

# Вейвлет-преобразования и сжатие компьютерных томограмм<sup>1</sup>

Д. В. Сушко, Ю. М. Штарьков

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*

Поступила в редколлегию 30.06.2009

**Аннотация**—Предложен метод сжатия без искажений компьютерных томограмм. Метод основан на описании (сжатии) данных, получаемых в результате двумерного дискретного вейвлет-преобразования исходного изображения (томограммы). Приведены экспериментальные оценки для скорости кодирования. Показано, что эффективность предложенного метода выше, чем у метода, основанного на описании ошибок простейшего предсказания.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы обратимого (без искажений) сжатия томограмм обусловлена необходимостью долгосрочного хранения и передачи по каналам связи данных томографических исследований, при этом требование обратимости (отсутствия искажений) часто продиктовано соображениями законодательного характера. Значительная статистическая зависимость отсчетов томограмм (изображений) во многом упрощает эту задачу. Для ее решения используют взаимно-однозначное преобразование, обеспечивающее частичную декорреляцию исходных данных, и последующее описание (сжатие) полученных данных, как правило, с помощью арифметического кодирования [1].

В работе [2] изучались возможности метода сжатия, в котором декорреляция данных достигалась посредством перехода к ошибкам их простейшего предсказания по двум соседним (слева и сверху) элементам. Цель настоящей работы — предложить и исследовать метод сжатия, в котором для декорреляции исходных данных используется дискретное вейвлет-преобразование (ДВП). Эффективность ДВП в целом ряде задач, связанных с цифровой обработкой сигналов и изображений, общеизвестна [3]. Результат применения ДВП к изображению — его разложение на четыре изображения (компоненты), линейные размеры которых вдвое, а число отсчетов в четыре раза меньше, чем у исходного изображения. При этом одна из компонент является приближением исходного изображения вдвое меньшего разрешения. Несомненное преимущество ДВП в задачах, связанных с передачей данных типа изображений, состоит в том, что приближение может обрабатываться и передаваться отдельно. В пользу ДВП говорит и тот факт, что его применение предусмотрено стандартом сжатия изображений JPEG 2000 и рядом других стандартов [3].

В основу предлагаемого метода сжатия положена общая концепция работы [2], но внесены изменения, позволяющие учесть специфику ДВП. Описание (сжатие) каждой компоненты ДВП производится независимо от остальных компонент. Эффективность сжатия томограммы оценивается значением ее квазиэнтропии  $H$  — минимума скорости кодирования  $R$  (среднего количества бит, затрачиваемого на описание одного отсчета исходных данных) при заданных ограничениях. Такой способ оценивания правомерен: в [2] показана возможность получения пренебрежимо малых значений разности  $R - H$  (это справедливо и при использовании ДВП).

<sup>1</sup> Работа частично поддержана в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные науки — медицине” на 2009 г., проект “Сжатие данных медицинских исследований”; работа второго автора частично поддержана РФФИ, проект № 06-01-00225.

В качестве экспериментальных данных в настоящей работе используются те же шесть томограмм, что и в работе [2]. Это дает возможность сравнить эффективность метода сжатия на основе простейшего предсказания и метода, использующего ДВП, путем сравнения соответствующих значений квазиэнтропии одинаковых томограмм. Во всех случаях метод, использующий ДВП, оказывается эффективнее, а выигрыш варьируется в широких пределах и тем больше, чем меньше квазиэнтропия.

## 2. ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Прямое ДВП суммируемой с квадратом вещественной последовательности целого аргумента  $\mathbf{x} = \{x_n\}$  — это разложение данной последовательности на две составляющие, которое осуществляется следующим образом. Вычисляются свертки последовательности  $\mathbf{x}$  с двумя заданными фильтрами разложения, низкочастотным  $\boldsymbol{\mu}^0$  и высокочастотным  $\boldsymbol{\mu}^1$  (оба фильтра суть суммируемые с квадратом вещественные последовательности), а затем две полученные в результате фильтрации последовательности прореживаются, т.е. в них удерживаются лишь четные члены. В итоге имеем две суммируемые с квадратом вещественные последовательности целого аргумента  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{x}^1$ :

$$x_n^i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_{2n-k}^i x_k, \quad i = 0, 1, \quad (1)$$

которые представляют собой приближение (низкочастотную составляющую) и детальную (высокочастотную) составляющую исходной последовательности, при этом каждая имеет вдвое меньшее разрешение.

Обратное ДВП — это восстановление исходной последовательности по ее приближению и детальной составляющей. Разбавим обе последовательности  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{x}^1$  нулями (т.е. построим последовательности с нулевыми нечетными членами и четными членами, заданными последовательностями  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{x}^1$ ), затем вычислим свертки полученных последовательностей с некоторыми фильтрами синтеза  $\boldsymbol{\nu}^0$ ,  $\boldsymbol{\nu}^1$  и сложим результаты:

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\nu_{n-2k}^0 x_k^0 + \nu_{n-2k}^1 x_k^1). \quad (2)$$

Чтобы преобразование (2) действительно было обратным по отношению к преобразованию (1), т.е. чтобы выполнялось равенство  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ , система фильтров  $\boldsymbol{\mu}^0$ ,  $\boldsymbol{\mu}^1$ ,  $\boldsymbol{\nu}^0$  и  $\boldsymbol{\nu}^1$  должна удовлетворять условию восстановления (см., например, [4]). Этому условию, в частности, удовлетворяет система фильтров конечной длины, впервые предложенная в [5]:

$$\begin{aligned} \mu_{-2}^0 &= -1/8, & \mu_{-1}^0 &= +1/4, & \mu_0^0 &= +3/4, & \mu_1^0 &= +1/4, & \mu_2^0 &= -1/8; \\ \mu_{-2}^1 &= -1/2, & \mu_{-1}^1 &= +1, & \mu_0^1 &= -1/2; \\ \nu_{-1}^0 &= +1/2, & \nu_0^0 &= +1, & \nu_1^0 &= +1/2; \\ \nu_{-1}^1 &= -1/8, & \nu_0^1 &= -1/4, & \nu_1^1 &= +3/4, & \nu_2^1 &= -1/4, & \nu_3^1 &= -1/8; \end{aligned} \quad (3)$$

остальные коэффициенты фильтров равны нулю. Эта система, получившая широкое распространение и вошедшая в стандарт сжатия JPEG 2000, используется в настоящей работе.

Эффективность применения ДВП для сжатия данных обусловлена тем, что при “удачном” выборе фильтров разложения значения детальных составляющих распределены значительно более неравномерно, чем значения исходного сигнала. Однако требование обратимости (отсутствия искажений) при сжатии сигналов конечной длины с целыми значениями приводит к серьезному дополнительному требованию: ДВП должно быть свободно от ошибок округления. Если ДВП с фильтрами (3) реализуется непосредственно по формулам (1), (2), то

для чтобы избежать ошибок округления, необходимо на этапе вычисления прямого преобразования добавить дополнительные биты для хранения остатков от деления: три бита для приближения и один бит для детальной составляющей. Попадающие в эти дополнительные “младшие” биты остатки представляют собой практически “белый шум”, что неприемлемо с точки зрения последующего сжатия. Решение проблемы заключается в том, чтобы реализовывать ДВП посредством так называемой лифтинг-схемы [6]. При этом появляется возможность взаимосогласованным образом округлять результаты при вычислении прямого и обратного преобразований, что, во-первых, обеспечивает точное восстановление и, во-вторых, избавляет от необходимости хранить (и сжимать) остатки. Кроме того, аккуратный учет краевых эффектов в лифтинг-схеме позволяет добиться того, что для конечной последовательности  $\mathbf{x}$  длины  $N$  приближение  $\mathbf{x}^0$  и детальная составляющая  $\mathbf{x}^1$  имеют длины, в точности равные  $[N/2 + 1]$  и  $[N/2]$ , соответственно (здесь и далее  $[\cdot]$  —целая часть числа).

В двумерном случае ДВП представляет собой суперпозицию одномерных преобразований, применяемых отдельно к строкам и столбцам. Если  $\mathbf{X} = \{X_{m,n}\}$  — двумерная вещественная последовательность, то прямое ДВП имеет аналогичный (1) вид:

$$X_{m,n}^{i,j} = \sum_{l,k=-\infty}^{+\infty} \mu_{2m-l}^i \mu_{2n-k}^j X_{l,k}, \quad i, j = 0, 1,$$

а его результатом является разложение исходной последовательности на четыре компоненты (составляющие) вдвое меньшего разрешения. Последовательность  $\mathbf{X}^{0,0} \equiv \mathbf{X}^A$ , полученная с применением низкочастотной фильтрации по строкам и столбцам, представляет собой приближение, а остальные три последовательности  $\mathbf{X}^{0,1} \equiv \mathbf{X}^V$ ,  $\mathbf{X}^{1,0} \equiv \mathbf{X}^H$  и  $\mathbf{X}^{1,1} \equiv \mathbf{X}^D$ , в построении которых участвует высокочастотный фильтр, — детальные составляющие (вертикальные, горизонтальные и диагональные, соответственно). Такое разложение называется одномасштабным ДВП. Обратное преобразование производится очевидным образом при помощи одномерных обратных ДВП, применяемых отдельно к строкам и столбцам, и описывается двумерным аналогом формулы (2). Как и в одномерном случае, возможна лифтинг-реализация двумерного ДВП. Это дает возможность использовать целую арифметику и добиться того, что для изображения (конечной двумерной последовательности, т.е. матрицы) размером  $M \times N$  приближение и вертикальные, горизонтальные и диагональные составляющие имеют размеры  $[M/2 + 1] \times [N/2 + 1]$ ,  $[M/2 + 1] \times [N/2]$ ,  $[M/2] \times [N/2 + 1]$  и  $[M/2] \times [N/2]$ , соответственно.

### 3. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТОМОГРАММЫ КАК ИЗОБРАЖЕНИЯ

Компьютерная (рентгеновская) томограмма представляет собой квадратное полутоновое изображение размером  $512 \times 512$  пикселей, состоящее из области восстановления (обычно это круг, вписанный в квадрат) и ее дополнения, в котором восстановление не производилось (будем называть его областью фона). Яркость в области восстановления принимает значения в диапазоне шириной 4096 (12 бит), отдельное значение вне этого диапазона приписывается точкам фона. Далее мы будем считать, что значение фона равно 0, диапазон яркости в области восстановления — от 1 до 4096 и, таким образом, весь диапазон значений —  $[0, 4096]$ .

В настоящей работе в качестве экспериментального материала мы используем те же шесть томограмм трех видов тканей: брюшной полости (Т1, Т2), легких (Т3, Т4) и головного мозга (Т5, Т6), что и в работе [2]. Эти томограммы были предоставлены Отделением лучевой диагностики Клиники репедевтики внутренних болезней им. В.Х. Василенко (томограф HiSpeed CT/i компании General Electric). Для примера на рис. 1 представлены две из шести томограмм: томограмма легких Т3 (рис. 1а) и томограмма головного мозга Т6 (рис. 1б). При визуализации томограммы легких использовано окно  $[0, 1100]$ , при визуализации томограммы

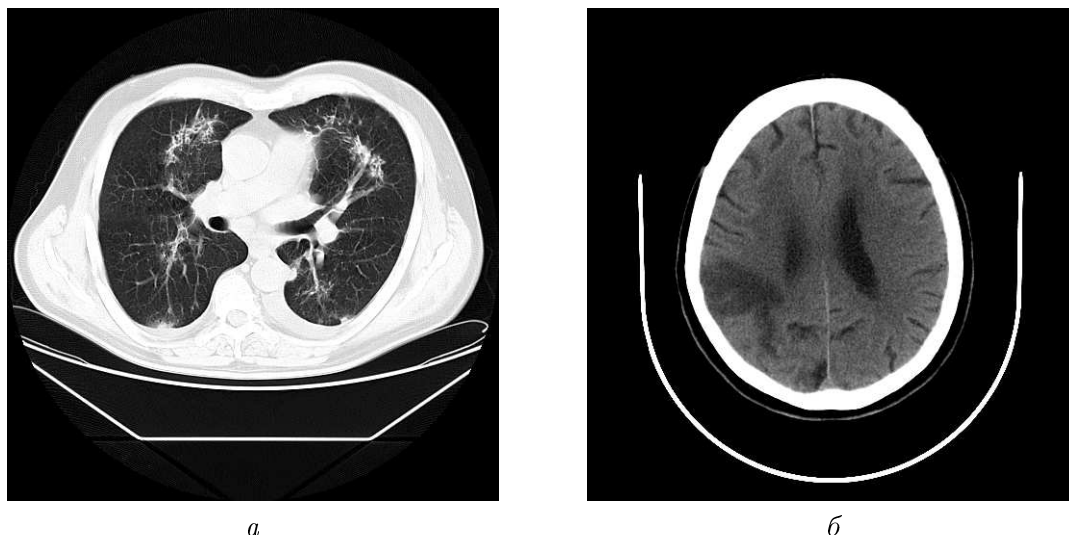


Рис. 1. Томограмма легких Т3 (а) и томограмма головного мозга Т6 (б) в окнах визуализации  $[0, 1100]$  и  $[1020, 1120]$ , соответственно.

головного мозга — значительно более узкое окно  $[1020, 1120]$ . Напомним, что визуализация томограммы в окне  $[x_{\min}, x_{\max}]$  предполагает преобразование значений яркости, при котором диапазон  $[x_{\min}, x_{\max}]$  линейно отображается на стандартный диапазон  $[0, 255]$ , значения  $x < x_{\min}$  отображаются в значение 0, значения  $x > x_{\max}$  — в значение 255, и вывод полученного таким образом изображения на экран монитора или устройства печати. Окно визуализации обычно выбирается исходя из диагностических задач.

Результатом применения прямого ДВП является одномасштабное разложение исходного изображения (томограммы)  $\mathbf{X}$  размера  $512 \times 512$  на четыре изображения размера  $256 \times 256$ : приближение  $\mathbf{X}^A$  и вертикальные  $\mathbf{X}^V$ , горизонтальные  $\mathbf{X}^H$  и диагональные  $\mathbf{X}^D$  детальные составляющие. Первое из них — результат низкочастотной фильтрации (сглаживания) элементов исходного изображения по строкам и столбцам, следующие два получены сглаживанием по одной координате и высокочастотной фильтрацией по другой, а последняя — результат высокочастотной фильтрации по обеим координатам (в каждом случае фильтрация сопровождается прореживанием, уменьшающим размер вдвое по каждой координате). Как уже было указано выше, в данной работе используется ДВП, основанное на системе фильтров (3), поэтому диапазоны значений яркости компонент  $\mathbf{X}^A$ ,  $\mathbf{X}^V$ ,  $\mathbf{X}^H$  и  $\mathbf{X}^D$  равны  $[-2560, 6656]$ ,  $[-6144, 6144]$ ,  $[-6144, 6144]$  и  $[-8192, 8192]$ , соответственно. На рис. 2 представлены результаты применения ДВП к томограммам Т3 (рис. 2а) и Т6 (рис. 2б). В левом верхнем квадрате каждого рисунка располагается приближение для соответствующей томограммы, использованы те же окна визуализации, что и на рис. 1. В правом верхнем, левом нижнем и правом нижнем квадратах располагаются, соответственно, вертикальные, горизонтальные и диагональные составляющие. При этом использованы существенно более узкие, чем для приближений, окна визуализации с центром в нуле: окно  $[-150, 150]$  для детальных составляющих Т3 и окно  $[-20, 20]$  для детальных составляющих Т6.

#### 4. МЕТОД СЖАТИЯ КОМПОНЕНТ ДВП

Компоненты (изображения), полученные в результате ДВП, сжимаются по отдельности (независимо друг от друга). Как показывает рис. 2, статистические свойства приближения и детальных составляющих значительно различаются, поэтому и методы их сжатия, вообще

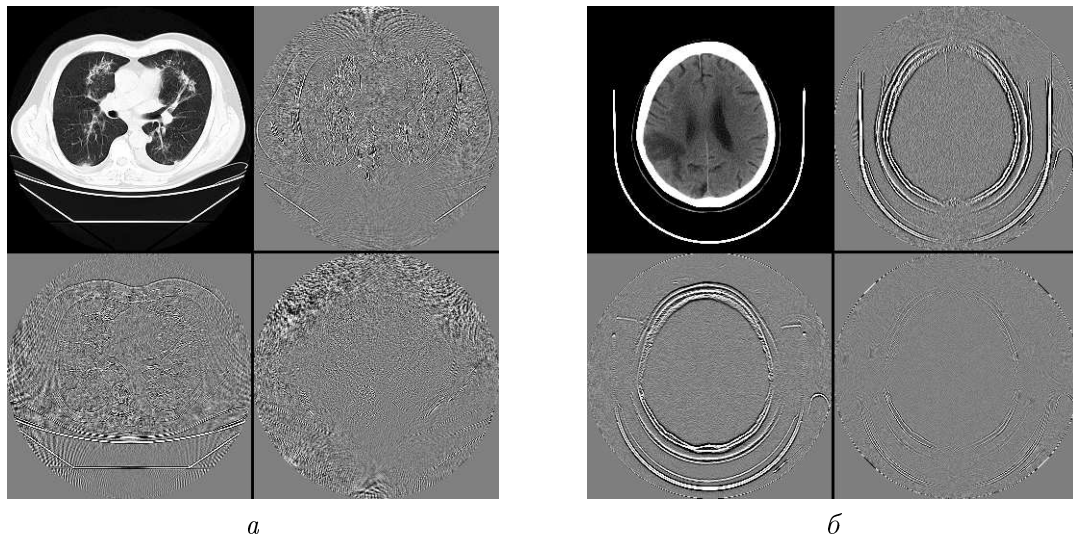


Рис. 2. Одномасштабное разложение томограмм Т3 (а) и Т6 (б). Для визуализации приближений использованы те же окна, что и на рис. 1 для соответствующих томограмм. Окно визуализации для детальных составляющих Т3 (а) —  $[-150, 150]$ , для детальных составляющих Т6 (б) —  $[-20, 20]$ .

говоря, должны различаться. Однако оказывается, что эффективное сжатие всех компонент ДВП, как приближений, так и детальных составляющих, может быть достигнуто в рамках одной общей схемы [2].

#### 4.1. Общая схема метода сжатия

Предложенный в [2] метод сжатия томографических изображений основан на универсальном арифметическом кодировании ошибок предсказания. Суть метода составляет универсальное кодирование, т.е. построение вероятностей для данных (ошибок предсказания) с неизвестной статистикой. Арифметическое кодирование [1], использующее построенные вероятности в качестве кодовых вероятностей, обеспечивает сжатие данных. Остановимся более подробно на тех ключевых моментах, которые потребуются нам в дальнейшем.

Пусть  $X$  — некоторый элемент исходного изображения,  $U$  и  $L$  — соседние к нему сверху и слева элементы. Если  $X$  — элемент первой строки и/или первого столбца, т.е. верхний и/или левый соседний элемент отсутствует, то будем полагать  $U = 0$  и/или  $L = 0$  (что согласуется со спецификой томографических изображений). Величина  $(U + L)/2$  — простейшее предсказание для элемента  $X$ . При естественном построчном кодировании отсчетов к моменту рассмотрения очередного элемента  $X$  элементы  $U$  и  $L$  уже известны как кодеру, так и декодеру, и, следовательно, известно предсказание. Поэтому описание исходных значений эквивалентно описанию ошибок предсказания  $\Delta X = X - (U + L)/2$ .

Будем считать, что распределение значений очередной ошибки предсказания  $\Delta X$  зависит только от текущего состояния, которое, в свою очередь, определяется уже известными к этому моменту элементами  $U$  и  $L$  изображения, т.е. используем статистическую модель источника с вычислимой последовательностью состояний. Ошибки предсказания каждого состояния кодируются независимо, и минимальная скорость кодирования достигается при замене неизвестных вероятностей значений этих ошибок нормированными частотами их появления в данном состоянии. Эффективность сжатия в целом зависит от выбора множества состояний. Желательно, чтобы каждому состоянию соответствовало как можно более неравномерное частотное распре-

деление, а распределения, соответствующие разным состояниям, отвечали бы разным “типам поведения”, т. е. максимально отличались друг от друга.

Способ построения множества состояний  $\{S\}$  состоит в следующем. Учитывая специфику томограмм, определим прежде всего фоновое состояние  $S_0$ , включив в него все те элементы, для которых  $U = L = 0$ . Если элемент не принадлежит фоновому состоянию  $S_0$  и выполнено условие

$$t_{k-1} \leq \sigma_1(U, L) < t_k, \quad k = 1, \dots, T, \quad (4)$$

где  $\sigma_1(U, L) = |U - L|$ , а  $0 < t_1 < \dots < t_T$  — целые, то элемент принадлежит состоянию  $S_k$ . Если, наконец,

$$t_T \leq \sigma_1(U, L), \quad (5)$$

то элемент принадлежит состоянию  $S_{T+1}$ . Таким образом, функция  $\sigma_1$  и значения порогов  $\{t_k\}$  определяют множество, состоящее из  $T + 2$  состояний (считая фоновое), так что каждый элемент изображения принадлежит одному и только одному состоянию. Функция  $\sigma_1$  характеризует изменение значений элементов в окрестности рассматриваемой точки, что и оправдывает ее использование при построении состояний.

Нормированному частотному распределению значений ошибок предсказания  $f(\Delta X|S)$  для элементов, попадающих в состояние  $S$ , соответствует квазиэнтропия состояния — нижняя граница средних затрат  $R(S)$  на описание одного такого значения:

$$H(\Delta \mathbf{X}, S) = \sum_{\Delta X: X \in S} f(\Delta X|S) [-\log_2 f(\Delta X|S)]. \quad (6)$$

Взвешенная сумма квазиэнтропий всех состояний с весами, равными нормированным частотам состояний  $F(S)$ ,

$$H(\Delta \mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{T+1} F(S_k) H(S_k) \quad (7)$$

— квазиэнтропия значений ошибок предсказания для всего изображения, т. е. нижняя граница средних затрат  $R$  на описание одной ошибки для элемента изображения или нижняя граница скорости кодирования. При заданном способе построения состояний и фиксированном общем числе порогов  $T$  квазиэнтропия  $H(\Delta \mathbf{X})$  зависит от выбранных значений порогов  $\{t_k\}$ , входящих в условия (4) и (5). Везде далее приводятся минимальные (по значениям порогов) значения квазиэнтропии. Единица измерения квазиэнтропии (и скорости кодирования) — бит/пиксель (б/п). Заметим, что равенства (6) и (7) остаются в силе и для самих значений  $X$  изображения, но для них частотное распределение отличается от частотного распределения для значений ошибок  $\Delta X$ .

Частоты  $F(S)$  и  $f(\Delta X|S)$  могут быть вычислены кодером в результате просмотра всего изображения, и при их использовании в качестве вероятностей в процессе арифметического кодирования декодеру нужно передавать их значения. Поскольку используемое число состояний мало, передача частот состояний  $F(S)$  практически не увеличивает скорости кодирования  $R$ . Однако число частот  $f(\Delta X|S)$  исчисляется тысячами, и их непосредственная передача привела бы к значительным издержкам. Чтобы избежать этого, нужно аппроксимировать распределения  $f(\Delta X|S)$  функциями из заранее выбранного класса, такого, что каждая функция класса однозначно определяется значениями некоторого небольшого числа параметров. Кодер использует значения построенных аппроксимирующих функции в качестве вероятностей, а для передачи необходимой информации декодеру достаточно передать значения параметров, определяющих эти функции. Обозначенный подход позволяет достигнуть скорости кодирования, которая превышает квазиэнтропию на пренебрежимо малую величину. Во всех рассмотренных в [2] случаях величина  $(R - H)/H$  не превысила 0.005.

## 4.2. Сжатие приближения

Как показывает сравнение рис. 1 и 2, приближение визуально почти не отличается от исходного изображения. Статистические свойства приближения и исходного изображения также близки, несмотря на расширение диапазона значений в 2.25 раза и появление отрицательных значений. Поэтому для сжатия приближения естественно прямо использовать описанный выше метод.

Все экспериментальные данные по каждой томограмме содержатся в четырех строках Таблицы, каждая из которых соответствует общему числу выбираемых порогов  $T = 0, 1, 2, 3$  (при  $T = 0$  используется всего два состояния:  $S_0$  — фоновое состояние, и  $S_1$  — не фоновое состояние). Номер томограммы и значения  $T$  указаны в первом и втором столбцах Таблицы. В третьем столбце приведены минимальные квазиэнтропии  $H^P = H(\Delta X)$  значений ошибок предсказания для томограмм, взятые из работы [2].

В четвертом столбце приведены посчитанные минимальные квазиэнтропии  $H^A = H(\Delta X^A)$  значений ошибок предсказания для приближений томограмм. Поскольку приближение содержит сглаженные значения элементов исходной томограммы, априори можно было бы предполагать, что  $H^A < H^P$  для всех томограмм и всех значений  $T$ . Однако оказалось, что всегда верно обратное неравенство. Это означает, что двукратное прореживание элементов матриц,

Таблица. Экспериментальные данные.

№	$T$	$H^P$	$H^A$	$H^V$	$H^H$	$H^D$	$H^W$	$\Delta^{PW}$	$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_{01}$
1	0	4.769	5.264	4.139	4.769	4.126	4.574	0.194	0.016	0.014	0.033
	1	4.564	4.980	4.034	4.577	4.040	4.408	0.156		0.005	0.024
	2	4.508	4.880	4.010	4.524	4.019	4.358	0.149		0.003	0.022
	3	4.487	4.847	3.998	4.490	4.009	4.336	0.151		0.008	0.026
2	0	5.032	5.500	4.395	4.941	4.404	4.810	0.222	0.013	0.025	0.041
	1	4.835	5.207	4.277	4.772	4.320	4.644	0.191		0.017	0.032
	2	4.790	5.124	4.243	4.726	4.293	4.596	0.194		0.018	0.033
	3	4.772	5.088	4.228	4.697	4.282	4.573	0.198		0.022	0.037
3	0	6.451	6.796	6.193	6.385	6.204	6.394	0.057	0.003	0.009	0.014
	1	6.335	6.575	6.100	6.268	6.144	6.272	0.063		0.011	0.016
	2	6.309	6.492	6.064	6.223	6.120	6.225	0.085		0.019	0.023
	3	6.295	6.450	6.045	6.200	6.105	6.200	0.095		0.024	0.028
4	0	6.374	6.763	6.109	6.314	6.121	6.327	0.048	0.004	0.008	0.013
	1	6.250	6.535	6.020	6.180	6.048	6.196	0.055		0.006	0.012
	2	6.219	6.449	5.986	6.130	6.024	6.147	0.071		0.012	0.017
	3	6.200	6.407	5.967	6.104	6.012	6.122	0.078		0.018	0.023
5	0	4.674	5.406	4.173	3.876	3.198	4.163	0.511	0.026	0.046	0.076
	1	4.381	5.060	3.944	3.675	3.113	3.948	0.433		0.035	0.065
	2	4.277	4.942	3.892	3.637	3.092	3.891	0.386		0.033	0.063
	3	4.216	4.857	3.866	3.615	3.082	3.855	0.361		0.027	0.057
6	0	4.379	5.148	3.986	3.726	2.979	3.960	0.419	0.041	0.033	0.079
	1	4.024	4.746	3.729	3.508	2.884	3.717	0.307		0.016	0.061
	2	3.976	4.662	3.687	3.474	2.866	3.672	0.304		0.018	0.064
	3	3.957	4.628	3.664	3.459	2.855	3.651	0.306		0.023	0.068

ослабляющее корреляцию их значений, и “размывание” резких переходов важнее преимуществ сглаживания. В результате разность  $H^A - H^P$  может достигать  $0.676/\pi$  (Т6,  $T = 3$ ). Возможности некоторого уменьшения  $H^A$  будут рассмотрены ниже.

#### 4.3. Сжатие детальных составляющих

Отсчеты детальных составляющих принимают значения в симметричных относительно нуля диапазонах, которые для компонент  $\mathbf{X}^V$ ,  $\mathbf{X}^H$  в три раза, а для компоненты  $\mathbf{X}^D$  в четыре раза шире, чем диапазон исходных значений. Однако функции распределения значений концентрируются в небольших окрестностях нуля: на рис. 2 детальные составляющие менее контрастны, чем приближение, несмотря на то что для их визуализации использовано значительно более узкое окно. Поэтому будем рассматривать частотные распределения значений этих составляющих непосредственно и оценивать соответствующие квазиэнтропии.

Детальные составляющие  $\mathbf{X}^V$ ,  $\mathbf{X}^H$  и  $\mathbf{X}^D$  описывают отличие элементов исходного изображения от сглаженных значений. Как и раньше, элементы, расположенные слева и сверху от рассматриваемого, будем обозначать через  $U$  и  $L$ . Однако теперь значения самих этих элементов характеризуют скорость изменения значений исходного изображения, по крайней мере, по одной координате. Поэтому при построении состояний в формулах (4) и (5) вместо функции  $\sigma_1$  будем использовать функцию

$$\sigma_2(U, L) = |U| + |L|. \quad (8)$$

Такой выбор предпочтительнее, чем  $|U + L|$ , поскольку  $U$  и  $L$  могут иметь разные знаки. Действительно, если  $U \sim -L \gg 0$ , то скорость изменения значений элементов велика, но при этом  $|U + L| \sim 0$ . Замена функции, используемой при построении состояний, — это главное изменение, которое необходимо внести в общую схему при сжатии детальных составляющих.

Столбцы Таблицы с пятого по седьмой содержат (как обычно, минимальные по значениям порогов) значения квазиэнтропии для детальных составляющих  $H^V = H(\mathbf{X}^V)$ ,  $H^H = H(\mathbf{X}^H)$ ,  $H^D = H(\mathbf{X}^D)$  всех рассматриваемых томограмм. Поскольку каждая компонента (включая приближение) содержит равное число элементов, квазиэнтропия  $H^W$  всего изображения в целом равна среднему арифметическому величин  $H^A$ ,  $H^V$ ,  $H^H$  и  $H^D$ . В восьмом столбце Таблицы приведены значения  $H^W$ , а в девятом — разности  $\Delta^{PW} = H^P - H^W$ , которые оказываются во всех случаях положительными! Чем меньше шум на томограмме и чем более она “гладкая”, тем больше выигрыш от использования ДВП (достаточно сравнить значения  $\Delta^{PW}$  для Т3, Т4 и Т5, Т6). Заметим, кроме того, что во всех случаях значения  $H^W$  при  $T = 1$  меньше, чем значения  $H^P$  при  $T = 3$ .

## 5. НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ ОСНОВНОГО МЕТОДА

В этом разделе описаны некоторые дополнительные модификации представленного в разделе 4 метода, которые позволяют несколько уменьшить скорость кодирования.

### 5.1. Изменение функции $\sigma_2$

Вертикальные детальные составляющие  $\mathbf{X}^V$  получены низкочастотной фильтрацией по столбцам и высокочастотной по строкам, а горизонтальные детальные составляющие  $\mathbf{X}^H$  — низкочастотной фильтрацией по строкам и высокочастотной по столбцам. Эта асимметрия строк и столбцов никак не учтена в способе построения состояний: при использовании функции (8) состояния инвариантны относительно транспонирования. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть обобщение (8) вида

$$\sigma_2(U, L; \alpha) = (1 + \alpha)|U| + (1 - \alpha)|L|, \quad -1 \leq \alpha \leq +1, \quad (9)$$



и использовать при построении состояний для детальных составляющих конкретного типа функцию  $\sigma_2$  вида (9) с конкретным (отличным от нуля) значением  $\alpha$ .

Для проверки гипотезы был проведен эксперимент, в ходе которого значения квазиэнтропии детальных составляющих, полученные с использованием функций вида (9) и значениями  $\alpha$ , равными  $\pm 1/3$ , сравнивались с аналогичными значениями квазиэнтропии, полученными ранее с использованием функции (8). Вычисления проводились для детальных составляющих всех шести томограмм при общем числе выбираемых порогов  $T = 1, 2, 3$  (всего 108 вариантов). Результаты опровергают высказанное предположение. В подавляющем большинстве случаев (92 из 108) наименьшее значение квазиэнтропии достигалось при использовании функции (8). В остальных 16 случаях выигрыш, достигаемый вследствие применения (9) (с  $\alpha \neq 0$ ), оказался ничтожным: ни в одном случае он не превысил 0.008 б/п. При этом уменьшение квазиэнтропии  $H^W$  изображений в целом, как результат использования для его детальных составляющих оптимальных функций (9), оказалось еще меньше: оно не превысило 0.002 б/п. Поэтому далее эта модификация способа построения состояний не использовалась.

### 5.2. Введение двух состояний для описания фона

Значения пикселей исходных томограмм равны нулю только в области фона. Это позволяет отделить точки фона от других с высокой точностью: для всех шести томограмм в фоновое состояние  $S_0$  попадает 21.03 % всех точек (немного меньше их истинной доли). Квазиэнтропия частотного распределения значений в состоянии  $S_0$  не равна нулю только потому, что условие  $U = L = 0$  приписывает к этому состоянию часть граничных точек области восстановления. Но для любой из шести томограмм эта квазиэнтропия меньше 0.043 б/п, а ее вклад в значение квазиэнтропии  $H^P$  не больше 0.009 б/п.

В результате ДВП происходит размывание границы фона и области восстановления и, что более существенно, значение нуль перестает быть признаком точки фона. В действительности значение нуль — наиболее часто встречающееся значение внутри области восстановления для детальных составляющих (точнее, той области, которая соответствует области восстановления на детальных составляющих). Поэтому вероятность выполнения условия  $U = L = 0$  для точки из области восстановления достаточно велика. Сказанное иллюстрирует рис. 3а, на котором те точки диагональной детальной составляющей томограммы Т6, для которых выполнено условие  $U = L = 0$ , выделены белым цветом. Таким образом, использование этого условия для построения фонового состояния  $S_0$  приводит к смешиванию в одном состоянии разных частотных распределений и увеличению квазиэнтропии состояния.

Для приближения число точек области восстановления, включаемых в фоновое состояние, невелико и расположены такие точки только вблизи границы, где ошибки неизбежны в любом случае. Квазиэнтропия фона и ее вклад в квазиэнтропию  $H^A$  не превышают для любой из шести томограмм 0.069 б/п и 0.014 б/п, соответственно. Поэтому способ построения фонового состояния для приближения не требует изменений. Однако для детальных составляющих получаемые значения заметно больше. Чем ниже уровень шума на исходной томограмме, тем больше точек области измерений попадает в фоновое состояние  $S_0$  и тем сильнее их негативное влияние, и наоборот. Так, для детальных составляющих  $X^V$ ,  $X^H$ ,  $X^D$  томограммы Т3 значения квазиэнтропии фона и их вклад в значения квазиэнтропии (в скобках) равны 0.082 (0.016), 0.083 (0.017), 0.092 (0.019) б/п, а для томограммы Т6 — 0.491 (0.105), 0.579 (0.126), 0.758 (0.175) б/п. Для уменьшения этих величин нужно изменить способ формирования фонового состояния.

Одна из возможностей заключается в том, чтобы разделить фоновое состояние  $S_0$  на два состояния:  $S_{00}$  и  $S_{01}$ . Первое из них определяется условием  $LU = U = RU = L = 0$ , где  $LU$  и  $RU$  — элементы, расположенные сверху слева и сверху справа от рассматриваемого элемента, а

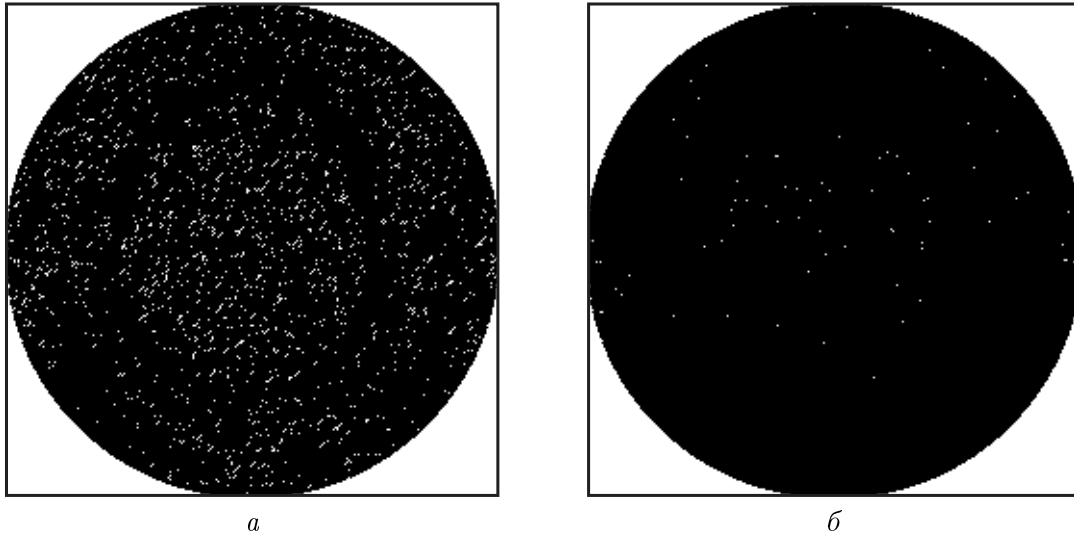


Рис. 3. Маски состояний  $U = L = 0$  (а) и  $LU = U = RU = L = 0$  (б) для диагональной детальной составляющей ДВП томограммы Т6.

второе содержит все остальные точки исходного состояния. Состояние  $S_{00}$  почти не содержит точек области восстановления (см. рис. 3б), и, кроме того, ему не принадлежат некоторые из расположенных вблизи границы точек фона, которые входят в состояние  $S_0$ . В результате вероятность состояния  $S_{00}$  немного меньше вероятности состояния  $S_0$ , а квазиэнтропия значительно меньше. Квазиэнтропия состояния  $S_{01}$  больше квазиэнтропии состояния  $S_0$ , но вероятность состояния  $S_{01}$  мала. Использование двух состояний всегда обеспечивает выигрыш, величина которого варьируется в широких пределах в зависимости от вида томограммы. Отметим, что простая замена условия для фонового состояния не дает такого положительного эффекта. В отсутствие состояния  $S_{01}$  все его точки попадают в состояние  $S_1$ , квазиэнтропия которого примерно вдвое больше квазиэнтропии состояния  $S_{01}$ .

Результирующее уменьшение  $\delta_0$  квазиэнтропии  $H^W$ , связанное с использованием двух состояний для описания фона, не зависит от числа и значений порогов. Значения  $\delta_0$  для шести томограмм приведены в десятом столбце Таблицы. Они составляют сотые или тысячные доли б/п и, как и следовало ожидать, минимальны для Т3 и Т4 и максимальны для Т5 и Т6.

### 5.3. Повторное использование ДВП для приближения

Как уже упоминалось, приближение  $\mathbf{X}^A$  сохраняет многие статистические свойства исходной томограммы  $\mathbf{X}$ . Поэтому можно ожидать, что повторное применение ДВП к приближению  $\mathbf{X}^A$  и сжатие полученных компонент разложения  $\mathbf{X}^{AA}$ ,  $\mathbf{X}^{AV}$ ,  $\mathbf{X}^{AH}$  и  $\mathbf{X}^{AD}$  описанным в разделе 4 методом дадут некоторое улучшение результатов. Сказанное подтверждается приведенными ниже экспериментальными данными. Уменьшение  $\delta_1$  квазиэнтропии  $H^W$ , обусловленное повторным применением ДВП к приближению  $\mathbf{X}^A$ , равно

$$\delta_1 = \frac{1}{4} \left( H^A - \frac{1}{4} (H^{AA} + H^{AV} + H^{AH} + H^{AD}) \right),$$

где  $H^{AA}$ ,  $H^{AV}$ ,  $H^{AH}$  и  $H^{AD}$  — квазиэнтропии соответствующих компонент разложения. Значения  $\delta_1$  для рассматриваемых томограмм приведены в одиннадцатом столбце Таблицы. Они зависят от числа выбираемых порогов и составляют сотые и тысячные доли б/п.

Приведенные в последнем столбце Таблицы значения  $\delta_{01}$  — это те улучшения, которых можно достичь при одновременном использовании описанных в п. 5.2 и п. 5.3 модификаций.

Обратим внимание на то, что  $\delta_{01} > \delta_0 + \delta_1$ , поскольку при сжатии детальных составляющих приближения для описания фона также используются два состояния (см. п. 5.2).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уже основной вариант предложенного в настоящей работе метода заметно эффективнее метода сжатия с использованием предсказания. Во всех рассмотренных случаях коэффициент сжатия метода с использованием ДВП оказался выше, в отдельных случаях выигрыш составил порядка 10 %. Предложенные модификации позволяют еще несколько улучшить результаты и могут применяться в любых сочетаниях или не применяться вообще, в зависимости от специфики задачи, ограничений сложности и объема вычислений, и т. д. Важно, однако, детально разобраться в причинах, по которым сжатие компонент ДВП оказывается эффективней сжатия ошибок простейшего предсказания.

Основное отличие ДВП от предсказания состоит в том, что свертка позволяет “заглядывать вперед” по строке и по столбцу. Это означает, что любой элемент каждой из четырех составляющих разложения зависит от соседних элементов (в исходной томограмме), расположенных не только слева и/или сверху от него, но и справа и/или снизу. Другое отличие заключается в том, что число таких соседей равно 24 для приближения, 14 для вертикальной и горизонтальной детальных составляющих и 8 для диагональной детальной составляющей, т. е. намного больше, чем при простейшем предсказании по двум соседям. Необходимо выяснить, какой из этих двух факторов важнее, и, кроме того, понять, повысит ли эффективность предсказания увеличение числа элементов контекста и имеет ли смысл “заглядывать вперед”, по крайней мере, для части отсчетов без выполнения свертки.

Еще одна задача связана со способом построения состояний. В предложенном методе все компоненты разложения сжимались независимо, а состояние текущего элемента любой компоненты определялось значениями предшествующих ему элементов той же компоненты, что обеспечивало вычислимость состояний. Однако, как отмечалось во введении, при использовании ДВП в задачах, связанных с передачей данных, приближение обычно обрабатывается и передается в первую очередь, отдельно от других составляющих. В таком случае при построении состояний для детальных составляющих есть возможность использовать значения любых элементов приближения, и построенные таким образом состояния остаются вычислимыми. Позволит ли это повысить эффективность сжатия — вопрос отдельного исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. N. Witten, R. M. Neal, and J. G. Cleary. Arithmetic Coding for Data Compression. *Commun. of the ACM*, 1987, vol. 30, no. 6, pp. 520–540.
2. Д. В. Сушко, Ю. М. Штарьков. О сжатии томографических данных. *Информационные процессы*, 2008, т. 8, № 4, стр. 240–255.
3. Р. Гонсалес, Р. Вудс. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005.
4. И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
5. D. LeGall and A. Tabatabai. Sub-band Coding of Digital Images Using Symmetric Short Kernel Filters and Arithmetic Coding Techniques. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Signal Speech Process*, New York, 1988, pp. 761–765.
6. W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1996, vol. 3, no. 2, pp. 186–200.

Статью представил к публикации член редколлегии Н. А. Кузнецов