Информационные процессы, Том 8, № 4, 2008, стр. 301–304.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ M/G/1—EPS

S.F.Yashkov

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН
Москва, Россия
E-mail:yashkov@iitp.ru
Получена 22.12.2008

Аннотация—Приводится новое доказательство одной предельной теоремы для системы M/G/1 с эгалитарным разделением процессора. Эта теорема является некоторым вариантом центральной предельной теоремы для производительности сервера, обрабатывающего задачи большого размера.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] (1991) впервые была доказана предельная теорема для системы M/G/1 с эгалитарным разделением процессора, являющаяся некоторым вариантом центральной предельной теоремы для модели сервера в режиме разделения времени. Доказательство в указанной статье основывалось на вероятностных методах, связанных с проверкой условий Линдеберга, изложенных в [2]. (Точные решения в [1] существенно опирались на нетривиальные аналитические методы работ [5, 6, 7].) Неполное аналитическое доказательство этой же предельной теоремы, использующее преобразования Лапласа и Фурье, было представлено в [4] (2000). Речь идет об аналоге теоремы, не получившей отражения в [6] (1987) или монографии [7] (1989), но представленной без доказательства в недавнем обзоре [8] (2007) как теорема 2.11. В настоящей заметке дается новое доказательство одного из вариантов этой предельной теоремы (см. раздел 2), использующее понятие *кумулянт*.

2. РЕЗУЛЬТАТ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим систему обслуживания M/G/1 с дисциплиной эгалитарного разделения процессора (EPS), при которой каждое из $n > 0$ из присутствующих в системе требований обслуживается одновременно с другими со скоростью $1/n$. В моменты поступлений новых требований или ухода из системы полностью обслуженных требований происходят скачки скорости обслуживания. На вход системы поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ, требуемые длительности обслуживания (длины) распределены произвольно с функцией распределения $B(x)$ (($B(0+) = 0$, $B(\infty) = 1$). Математическое ожидание этой функции распределения есть $\beta_1 < \infty$, а преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) задается как $\beta(s) = \int_{0-}^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} dB(x)$. (Напомним, что порядок момента указывается нижним индексом.) Предполагается, что система функционирует в стационарном режиме. Необходимым и достаточным условием существования стационарного режима является $\rho = \lambda\beta_1 < 1$. Пусть в момент $t = 0$ в систему прибывает требование длины u (помеченное требование). Оно застает систему в состоянии $(x_1, \ldots, x_n)$ или $n = 0$. Здесь x_i есть остаточная длина i–го обслуживающегося процессором требования. Стационарное время пребывания в системе помеченного требования (при указанном условии) обозначается как $V_n(u, x_1, \ldots, x_n)$. При снятом условии по $(x_1, \ldots, x_n)$ (условное по u) время пребывания в системе требования длины u обозначается как $V(u)$. Точные решения по стационарным распределениям введенных случайных величин (и их моментам) получены в [5] (см. также [6,7,8] в терминах двумерных преобразований Лапласа. Математическое ожидание времени пребывания требования длины u вычисляется по очень простой формуле

$$\mathbb{E}[V(u)] = \frac{u}{1-\rho}. \tag{2.1}$$

Следующая предельная теорема (среди прочих) впервые доказана в [1], используя вероятностную технику.

Теорема 2.1. *Если $\rho < 1$ и $\beta_2 < \infty$, то*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(u^{-1/2}[V_n(u, x_1, \ldots, x_n) - u(1-\rho)^{-1}] \le x\right) = \mathcal{N}^{\circ}(x), \tag{2.2}$$

где $\mathcal{N}^{\circ}(x)$ есть функция распределения нормального закона с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\rho\beta_2/(1-\rho)^3$.

Мы предпочитаем доказать похожий, но несколько отличающийся вариант этой предельной теоремы.

Теорема 2.2. *Если $\rho < 1$ и $\beta_2 < \infty$, то*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(u^{-1/2}[V(u) - u(1-\rho)^{-1}] \le x\right) = \mathcal{N}(x), \tag{2.3}$$

где $\mathcal{N}(x)$ есть функция распределения нормального закона с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\lambda\pi_2$. Здесь и далее π_j есть j–й момент стандартного периода занятости Π *в системе M/G/1.*

Доказательство. Применим Лемму 1 (см. Приложение).

$$\lim_{u\to\infty} \kappa_j\left[\frac{V(u) - \mathbb{E}[V(u)]}{u^{1/2}}\right] = \lim_{u\to\infty} \frac{\kappa_j[V(u) - \mathbb{E}[V(u)]]}{u^{j/2}} = \begin{cases} \lambda\pi_2, & j = 2, \\ 0, & j \ne 2, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\kappa_j[Y]$, $j = 1, 2, \ldots$ есть j–й момент кумулянт распределения некоторой случайной величины Y (см. Приложение).

Далее заметим, что нормальное распределение является единственным распределением, для которого $\kappa_j[\cdot] = 0$ при $j > 2$. Это завершает доказательство. □

Таким образом, Теорема 2.2 описывает диффузионный предел случайной величины $V(u)$ в системе обслуживания M/G/1—EPS при $u \to \infty$.

Не будем останавливаться на различных следствиях Теоремы 2.2.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили новое доказательство некоторой предельной теоремы для системы обслуживания M/G/1 с дисциплиной эгалитарного разделения процессора. Доказанное утверждение является одним из вариантов центральной предельной теоремы для производительности сервера, обрабатывающего задачи большого размера в компьютерных сетях, и характеризует диффузионный предел стационарного времени пребывания в системе требования длины u при $u \to \infty$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кумулянты

Понятие кумулянты (или моментов кумулянт) очень редко встречается в теории очередей, однако в теории больших уклонений или в статистике такое понятие используется довольно часто, см., например, Феллер [2]. Многие факты, изложенные ниже, содержатся также в [3].

Определение 1. Моменты кумулянт $\kappa_j[Y]$, $j = 1, 2, \dots$ распределения случайной величины Y задаются в терминах моментов этой случайной величины, т.е. в терминах $\mathbb{E}[Y^j]$ следующим образом:

$$\mathrm{e}^{\kappa_1[Y]x + \frac{\kappa_2[Y]x^2}{2!} + \cdots} = 1 + \mathbb{E}[Y]x + \frac{\mathbb{E}[Y^2]x^2}{2!} + \dots \tag{A.1}$$

Из Определения 1 вытекает, что кумулянты распределения случайной величины Y можно получить из производящей функции кумулянт

$$\mathfrak{K}_Y(s) = \ln(\mathfrak{L}_Y(s)), \tag{A.2}$$

где $\mathfrak{L}_Y(s)$ есть преобразование Лапласа случайной величины Y.

Таким образом,

$$\kappa_j[Y] = (-1)^j \lim_{s\to 0} \mathfrak{K}_Y^{(j)}(s).$$

Кумулянты любого распределения вероятностей можно вычислить из начальных моментов следуюшим образом:

$$\kappa_i[X] = \mathbb{E}[Y^i] - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} \mathbb{E}[Y^j]\kappa_{i-j}[Y], \tag{A.3}$$

где $\kappa_1[Y] = \mathbb{E}[Y]$.

Из (A.3) вытекает, что математическое ожидание равно первой кумулянте, а дисперсия равна второй кумулянте. Третий центральный момент есть третья кумулянта. Заметим, что кумулянты порядка выше третьего отличаются от центральных и начальных моментов.

Полезны, в частности, следующие свойства кумулянт. Пусть C есть константа, тогда

$$\kappa_1[Y + C] = \kappa_1[Y] + C \quad \text{при } j > 1.$$

$$\kappa_j[Y + C] = \kappa_j[Y].$$

Если случайные величины Y и Z независимы, то

$$\kappa_j[Y + Z] = \kappa_j[Y] + \kappa_j[Z].$$

Лемма 1. *Если $\mathbb{E}[B^j] < \infty$, то*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\kappa_j[V(u)]}{u} = \mathbf{1}_{(j=1)} + \lambda\mathbb{E}[\Pi^j], \tag{A.4}$$

где Π есть случайная величина распределения стандартного периода занятости в консервативной системе обслуживания $M/G/1$.

Доказательство. См. [7, Гл. 2]. Заметим, что Лемма 1 не выделена в [7] как нумерованное утверждение типа леммы или теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grishechkin, S.A., The Crump–Mode–Jagers Branching Processes as a Method for Studying the Processor-Sharing System M/G/1, *Theor. Prob. Appl.*, 1991, vol. 36, no. 1, pp. 19–35.
2. Feller, W., *Introduction to Probability Theory and its Applications*, New York: Wiley, 1971, vol. 2 (2nd edition).
3. Kendall, M., *The Advanced Theory of Statistics,* London: Griffin, 1945.
4. Ward, A. and Whitt, W., Predicting Response Times in Processor-Sharing Queues, in *Proc. Fields Institute Conf. on Commun. Networks*, Glynn, P., MacDonald, D., and Turner, S., Eds., Providence: AMS, 2000, pp. 1–29.
5. Yashkov, S.F., A derivation of response time distribution for an M/G/1 processor-sharing queue. *Probl. of Control and Information Theory*, 1983, vol. 12, no. 2, pp. 133–148.
6. Yashkov, S.F., Processor-Sharing Queues: Some Progress in Analysis (Invited paper), *Queueing Syst.*, 1987, vol. 2, no. 1, pp. 1–17.
7. Yashkov S.F., *Analysis of Queues in Computers* (in Russian with English Summary). Moscow: Radio i Svyaz, 1989 (review in *Math. and Comput. in Simulation*, 1991, vol. 33, no. 2, pp. 177–178).
8. Yashkov, S.F. and Yashkova, A.S., Processor sharing: A survey of the mathematical theory, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, No. 9, pp. 1662–1731.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И.Венец