

## Динамическое управление доступом при активных пользователях

А. Б. Миллер

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*

Поступила в редколлегию 24.02.09

**Аннотация**—В данной работе предложена динамическая модель управления доступом к ресурсам при активных пользователях, и решена задача оптимального управления доступом, изложены основные выводы, вытекающие из проведенного исследования.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет были сделаны огромные шаги на пути внедрения аналитических моделей в методы управления в Интернете. Ключом к этим успехам была разработка методов детального моделирования эффектов возникновения перегрузок, которые отражали информацию о нарушении нормального функционирования сети. Говоря более точно, предполагается, что каждое соединение в сети имеет возможность оценивать (измерять) свою нагрузку и кроме того, все соединения имеют доступ к оценкам текущих значений нагрузок всех соединений, связанных с траекторией прохождения сообщений. Такие предположения неявным образом реализуются во многих вариантах ныне существующих ТСП (Transmission Control Protocol).

Существует необходимость проведения превентивного управления очередью с целью сигнализации о перегрузке сети до фактического переполнения очереди и контроля за размером очереди с целью снижения задержки обработки пакетов [1]. Алгоритм произвольного раннего обнаружения (Random Early Detection - RED) представляет собой алгоритм предотвращения перегрузки, предложенный Салли Флойдом (Sally Floyd) и Ваном Якобсоном (Van Jacobson) [9]. Данный механизм активного управления очередью обладает существенными преимуществами по сравнению с традиционным механизмом “отбрасывания хвоста”. Механизм RED использует превентивный подход к предотвращению перегрузки сети. Вместо ожидания фактического переполнения очереди, RED начинает отбрасывать пакеты с ненулевой вероятностью, когда средний размер очереди превысит определенное минимальное пороговое значение. Вероятностный подход к отбрасыванию пакетов позволяет быть уверенным в том, что механизм RED отбросит пакеты всего лишь нескольких произвольно выбранных потоков, тем самым помогая избежать эффекта глобальной синхронизации. Напомним, что отбрасывание пакета представляет собой сигнал ТСП-источнику о необходимости уменьшить интенсивность передаваемого трафика для соответствующего потока, что достигается за счет перезапуска алгоритма медленного старта. Если средний размер очереди будет продолжать увеличиваться несмотря на отбрасывание произвольных пакетов, то это приведет к линейному росту вероятности отбрасывания. В соответствии с механизмом RED вероятность отбрасывания пакетов растет прямо пропорционально увеличению среднего размера очереди от минимального до максимального порогового значения. Средний размер очереди строго ограничен максимальным пороговым значением, поскольку в этом случае вероятность отбрасывания пакетов достигает своего наибольшего значения (100 процентов). Другими словами, главная цель механизма произвольного раннего обнаружения (RED) заключается в минимизации среднего размера очереди, а значит,

и общей задержки трафика. Определение вероятности отбрасывания пакета базируется на взвешенном экспоненциальном значении среднего размера очереди. Это позволяет избежать предвзятого отношения механизма RED к характеризующимся кратковременными всплесками потокам трафика в условиях продолжительной перегрузки сети. Если же средний размер очереди весьма невелик и находится ниже минимального порогового значения, механизм RED не способен обеспечить существенного преимущества по сравнению с традиционными механизмами управления очередью. С другой стороны, при затяжном периоде перегрузки сети поведение механизма RED, несмотря на длинную очередь и высокое максимальное пороговое значение, аналогично поведению классического механизма "отбрасывания хвоста". Таким образом, основное предназначение механизма RED заключается в сглаживании временных всплесков трафика и предупреждении длительной перегрузки сети посредством уведомления источников трафика о необходимости снижения интенсивности передачи информации. Если источники проявят способность к взаимодействию и одновременно уменьшат интенсивность передаваемого трафика, это поможет предотвратить перегрузку сети. В противном случае средний размер очереди достаточно скоро достигнет максимального порогового значения, что приведет к отбрасыванию всех поступающих пакетов. Ниже перечислены некоторые из основных целей механизма раннего произвольного обнаружения:

- Минимизация амплитуды колебаний задержки пакетов путем контроля среднего размера очереди.
- Предотвращение эффекта глобальной синхронизации TCP-трафика.
- Обеспечение непредвзятого обслуживания трафика, характеризующегося кратковременными всплесками.
- Строгое ограничение максимального среднего размера очереди.

Динамическое управление доступом предполагает, что вероятность отклонения заявок не является фиксированной величиной, а зависит от состояния роутера (т.е. от длины очереди) и величин потоков входящих заявок. Один из подходов к решению проблемы управления доступом реализован в протоколе RED, в котором вероятность доступа зависит от средней длины очереди, оцениваемой по прошлым измерениям. Этот подход следует, рассматривать однако, лишь как суб-оптимальный, поскольку он не использует всей имеющейся информации. Более общий подход, основанный на теории управления Марковскими цепями, использует описание управляемой цепи в терминах стохастических дифференциальных уравнений [3] и позволяет сформулировать задачу оптимизации входящего потока как задачу оптимального управления [4].

## 2. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим систему массового обслуживания, управляемую посредством ограничения входящего потока. Модель основана на результатах работ [3], [4]. Предполагаем, что поток заявок предстает собой считающий процесс с детерминированной величиной  $\lambda(t) \geq 0$ . Число заявок в системе ограничено некоторой константой  $M < \infty$ , а интенсивность обслуживания есть константа  $\mu > 0$ . Управление  $u(t) \in [0, 1]$  есть вероятность принять заявку в момент времени  $t \in [0, T]$ . Таким образом, часть приходящих заявок может быть отклонена, и критерий эффективности функционирования учитывает число отклоненных заявок и среднее время нахождения в очереди для принятых заявок.

Пусть состояние  $M(t)$  - это число заявок в системе. Общее число состояний есть  $M + 1$ , а соответствующее пространство состояний  $S$  состоит из единичных векторов  $\{e_0, \dots, e_M\}$  в пространстве размерности  $M + 1$ .

Представление множества состояний в виде совокупности векторов  $\{e_0, \dots, e_M\}$  позволяет свести описание поведения системы к описанию в числовых терминах и с помощью стохастических дифференциальных уравнений вместо зависящих от управления переходных вероятностей. Заметим, что событие  $\{X_t = e_i\} = \{M_t = i\}$  означает, что в момент времени  $t$  система находится в  $i$ -ом состоянии и определим вектор  $X_t$  с компонентами компонентами  $X_t^i = I\{X_t = e_i\}$ , где  $I\{A\}$  есть индикатор события  $A$ . Поскольку в каждый момент времени только один из индикаторов отличен от нуля и равен 1, то в каждый момент времени вектор  $X_t$  является одним из единичных векторов пространства размерности  $R^{M+1}$ , и выполнены соотношения

$$X_t = \begin{pmatrix} I\{X_t = e_0\} \\ I\{X_t = e_1\} \\ \dots \\ I\{X_t = e_M\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\{M(t) = 0\} \\ I\{M(t) = 1\} \\ \dots \\ I\{M(t) = M\} \end{pmatrix},$$

$$E(X_t) = \begin{pmatrix} E(I\{X_t = e_0\}) \\ E(I\{X_t = e_1\}) \\ \dots \\ E(I\{X_t = e_M\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_t = e_0) \\ P(X_t = e_1) \\ \dots \\ P(X_t = e_M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(M(t) = 0) \\ P(M(t) = 1) \\ \dots \\ P(M(t) = M) \end{pmatrix},$$

где  $E$  - символ математического ожидания.

Можно показать, что если управление в системе зависит лишь от текущего числа заявок, то модель управления может быть описана в терминах управляемой Марковской цепи с  $M + 1$  состоянием и матрицей интенсивностей переходов  $A(t, u)$ , имеющей размерность  $(M + 1) \times (M + 1)$  и представимой в виде

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} -\lambda(t)u & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(t)u & -\mu - \lambda(t)u & \mu & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(t)u - \mu - \lambda(t)u & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda(t)u & -\mu \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где управление  $u \in [0, 1]$ .

Доказательство этого утверждения следует работе [4]. Действительно, пусть  $M(t) \in \{0, \dots, M\}$  - текущее количество заявок в системе. Это число меняется в зависимости от двух потоков: потока поступающих заявок и потока обработанных заявок. Для простоты предполагается, что поток поступающих заявок формирует считающий процесс с интенсивностью  $\lambda(t) \geq 0$ . Число заявок  $N_t^a$ , поступающих на вход системы с момента времени  $t = 0$  до настоящего времени может быть представлено следующим образом [3]

$$N_t^a = \int_0^t \lambda(s)ds + M_t^a,$$

где  $M_t^a$  есть интегрируемый с квадратом мартингал с квадратичной вариацией

$$\langle M^a \rangle_t = \int_0^t \lambda(s)ds.$$

Если интенсивность обслуживания - постоянная величина, тогда поток обработанных заявок есть считающий процесс с интенсивностью, определяемой состоянием  $\mu I\{M(t) > 0\}$ , где  $I\{\cdot\}$

- индикаторная функция (то есть, если число заявок в системе равно 0, то и обслуживание не происходит). Таким образом, выражение для потока обработанных заявок  $N_t^d$  имеет следующий вид

$$N_t^d = \int_0^t \mu I\{M(s) > 0\} ds + M_t^d,$$

где  $M_t^d$  есть интегрируемый с квадратом мартингал с квадратичной вариацией

$$\langle M^d \rangle_t = \int_0^t \mu I\{M(s) > 0\} ds.$$

Мы предполагаем, что  $N_t^a$  и  $N_t^d$  независимы и не имеют скачков в одни и те же моменты времени. Это значит, что взаимная квадратичная вариация  $\langle M^a, M^d \rangle_t = 0$ .

Как показано в работе П. Бремю [6] управление доступом может быть представлено как управление интенсивностью входящего потока. Если  $W(t)$  - управление доступом, т.е. случайная величина, принимающая одно из значений  $\{0, 1\}$ , то тогда управляемый входящий поток есть

$$N_t^{a,c} = \sum_{\tau \leq t} I\{M(\tau) < M\} I\{W(\tau) = 1\} \Delta N_\tau^a,$$

и

$$E\{I\{W(t) = 1\} I\{M(t) < M\} | \mathcal{F}_t^X\} = u(t) I\{M(t) < M\} = u(t) I\{X_t \neq e_M\}, \quad (2)$$

и

$$E\{N_t^{a,c} | \mathcal{F}_t^X\} = \int_0^t \lambda(s) u(s) ds + M_t^{d,X}, \quad (3)$$

где  $M_t^{d,X}$  - это  $\mathcal{F}_t^X$  интегрируемый с квадратом мартингал, и  $u(t) \in [0, 1]$  - это  $\mathcal{F}_t^X$  предсказуемый процесс. Далее имеем

$$\Delta M_t = \Delta N_t^{a,c} - \Delta N_t^d,$$

и так как

$$I\{M(t) = i\} = I\{X_t = e_i\},$$

то

$$\Delta X_t = A^+ X_{t-} \Delta N_t^{a,c} + A^- X_{t-} \Delta N_t^d,$$

где  $(M+1) \times (M+1)$  матрицы  $A^+, A^-$  имеют вид

$$A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Затем, используя выражение

$$X_t = X_0 + \sum_{\tau \leq t} \Delta X_\tau,$$

и принимая во внимание, что  $N_t^{a,c}$  и  $N_t^d$  - это считающие процессы, мы получаем

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \sum_{\tau \leq t} [A^+ X_{\tau-} \Delta N_{\tau}^{a,c} + A^- X_{\tau-} \Delta N_{\tau}^d] \\ &= X_0 + \int_0^t A^+ X_{s-} dN_s^{a,c} + \int_0^t A^- X_{s-} dN_s^d. \end{aligned}$$

Наконец, мы должны подставить мартингалное представление  $N_t^{a,c}$  и  $N_t^d$  в написанное ранее выражение с учетом условного математического ожидания для  $\mathcal{F}_t^X$ . В итоге получаем

$$X_t = X_0 + \int_0^t [A^+ \lambda(s) u(s) + A^- \mu] X_s ds + M_t^u = \int_0^t A(s, u(s)) X_s ds + M_t^u, \quad (4)$$

где  $M_t^u$  есть интегрируемый с квадратом  $\mathcal{F}_t^X$  мартингал с квадратичной вариацией

$$\langle M^u \rangle_t = \int_0^t [A^+ X_s X_s^* (A^+)^* \lambda(s) u(s) + A^- X_s X_s^* (A^-)^* \mu] ds.$$

Как показано в работе [4] квадратичная вариация равна

$$\begin{aligned} \langle M^u \rangle_t &= \int_0^t \text{diag} (A(s, u_s) X_s) ds \\ &\quad - \int_0^t [A(s, u_s) (\text{diag} X_s) + (\text{diag} X_s) A^*(s, u_s)] ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\text{diag} Z$  - диагональная матрица с элементами  $\text{diag} (Z)_{ii} = Z_i$ , что означает, что процесс  $X_t$  есть управляемый Марковский процесс с матрицей интенсивностей переходов  $A(t, u)$  [3].

### 3. ФОРМИРОВАНИЕ ВХОДНОГО ПОТОКА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ ДОСТУПОМ И АКТИВНЫХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯХ

Будем использовать динамическую модель предоставления ресурсов к обслуживанию, в которой поток на входе роутера будет зависеть от текущего значения вероятности  $P(t, M(t))$ , полагая, что роутер использует управление Марковского типа и имеет информацию о функциях полезности пользователей. Иными словами роль  $q(M(t), U(t))$  играет  $P(t, M(t))$ . Для простоты будем полагать, что  $N$  пользователей используют функции полезности

$$f_i(v, t) = -\frac{a_i}{v} - \lambda_0 v - v P(t, M(t)), \quad i = 1, \dots, N$$

и в каждый момент времени имеют информацию о текущем значении  $P(t, M(t))$ , устанавливаемом роутером.

Тогда максимизируя свою функцию полезности,  $i$ -й пользователь устанавливает оптимальное значение интенсивности потока, равное

$$u_i^{opt}(t, P(t, M(t))) = \arg \max_{0 < v < \infty} f_i(v) = \sqrt{\frac{a_i}{\lambda_0 + P(t, M(t))}}.$$

Тогда общее значение интенсивности управляемого входного потока равно

$$\lambda(t) = U(t, P) = \sum_{i=1}^N u_i^{opt}(t, P) = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{a_i}}{\sqrt{\lambda_0 + P}} = \frac{C}{\sqrt{\lambda_0 + P}},$$

где

$$C = \sum_{i=1}^N \sqrt{a_i},$$

постоянная величина, которая характеризует всю совокупность пользователей.

*Замечание 1.* Практический интерес представляет случай, когда  $C = C(t)$ , что позволяет учесть временную (суточную или сезонную) зависимость потребности в ресурсах. Этот случай рассматривается так же, как и описанный ниже случай постоянной  $C$  и учитывается простой подстановкой переменной  $C(t)$  в уравнение динамического программирования. Именно так и сделано в анализируемом ниже численном примере.

Подставляя выражение для интенсивности входного потока в выражение для матрицы интенсивностей переходов  $A(t, u)$  (1) с учетом соотношений

$$\lambda(t) = \frac{C}{\sqrt{\lambda_0 + P}}, \quad u = 1 - P, \quad \lambda(t)u = \frac{C(1 - P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}, \quad (6)$$

получаем следующее выражение для матрицы интенсивностей переходов  $A(P)$  при управлении доступом в случае активных пользователей

$$A(P) = \begin{pmatrix} -\frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0+P}} & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0+P}} & -\mu - \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0+P}} & \mu & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0+P}} & -\mu - \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0+P}} & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0+P}} & -\mu \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где управление  $P \in [0, 1]$ .

*Замечание 2.* Заметим, что в данном случае  $\lambda(t)$  и элементы матрицы  $A(P)$  будут случайными величинами, зависящими от состояния очереди. Однако, поскольку это зависимость лишь от прошлого состояния (иными словами эти случайные функции предсказуемы по отношению к  $\sigma$ - алгебре  $\mathcal{F}_t^X$ ). Как показано в монографии [3], в этом случае все выводы сохраняют силу.

Данная модель может использоваться для выбора оптимального управления  $P(t) = P(t, M)$  с учетом критериев качества работы роутера-провайдера.

Далее излагается общий подход к решению задач оптимального управления Марковскими цепями [3].

## 4. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА

Оптимизационная задача состоит в минимизации некоторой функции стоимости состояний и управлений марковской цепи. Эта функция учитывает среднюю длину очереди, которая связана со средним временем обслуживания и/или ценой отклоненных заявок, т.к. они должны либо повторно встать в очередь, либо выбрать другой сервис центр. Более того, в случае фиксированного промежутка времени конечное состояние марковской цепи так же очень важно, как и в случае, когда необходимо обеспечить “рассасывание” очереди, то есть разрешить проблему перегрузки. Итак, мы рассматриваем следующий критерий качества

$$J[u(\cdot)] = \mathbf{E} \left\{ \phi_0(X_T) + \int_0^T f_0(s, u_s, X_s) ds \right\} \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad (8)$$

где

$$\phi_0(X) = \langle \phi_0, X \rangle, \quad f_0(s, u, X) = \langle f_0(s, u), X \rangle,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  знак скалярного произведения и

$$\phi_0 \in R^n,$$

$$f_0^*(s, u) = (f_0(s, u, e_1), \dots, f_0(s, u, e_n))$$

и каждая  $f_0(s, \cdot, e_i)$  - функция стоимости, когда марковская цепь находится в состоянии  $e_i$  в момент времени  $s \in [0, T]$ .

**Предположение 1.** Каждая из функций  $f_0(s, \cdot, e_i)$  непрерывна на  $[0, T] \times U$  и ограничена снизу.

*Замечание 3.* Важность терминального состояния определяется параметрами  $\phi_0 \in R^n$ , действительно

$$E(\phi_0(X_T)) = E\langle \phi_0, X_T \rangle = \sum_{i=0}^M \phi_0^i P(X_T = e_i).$$

Поэтому выбор большего значения величины  $\phi_0^i$  будет способствовать уменьшению соответствующей вероятности, что позволяет формировать заданное терминальное распределение. Например, если мы стремимся к рассасыванию очереди, то следует выбирать коэффициенты  $\phi_0^i$  при вероятностях состояний близких к  $M$  достаточно большими, а коэффициенты при остальных вероятностях значительно меньше, или вообще нулевыми.

## 5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Общий подход к решению задачи оптимального управления с помощью метода динамического программирования изложен в [7], [3]. Для общей модели, описываемой матрицей интенсивностей переходов  $A(t, u) \in R^n$ , где управление  $u \in U$ , определим функцию цены

$$V(t, X) = \inf_{u(\cdot)} J[u(\cdot) | X_t = X], \quad (9)$$

где

$$J[u(\cdot) | X_t = X] = \mathbf{E} \left\{ \phi_0(X_T) + \int_t^T f_0(s, u_s, X_s) ds \middle| X_t = X \right\}. \quad (10)$$

Согласно предположению 1 инфимум в (9) существует, и функция  $V(t, X)$  удовлетворяет следующему представлению

$$V(t, X) = \langle \phi(t), X \rangle,$$

где  $\phi(t) = (\phi^1(t), \dots, \phi^n(t))^* \in R^n$  некоторая непрерывная векторозначная функция и  $*$  - символ транспонирования.

Рассмотрим следующее уравнение (*уравнение динамического программирования*) относительно вектор-функции  $\phi(t)$

$$\langle \phi'(t), X \rangle + \min_{u \in U} [\langle \phi(t), A(t, u)X \rangle + \langle f_0(t, u), X \rangle] = 0, \quad (11)$$

с граничным условием

$$\phi(T) = \phi_0.$$

Так как функция

$$H(\phi, t, u, X) = \langle \phi, A(t, u)X \rangle + \langle f_0(t, u), X \rangle, \quad (12)$$

непрерывна относительно  $(t, u)$  и аффинна по  $\phi$ , то для любых  $(t, X) \in [0, T] \times S$  функция

$$\mathcal{H}(\phi, t, X) = \min_{u \in U} H(\phi, t, u, X)$$

Липшицева по  $\phi$ . Следующий результат следует прямо из описанных выше соображений.

*Утверждение 1.* Пусть предположение 1 выполняется. Тогда уравнение (11) имеет единственное решение на  $[0, T]$ .

*Замечание 4.* Уравнение (11) может быть записано в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\phi^i(t)}{dt} = -\mathcal{H}(\phi(t), t, e_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

которые могут быть получены посредством подстановки  $X = e_i, \quad i = 1, \dots, n$ .

Следующий результат дает характеристику оптимального управления [3], [4].

**Теорема 1.** Пусть:  $\phi(t)$  - решение системы (13), и существует  $u_0(t, X) \in U$  такое, что для каждой пары  $(t, X) \in [0, T] \times S$  величина с правой стороны уравнения (11) и функция  $H(\phi(t), t, u, X)$  достигают минимума в точке  $u_0(t, X)$ .

Тогда существует  $\hat{u}(t, X_0^t)$  в классе  $\mathcal{F}_t^X$  предсказуемых управлений, являющееся оптимальным управлением и  $V(t, X) = J[\hat{u}(\cdot) | X_t = X]$ .

Это оптимальное управление равно

$$\hat{u}(t, X_0^t) = u_0(t, X_t) = \arg \min_{u \in U} H(\phi(t), t, u, X_t).$$

## 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДОСТУПОМ

Общая модель управления доступом при активных пользователях описана выше в разделе 3. Рассмотрим некоторые типичные критерии качества.

Как было упомянуто выше критерий качества должен учитывать среднее время в очереди, которое может быть оценено следующим образом

$$J_1 = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T \frac{M(s)}{\mu} ds \right\} = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T \frac{\langle \mathbf{1}, X_s \rangle}{\mu} ds \right\},$$



где

$$\mathbf{1}^* = (0, 1, 2, \dots, M) \in R^{M+1},$$

а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - скалярное произведение.

Этот критерий имеет следующий смысл. Если интенсивность обслуживания равна  $\mu$ , то при экспоненциально распределенном времени обслуживания [5] стр. 247-248, среднее время обслуживания равно  $1/\mu$ , поэтому, если заявка поступает на вход, когда в очереди находится  $M(t)$  заявок, она будет обслужена в среднем через время  $M(t)/\mu$ .

Другой критерий, который следует принимать во внимание при оптимизации, есть среднее число принятых заявок, которое может быть подсчитано при помощи следующей формулы [4]

$$J_2 = \mathbf{E}\{N_T^{a,c}\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^T u(\tau)\langle \mathbf{1}, X_\tau \rangle \lambda(\tau) d\tau\right\},$$

где

$$\mathbf{1}^* = (1, 1, \dots, 1, 0) \in R^{M+1}.$$

Этот критерий обслуживающая система стремится максимизировать. Подставляя в эту формулу выражения (6), получаем

$$J_2 = \mathbf{E}\left\{\int_0^T \frac{C(1 - P(\tau))}{\sqrt{\lambda_0 + P(\tau)}} \langle \mathbf{1}, X_\tau \rangle d\tau\right\} \rightarrow \max,$$

или если рассматривать задачу минимизации то

$$J_2 = \mathbf{E}\left\{\int_0^T \frac{C(P(\tau) - 1)}{\sqrt{\lambda_0 + P(\tau)}} \langle \mathbf{1}, X_\tau \rangle d\tau\right\} \rightarrow \min.$$

Поскольку в реальной жизни следует стремиться к сбалансированному соотношению минимизируемых критериев, то мы будем рассматривать взвешенную сумму критериев

$$J = k_1 J_1 + k_2 J_2 \rightarrow \min, \quad k_1 > 0, k_2 > 0,$$

так как если хотя бы один из коэффициентов равен 0, то решение задачи тривиально. Если, например,  $k_1 = 0$ , то оптимальное управление равно очевидно  $P = 1$ , при этом новые заявки не принимаются и обслуживаются только заявки, которые уже имеются в начальный момент времени. С другой стороны, если  $k_2 = 0$ , то среднее время обслуживания не влияет на общее качество работы системы, и, чтобы максимизировать число принятых заявок, надо положить  $P = 0$ .

На самом деле выбор соотношения между  $k_1, k_2$  позволяет решать задачи оптимального управления с ограничениями, то есть, когда одни из критериев минимизируется при ограничении, наложенном сверху на другой критерий, или даже в случае, когда таких критериев много. В этом случае мы получаем многокритериальную задачу оптимизации, и решение подобных задач в теории управляемых Марковских цепей является предметом современных исследований [10].

Для решения задачи оптимального управления выпишем Гамильтониан (12)

$$H(\phi, P, X) = \langle \phi, A(P)X \rangle + \langle f_0(P), X \rangle,$$

где  $A(P)$  задается соотношением (7), а

$$f_0^i(P) = k_1 \frac{l^i}{\mu} + k_2 \left[ \frac{C(P-1)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} \mathbf{1}^i \right]$$

$$H(\phi, P, e_i) = \langle \phi, A(P)e_i \rangle + f_0^i(P)$$

Выпишем соотношения для различных значений  $X = e_i$ .

Для  $i = 0$

$$\begin{aligned} H(\phi, P, e_0) &= \langle \phi, A(P)e_0 \rangle + f_0^0(P) = \\ &= -\phi^0 \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} + \phi^1 \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} + k_2 \frac{C(P-1)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}; \end{aligned}$$

для  $i = 1$

$$\begin{aligned} H(\phi, P, e_1) &= \langle \phi, A(P)e_1 \rangle + f_0^1(P) = \\ &= \phi^0 \mu - \phi^1 \left[ \mu + \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} \right] + \phi^2 \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} + \frac{k_1}{\mu} + k_2 \frac{C(P-1)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}; \end{aligned}$$

для  $i = 2$

$$\begin{aligned} H(\phi, P, e_2) &= \langle \phi, A(P)e_2 \rangle + f_0^2(P) = \\ &= \phi^1 \mu - \phi^2 \left[ \mu + \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} \right] + \phi^3 \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} + 2 \frac{k_1}{\mu} + k_2 \frac{C(P-1)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}; \end{aligned}$$

для  $i = M-1$

$$\begin{aligned} H(\phi, P, e_{M-1}) &= \langle \phi, A(P)e_{M-1} \rangle + f_0^{M-1}(P) = \\ &= \phi^{M-2} \mu - \phi^{M-1} \left[ \mu + \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} \right] + \phi^M \frac{C(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} + (M-1) \frac{k_1}{\mu} + k_2 \frac{C(P-1)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}; \end{aligned}$$

и для  $i = M$

$$\begin{aligned} H(\phi, P, e_M) &= \langle \phi, A(P)e_M \rangle + f_0^M(P) = \\ &= \phi^{M-1} \mu - \phi^M \mu + \frac{M}{\mu} k_1. \end{aligned}$$

Откуда получаем для  $0 \leq i \leq M$

$$H(\phi, P, e_i) = \mathcal{H}^0(\phi, i) \frac{1-P}{\sqrt{\lambda_0 + P}} + \bar{\mathcal{H}}(\phi, i),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(\phi, i) &= -\phi^i C + \phi^{i+1} C - k_2 C, \quad i = 0, \dots, M-1, \quad \mathcal{H}^1(\phi, M) = 0; \\ \bar{\mathcal{H}}(\phi, i) &= \phi^{i-1} \mu - \phi^i \mu + \frac{k_1 i}{\mu}, \quad i = 1, \dots, M, \quad \bar{\mathcal{H}}(\phi, 0) = 0. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений динамического программирования (13) нам нужно найти функцию

$$\mathcal{H}(\phi, P, e_i) = \min_{0 \leq P \leq 1} H(\phi, P, e_i) = \min_{0 \leq P \leq 1} \left[ \mathcal{H}^0(\phi, i) \frac{1-P}{\sqrt{\lambda_0 + P}} + \bar{\mathcal{H}}(\phi, i) \right].$$

Значение  $P(\phi, e_i)$ , при котором достигается минимум, и есть оптимальное управление доступом с обратной связью.

Обозначим

$$A = \mathcal{H}^0(\phi, i) = -\phi^i C + \phi^{i+1} C - k_2 C_0$$

$$x \in [0, 1].$$

Тогда минимизируемая функция принимает следующий вид

$$f(x) = \frac{A(1-x)}{\sqrt{x+\lambda_0}},$$

а ее производная равна

$$f'(x) = \frac{A(-1/2 - \lambda_0 - x/2)}{2(x+\lambda_0)^{3/2}}.$$

Заметим, что на отрезке  $[0, 1]$  производная не меняет знак, так как выражение

$$-1/2 - \lambda_0 - x/2 < 0,$$

поэтому минимум достигается только в крайних точках отрезка  $[0, 1]$ . Таким образом

$$x_{min} = \begin{cases} 1, & \text{если } A > 0, \\ 0, & \text{если } A \leq 0. \end{cases}$$

Оптимальное управление равно

$$P_{opt}(\phi, e_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{H}^0(\phi, i) > 0, \\ 0, & \text{если } \mathcal{H}^0(\phi, i) \leq 0. \end{cases}$$

## 7. ПРОГРАММНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для нахождения оптимального управления  $P(\mathcal{H}^0(\phi, i))$  разработана программа моделирования на Maple 9.5. Для проведения моделирования задаются следующие параметры и терминальные условия:

–  $\mu$  - скорость обслуживания

–  $c = c(t)$  - переменное значение величины  $\sum_{i=1}^N \sqrt{a_i(t)}$  учитывает изменение предпочтений пользователей в зависимости от времени

–  $k_1, k_2$  - коэффициенты весов интегральных критериев  $J_1, J_2$

–

$$\phi_0^0 = 2, \quad \phi_0^1 = 2, \quad \phi_0^2 = 2, \quad \phi_0^3 = 2, \quad \phi_0^4 = 2, \quad \phi_0^5 = 10,$$

то есть, мы стремимся к тому, чтобы минимизировать взвешенную сумму среднего времени обслуживания, количества обслуженных заявок и при этом, чтобы в конце периода управления сервер был не перегружен.

–  $l_0 = \lambda_0$

–  $P_1(A)$  - функция для вычисления управления

–  $M + 1$  - количество состояний

В нашем случае

- $\mu = 5$
- $c = c(t) = 1 + \frac{3}{4} \cos(2(2 - t))$
- $k_1 = 0.55, k_2 = 0.45$
- $l_o = \lambda_0 = 0.01$
- $M = 5$

Система уравнений динамического программирования решается в обратном времени на интервале  $\tau \in [0, T]$ , то есть с начальными условиями равными  $\phi_0$ , но при выводе решений и соответствующих значений управления и интенсивности входного потока время заменяется в соответствии с формулой  $t = T - \tau$ , где  $T = 10$ .

На первом графике (Рис. 1) показано решение системы уравнений динамического программирования для шести состояний.

- для  $i = 0$  - красный цвет
- для  $i = 1$  - голубой цвет
- для  $i = 2$  - зеленый цвет
- для  $i = 3$  - коричневый цвет
- для  $i = 4$  - черный цвет
- для  $i = 5$  - оранжевый цвет

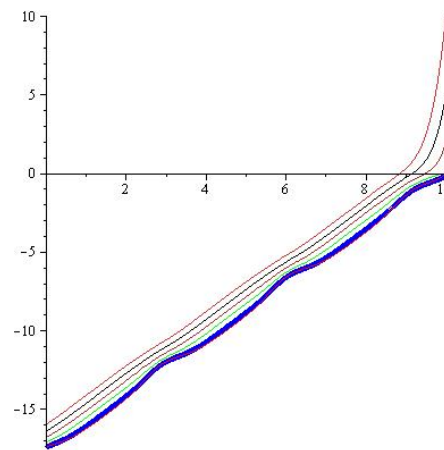
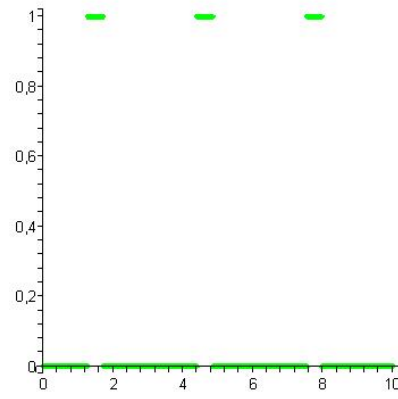


Рис. 1. Решение системы уравнений динамического программирования

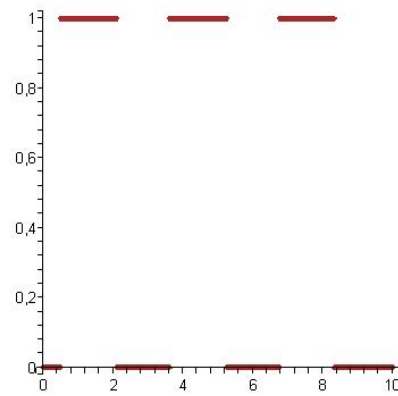
Далее на Рис. 2, 3, 4 изображены графики для управлений для состояний  $i = 2, i = 3, i = 4$  соответственно. В состоянии  $i = 0$  управление всегда равно нулю, это означает, что все заявки пропускаются. Аналогично для состояния  $i = 1$ . Для состояния  $i = 2$  практически все заявки пропускаются за исключением некоторых пиковых моментов, в которых буфер закрыт. Для  $i = 3$  буфер закрыт около половины времени. Для  $i = 4$  буфер закрыт уже больше половины времени. Для  $i = 5$  управление постоянно и равно 1, буфер закрыт всегда.

На рисунке 5 показана зависимость вероятности открытия буфера в от его загрузки  $i = 0...5$ . Следует отметить, что эта зависимость не является прямолинейной в отличие от протокола RED.

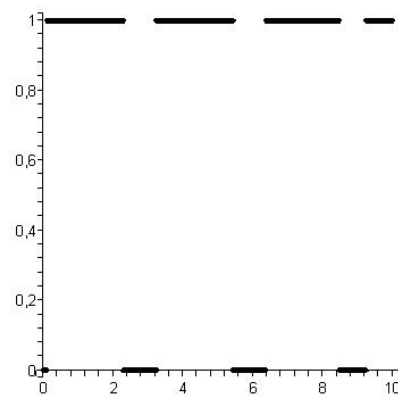
На Рис. 6, 7, 8, 9 показаны зависимости входящего потока, допускаемого к обслуживанию в зависимости от времени для соответствующих состояний. Как видно из них величина потока зависит от состояния и потребности в обслуживании, которая определяется величиной  $C(t)$ .



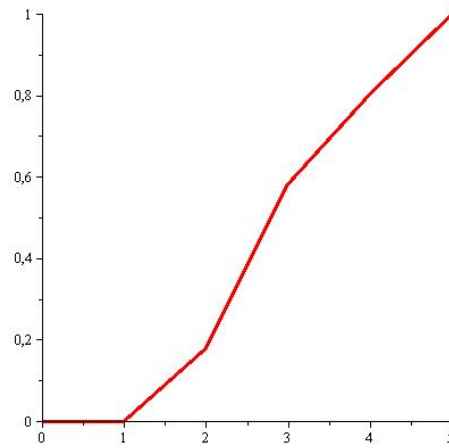
**Рис. 2.** Управление при  $i = 2$ .



**Рис. 3.** Управление при  $i = 3$ .

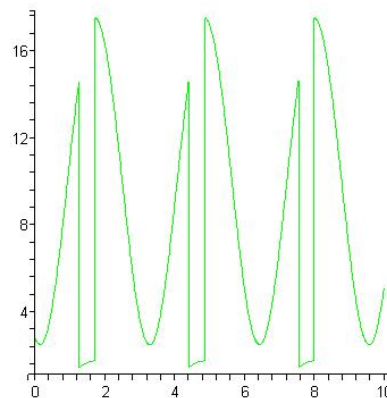


**Рис. 4.** Управление при  $i = 4$ .



**Рис. 5.** Средняя по времени вероятность открытия буфера в зависимости от его загрузки  $i = 0..5$  при терминальном критерии  $\phi_0(T) = 0, \phi_1(T) = 0, \phi_2(T) = 0, \phi_3(T) = 2, \phi_4(T) = 5, \phi_5(T) = 10$

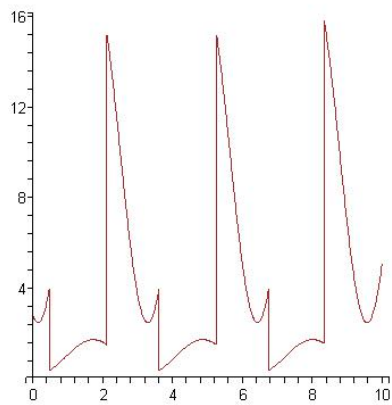
Для состояний  $i = 0$  и  $i = 1$  входной поток не ограничивается. Для  $i = 5$ , что соответствует заполненному буферу, входной поток достаточно мал, то есть, хотя пользователи и посылают заявки с достаточно малой интенсивностью  $C(t)/\sqrt{\lambda_0 + 1}$ , эти заявки не принимаются. Как видно, оптимальное управление весьма похоже на действующие протоколы, принятые для управления потоками данных в Интернете.



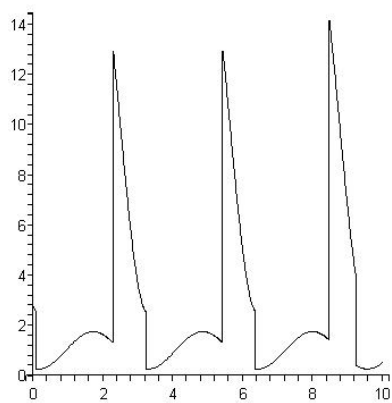
**Рис. 6.** Входной поток при  $i = 2$ .

## 8. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

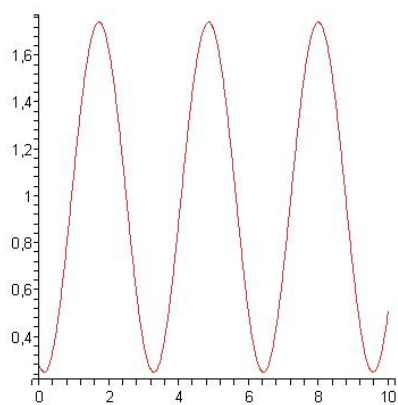
1. В работе исследована стохастическая модель управления потоками в Интернет, основанная на использовании теории управляемых Марковских цепей. Она учитывает активное поведение пользователей и позволяет получить оптимальное управление доступом, с учетом естественных критериев, характеризующих функционирование роутера -провайдера.
2. Модель основана на методах теории активных систем и позволяет учитывать функции полезности пользователей и различные критерии качества, характеризующие функционирование системы пользователи - роутер при нестационарных внешних условиях. Модель



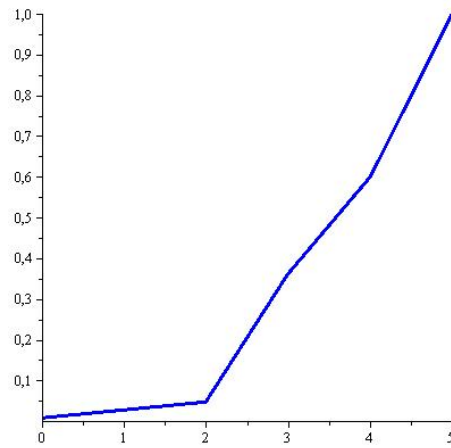
**Рис. 7.** Входной поток при  $i = 3$ .



**Рис. 8.** Входной поток при  $i = 4$ .



**Рис. 9.** Входной поток при  $i = 5$ .



**Рис. 10.** Средняя по времени вероятность открытия буфера в зависимости от его загрузки  $i = 0...5$  при терминальном критерии  $\phi_0(T) = 0, \phi_1(T) = 1, \phi_2(T) = 2, \phi_3(T) = 3, \phi_4(T) = 5, \phi_5(T) = 10$

демонстрирует качественное соответствие с реальными ситуациями в интернете, которое может быть использовано для анализа реальных систем при соответствующем увеличении числа состояний.

3. Модель допускает расширение на такие весьма актуальные ситуации, как случайное изменение параметров системы, приоритетное обслуживание (это лишь расширяет множество состояний), управление скоростью обслуживания (параметр  $\mu$  в этом случае становится дополнительным управлением).
4. Данная модель может служить основой для анализа более сложных систем, связанных не только с управлением потоками данных, но и с функционированием иерархических систем, возникающих в ситуации клиенты - система обслуживания (склады, снабжение ограниченными ресурсами).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вегешна Ш. Качество обслуживания в сетях IP // Cisco Press, 2003, Глава 6. РНВ-политика: предотвращение перегрузки и политика отбрасывания пакетов
2. Бурков В. *Основы математической теории активных систем*. М.: Наука, 1977.
3. R.J. Elliott, L. Aggoun and J.B. Moore. *Hidden Markov Models. Estimation and Control*. Springer Verlag, New York, 1995.
4. В. Miller, Optimization of stochastic networks via stochastic control. Труды VII Международной конференции по идентификации систем и проблемам управления, SICPRO'08, Москва, Институт проблем управления, 28-31 Января, 2008, стр. 385-397.
5. Миллер Б.М., Панков А.Р. *Теория случайных процессов*. Наука, Физматлит, 2007.
6. P. Bremaud. Optimal thinning of a point processes. SIAM J. Control and Optimization, v. 17, n 2, 1979, pp. 222-230.
7. М.Н.А. Davis. *Markov Models and Optimization*. London: Chapman & Hall, 1993.
8. Low S.H., Paganini F., Doyle J.C. Internet Congestion Control // IEEE Control Systems Magazine, February 2002, p.28-43
9. S. Floyd and V. Jacobson, Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance, IEEE/ACM TRANSACTIONS ON NETWORKING, vol. 1, no. 4, pp. 393-413, Aug. 1993.



10. A.V.Piunovskiy, Bicriteria optimization of a queue with a controlled input stream, Queueing Systems, v. 48 2004, pp. 159-184.