Таким образом, на полное описание 12 диапазонов 4 состояний с $d > 0$ достаточно 660 бит. К ним нужно добавить 37 бит на сведения об единственном диапазоне распределения $\{f(\delta|s_0)\}$ (вероятность $f(1|s_0)$ известна) и 6 бит на описание типа ткани. Разделив полученные 703 бита на $n = 262\,144$ (число элементов томограммы), получим, что дополнительная избыточность меньше 0.0027 бт/п. Эту величину нужно прибавить к суммарным избыточностям (числам в последней строке табл. 6).

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные особенности описанного выше и экспериментально проверенного (на компьютерных томограммах) алгоритма сжатия изображений без искажений – качественно обоснованные процедуры укрупнения состояний и разбиения области значений ошибки предсказания на диапазоны.

Множество укрупненных состояний однозначно определяет нижнюю границу скорости кодирования – квазиэнтропию последовательности ошибок предсказания. Приведенные в п. 6.2 данные показывают, что при оптимальном выборе всех параметров алгоритма скорость кодирования превышает квазиэнтропию менее чем на 0.038 бт/п, или на 0.9%. Таким образом, потенциальные возможности сжатия для выбранного множества укрупненных состояний реализованы практически полностью. Улучшить результаты (если это возможно) можно только переходом к другому типу состояний.

Малая избыточность определяет наличие резерва – возможности увеличения числа состояний и диапазонов, уменьшения точности описания параметров аппроксимирующих функций, и т. д. Но сложность реализации алгоритма, лишь вскользь упоминавшаяся выше, в значительной степени зависит от числа неустойчивых параметров. Впрочем каждый параметр можно считать устойчивым ценой увеличения избыточности кодирования (для порогов это $r(U)$, см. (9)). Все эти вопросы – тема отдельного исследования.

Наличие большого числа свободных параметров и аппроксимирующих функций придает описанному выше алгоритму сжатия значительную гибкость и обеспечивает возможность адаптации к разным типам томограмм и некоторым другим видам изображений. Приведенные в разделе 6 экспериментальные результаты внушают уверенность в том, что эффективность сжатия будет достаточно высокой и в этих случаях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. H. Witten, R. M. Neal, and J. G. Cleary. Arithmetic Coding for Data Compression. *Commun. of the ACM*, 1987, vol. 30, no. 6, pp. 520–540.
2. Yu. M. Shtarkov and V. F. Babkin, Combinatorial Encoding for Discrete Stationary Sources. *2nd Internat. Symp. on Inform. Theory. Tsahkadsor, Armenia, USSR, 1971*, Akadémiai Kiadò, Budapest, 1973, pp. 249–256.
3. R. E. Krichevsky and V. K. Trofimov The Performance of Universal Encoding. *IEEE Trans. Inform. Theory,* New York, 1981, vol. IT-27, no. 2, p. 199–207.
4. Ю. М. Штарьков. Универсальное последовательное кодирование отдельных сообщений. *Пробл. передачи информ.* 1987, т. 23, № 3, с. 3–17.
5. O. Franceschi, R. Forchheimer, and Yu. M. Shtarkov. An Adaptive Source Coding Method for Still Images. *Picture Coding Symposium. Programme and Abstracts.* Torino, Italy, Sept. 1988, pp. 6.5:1–2.

*Статью представил к публикации член редколлегии Н. А. Кузнецов*