Информационные процессы, Том 9, № 3, 2009, стр. 147–160.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

О многолинейной системе массового обслуживания с прерывающимся полумарковским потоком заявок и выбиванием заявок из накопителя неограниченной емкости[1]

В.В. Чаплыгин

Институт проблем информатики РАН, Москва
Поступила в редколлегию 01.04.2009

Аннотация—Рассмотрена система массового обслуживания с прерывающимся полумарковским потоком заявок и выбиванием заявок из накопителя. Новые заявки поступают на приборы или в накопитель только на интервалах времени, когда доступ в систему открыт. Заявки теряются, если в момент их поступления доступ в систему закрыт. Длины интервалов с открытым и закрытым доступом в систему чередуются, их длины распределены по экспоненциальному закону. Первая заявка, поступившая в систему на интервале с открытым доступом, выбивает все заявки из накопителя. Для случая, когда емкость накопителя неограниченна, найдены стационарные характеристики системы.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Мгновенное опустошение (очистка) очереди представляет собой одну из особенностей функционирования систем массового обслуживания (СМО), которые наиболее характерны для современной инфотелекоммуникации. Как правило, очистка очереди возникает в случае аварийных сбоев системы, например, вследствие неправильной работы обслуживающих устройств, негативного воздействия внешних факторов, перегруженности системы, и зачастую служит одним из этапов восстановления нормальной работы. В некоторых случаях принудительная очистка очереди проводится в профилактических целях для предотвращения сбоев в функционировании системы.

Разработка методов расчета стационарных характеристик СМО с выбиванием заявок является продолжением исследований СМО с прерывающимся полумарковским потоком заявок, начатых в работах [1,2]. Сами методы опираются на идеи конструктивных построений, выполненных в работе [3] для многолинейной СМО SM/MSP/n/r с полумарковским потоком заявок и марковским обслуживанием (следует отметить, что некоторые использованные приемы отыскания характеристик системы, можно найти в работах [4,5] для СМО с рекуррентным потоком заявок). Исследования СМО с полумарковским входящим потоком, помимо упомянутых работ [1,2], можно найти в работах [6]–[20]. В частности, однолинейные СМО с полумарковским потоком рассматривались в работах [6,7], некоторые примеры СМО SM/M/1/r приводятся в монографии [8]. Работы [9]–[11] посвящены однолинейным СМО SM/MSP/1 с потоком отрицательных заявок. В работах [12,13] рассмотрены многолинейные СМО с групповым полумарковским входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием заявок. Серия работ [14]–[17] посвящена многолинейной СМО с полумарковским входящим потоком, обслуживанием фазо-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-07-00152 и № 09-07-12032)

вого типа и ненадежными приборами. СМО с полумарковским потоком и нестандартными процедурами обслуживания заявок рассмотрены в работах [18]–[20].

В настоящей работе рассматривается СМО с прерывающимся потоком заявок и выбиванием заявок из накопителя бесконечной емкости. Очистка очереди в этой СМО реализуется следующим образом. Доступ в систему для заявок, поступающих в моменты смены фаз полумарковского процесса, открыт только в определенные интервалы времени, которые чередуются с интервалами с закрытым доступом (в этом случае будем говорить, что поток заблокирован). Мгновенное опустошение очереди происходит в момент поступления первой заявки на интервале с открытым доступом (происходит выбивание заявок из накопителя системы). На основе методов, подробно изложенных в работах [3, 4], ниже получены математические соотношения для расчета стационарных характеристик системы. Методы расчета стационарных характеристик для аналогичной СМО с конечным накопителем можно найти в работе [2].

Обратимся теперь непосредственно к описанию рассматриваемой в настоящей работе СМО с прерывающимся полумарковским потоком заявок и выбиванием заявок.

В системе имеется n работающих независимо друг от друга идентичных приборов, которые обслуживают поступающие на них однотипные заявки. Каждый из приборов может находиться на одной из J, $1 \leqslant J < \infty$, фаз обслуживания. Время обслуживания заявки на каждом приборе распределено по закону фазового типа с параметрами $\boldsymbol{h}$ и H, где $\boldsymbol{h}$ — вектор-строка размерности J, а H — квадратная матрица порядка J. Функция распределения фазового типа времени обслуживания заявки записывается в виде (ниже через $\mathbf{1}$ будем обозначать вектор-столбец из единиц, через $\mathbf{0}$ — нулевую вектор-строку, через E — единичную матрицу и через 0, кроме непосредственно скалярного нуля, будем обозначать нулевую матрицу, размерность и порядок которых определяются нижним индексом или из контекста)

$$H(x) = 1 - \boldsymbol{h}\, e^{Hx}\mathbf{1}. \tag{1}$$

Опишем поступающий в систему поток заявок.

Рассмотрим полумарковским процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, I\}$, $1 \leqslant I < \infty$. В каждый момент изменения состояния полумарковского процесса генерируется новая заявка, которая готова поступить в систему на обслуживание. Вероятность того, что полумарковский процесс за время меньше x перейдет из состояния i сразу в состояние j, $i, j = \overline{1, I}$, равна $A_{ij}(x)$. Будем рассматривать стационарный режим функционирования полумарковского процесса генерации заявок. Среднее время между изменениями состояний полумарковского процесса в стационарном режиме можно записать в виде

$$a = \boldsymbol{\pi}_a \int\limits_0^\infty x\, dA(x)\, \mathbf{1}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\pi}_a$ — вектор-строка стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова полумарковского процесса, $A(x)$ — матрица из элементов $A_{ij}(x)$. Будем предполагать, что $0 < a < \infty$. Заявки, которые генерируются полумарковским процессом, образуют полумарковский поток заявок. Более подробное описание полумарковского потока, а также некоторые естественные дополнительные предположения относительно его параметров, которые мы будем предполагать выполненными, можно найти, например, в работе [3].

Процедура блокировки полумарковского потока заявок определяется следующим образом.

Пусть за «малое» время Δ с вероятностью $\alpha\Delta + o(\Delta)$ происходит блокировка потока заявок, поступающих в систему, а именно, начиная с этого момента, заявки, генерируемые полумарковским процессом, в систему не попадают, а теряются. Заявки, находящиеся в системе, систему не покидают, а продолжают обслуживаться (заявки на приборах) или ожидать обслуживания (заявки в накопителе) до момента поступления первой заявки после разблокировки потока. Если поток заблокирован, то за «малое» время Δ с вероятностью $\beta\Delta + o(\Delta)$ поток разблокируется, и заявки вновь будут поступать в систему на обслуживание. Первая заявка, поступившая в систему на периоде времени, когда поток разблокирован, выбивает все заявки из накопителя, если таковые имеются, а сама занимает первое место в очереди. Заявки на приборах продолжают обслуживание. Все последующие заявки, поступающие в систему на периоде времени, когда поток разблокирован, поступают в накопитель, если все n приборов заняты, не выбивая другие заявки.

Будем предполагать, что интенсивность α блокировки и интенсивность β разблокировки входящего потока — строго положительные конечные величины. Это условие и условия, накладываемые на полумарковский процесс генерации заявок, обеспечивают существование стационарного режима для СМО с бесконечным накопителем.

Заявки из накопителя обслуживаются в порядке их поступления в систему. Генерация заявок полумарковским потоком не зависит от того, заблокировано поступление заявок в систему или нет.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Воспользуемся построениями, полученными в работе [3] для многолинейной СМО с полумарковским потоком заявок и марковским обслуживанием.

Общий процесс обслуживания всеми приборами, на каждом из которых время обслуживания распределено по закону фазового типа, может быть описан в виде марковского процесса обслуживания следующим образом.

Если в системе находится k, $k \geqslant 0$, заявок, то процесс обслуживания может находиться в одном из l_k, $l_k < \infty$, состояний (фаз обслуживания), причем интенсивность смены фаз марковского процесса определяется элементами матриц Λ_k, $k \geqslant 0$, если ни одна заявка не обслужилась, и элементами матриц N_k, $k \geqslant 1$, если заявка обслужилась. Предполагается, что $l_k = l$ при $k \geqslant n$, $\Lambda_k = \Lambda$ при $k \geqslant n$, а $N_k = N$ при $k \geqslant n+1$. Матрицу $\Lambda + N$ будем предполагать неразложимой, а матрицу N — ненулевой.

Если в системе находится k, $k = \overline{0, n-1}$, заявок, будем предполагать, что при поступлении новой заявки в систему марковский процесс обслуживания переходит на фазу, которая определяется элементами матриц Ω_k.

Более подробное описание структуры такого марковского процесса, а также способ формирования его инфинитезимальной матрицы по заданному PH-распределению обслуживания заявки на каждом приборе можно найти в работах [4, 3].

Введем следующие вспомогательные обозначения.

Обозначим через $q_{ij}(x)$, $i, j = 0, 1$, вероятность того, что через время x поступление заявок будет заблокировано, если $j = 0$, и поступление заявок будет разблокировано, если $j = 1$, при условии, что в начальный момент времени поступление заявок заблокировано, если $i = 0$, и разблокировано, если $i = 1$.

Можно показать [1], что

$$q_{00}(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x},$$

$$q_{01}(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x},$$

$$q_{10}(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x},$$

$$q_{11}(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x}.$$

Обозначим через $\tilde{q}_1(x)$ вероятность того, что за время x состояние блокировки входящего потока заявок ни разу не поменяется при условии, что в начальный момент времени поток заявок был разблокирован. Через $\tilde{q}_{11}(x)$ обозначим вероятность того, что за время x состояние блокировки поменяется хотя бы раз, но к моменту x останется разблокированным при условии, что в начальный момент времени поток заявок был разблокирован. Для функций $\tilde{q}_1(x)$ и $\tilde{q}_{11}(x)$ нетрудно получить следующие выражения:

$$\tilde{q}_1(x) = e^{-\alpha x},$$

$$\tilde{q}_{11}(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)x} - e^{-\alpha x}.$$

Определим следующие вспомогательные матрицы:

$$A_k^{ij} = \int\limits_0^\infty q_{ij}(x)\, dA(x) \otimes F_k(x), \quad k \geqslant 0, \quad i,j = 0,1, \tag{3}$$

$$\tilde{A}_k^{11} = \int\limits_0^\infty \tilde{q}_{11}(x)\, dA(x) \otimes F_k(x), \quad k \geqslant 0,$$

$$\tilde{A}_k^{1} = \int\limits_0^\infty \tilde{q}_{1}(x)\, dA(x) \otimes F_k(x), \quad k \geqslant 0, \tag{4}$$

$$A_{kw}^{i1} = \int\limits_0^\infty q_{i1}(x) dA(x) \otimes (F_{k,w}(x)\, \Omega_w), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geqslant w, \quad i = 0,1,$$

$$\tilde{A}_{kw}^{i1} = \int\limits_0^\infty q_{i1}(x) dA(x) \otimes F_{k,w}(x), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geqslant w, \quad i = 0,1, \tag{5}$$

$$A_{kw}^{i0} = \int\limits_0^\infty q_{i0}(x) dA(x) \otimes F_{k,w}(x), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geqslant w, \quad i = 0,1, \tag{6}$$

где матрицы $F_k(x)$, $k \geqslant 0$, определяются соотношениям

$$F_0(x) = e^{\Lambda x}, \tag{7}$$

$$F_k(x) = \int\limits_0^x F_{k-1}(y)\, N\, F_0(x-y)\, dy, \quad k \geqslant 1, \tag{8}$$

а $F_{kw}(x)$ — матрица, элементы которой представляют собой вероятности того, что за время x обслужится $k-w$ заявок при условии, что в начальный момент в системе было ровно k заявок с учетом соответствующей смены фаз процессом обслуживания. Для матриц $F_{kw}(x)$ также можно выписать рекуррентные соотношения, аналогичные соотношениям (7), (8) для матриц $F_k(x)$, которые в точности будут совпадать с формулами, полученными для матриц $F_{kw}(x)$ при исследовании СМО SM/MSP/n/r в работе [3], и поэтому мы их не приводим. Там же, а также в работах [4,5] можно найти алгоритмические методы численного расчета матриц $F_k(x)$ и $F_{kw}(x)$ и матриц, аналогичных матрицам $A_k^{ij}(x)$ и $A_{kw}^{ij}(x)$.

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ

Обозначим через τ_n, $n \geqslant 0$, последовательные моменты смены фаз полумарковского процесса генерации заявок и через ξ_n, η_n, ν_n, $\varkappa_n$ обозначим соответственно фазы марковского процесса обслуживания и полумарковского процесса генерации заявок, число заявок в системе, состояние блокировки полумарковского потока (0 — поток заблокирован, 1 — поток разблокирован) в момент времени $(\tau_n + 0)$, $n \geqslant 0$. Рассмотрим вложенную цепь Маркова $\{\zeta_n = (\xi_n, \eta_n, \nu_n, \varkappa_n),\ n \geqslant 0\}$, образованную моментами смены фаз полумарковского процесса генерации заявок.

Обозначим через p_{ik}^m, $m = 0,1$, $i = l_k(u-1)+v$, $u = \overline{1,I}$, $v = \overline{1,l_k}$, $k \geqslant 0$, стационарную вероятность того, что сразу после смены фаз полумарковского процесса в системе находится k заявок, фаза полумарковского процесса генерации заявок находится на фазе u и марковский процесс обслуживания находится на фазе v и, если $m=0$, то поток заявок заблокирован, а, если $m=1$, то поток заявок разблокирован. Положим $\boldsymbol{p}_k^m = (p_{1k}^m, \ldots, p_{Il_k,k}^m)$, $\boldsymbol{p}_k = (\boldsymbol{p}_k^0, \boldsymbol{p}_k^1)$, $m = 0,1$, $k \geqslant 0$, $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots)$.

Матрица переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, порождаемой моментами смены состояний полумарковского процесса генерации заявок, принимает вид

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & 0 & 0 & \ldots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & 0 & \ldots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{32} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где матрицы P_{ij} определяются соотношениями

$$P_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{i,i}^{01} \\ 0 & A_{i,i}^{11} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$P_{i,0} = \begin{pmatrix} A_{i,0}^{00} & 0 \\ A_{i,0}^{10} & 0 \end{pmatrix}, \quad i \geqslant 0,$$

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i,j}^{00} & A_{i,j-1}^{01} \\ A_{i,j}^{10} & A_{i,j-1}^{11} \end{pmatrix}, \quad i \geqslant 1, \quad j = \overline{1, \min\{i, n-1\}},$$

$$P_{i,n+1} = \begin{pmatrix} A_{i-n-1}^{00} & \sum\limits_{j=0}^{i-n} A_j^{01} \\ A_{i-n-1}^{10} & A_{i-n}^{11} + \sum\limits_{j=0}^{i-n-1} \tilde{A}_j^{11} \end{pmatrix}, \quad i \geqslant n+1,$$

$$P_{n,n+1} = \begin{pmatrix} 0 \; A_0^{01} \\ 0 \; A_0^{11} \end{pmatrix},$$

$$P_{i,i+1} = Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_0^1 \end{pmatrix}, \quad i \geqslant n+1, \tag{9}$$

$$P_{i,n} = \begin{pmatrix} A_{i-n}^{00} \; A_{i,n-1}^{01} \\ A_{i-n}^{10} \; A_{i,n-1}^{11} \end{pmatrix}, \quad i \geqslant n,$$

$$P_{i,j} = Q_{i-j+1} = \begin{pmatrix} A_{i-j}^{00} & 0 \\ A_{i-j}^{10} & \tilde{A}_{i-j+1}^1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{n+2, i}, \quad i \geqslant n+1. \tag{10}$$

Покомпонентно система уравнений равновесия (СУР) для вложенной цепи Маркова можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{p}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{p}_i P_{i,0}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{p}_k = \sum_{i=k-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i P_{i,k}, \quad k = \overline{1, n+1}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{p}_k = \sum_{i=k-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i Q_{i-k+1}, \quad k \geqslant n+2, \tag{13}$$

где матрицы Q_k, $k \geqslant 0$, определяются соотношениями (9) и (10).

Можно показать, что цепь Маркова с матрицей P переходных вероятностей является положительно возвратной, а матрица P — неразложима. Известно (см. [8], теорема 1.2.1 на стр. 10), что в этом случае система уравнений равновесия (11)–(13) имеет матрично-геометрическое решение вида

$$\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}_{n+1} G^{k-n-1}, \quad k > n+1,$$

где матрица G является, в свою очередь, минимальным неотрицательным решением матричного функционального уравнения

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} G^k Q_k, \tag{14}$$

причем все собственные значения матрицы G по модулю строго меньше единицы. В силу этой же теоремы последовательность $\{G^{(i)},\ i \geqslant 0\}$, каждый член которой образован подстановкой предыдущего, начиная с $G^{(0)} = O$, в правую часть уравнения (14), сходится к решению этого уравнения.

Поскольку все матрицы Q_k представляют собой блочные нижние треугольные матрицы и матрица $Q^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k$ является разложимой матрицей, то и матрица G как предел последовательности $\{G^{(i)},\ i \geqslant 0\}$ является разложимой блочной нижней треугольной матрицей, то есть имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

где размеры блоков совпадают с соответствующими размерами блоков матриц Q_k из соотношения (10). Матричное уравнение (14) можно заменить следующими уравнениями для каждой из матриц G_{11}, G_{21}, G_{22} в отдельности:

$$G_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} G_{11}^k A_k^{00}, \tag{15}$$

$$G_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} G_{22}^k \tilde{A}_{k+1}^1, \tag{16}$$

$$G_{21} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} G_{22}^i G_{21} G_{11}^{k-1-i} A_k^{00} + \sum_{k=0}^{\infty} G_{22}^k A_k^{10}. \tag{17}$$

Очевидно, что для отыскания матриц G_{11}, G_{22}, G_{21} вместо уравнения (14) можно использовать уравнения (15)–(17), применяя к ним указанную выше итерационную процедуру.

Вектора $\boldsymbol{p}_k$, $k = \overline{0, n-1}$, находятся из приведенной конечной системы уравнений

$$\boldsymbol{p}_0 = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i P_{i,0} + \boldsymbol{p}_{n+1} \sum_{i=n+1}^{\infty} G^{i-n-1} P_{i,0}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{p}_k = \sum_{i=k-1}^{n} \boldsymbol{p}_i P_{i,k} + \boldsymbol{p}_{n+1} \sum_{i=n+1}^{\infty} G^{i-n-1} P_{i,k}, \quad k = \overline{1, n+1}, \tag{19}$$

Система уравнений (18), (19) имеет единственное с условием нормировки следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{p}_k + \boldsymbol{p}_{n+1} (I - G)^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

4. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОТЕРИ ЗАЯВКИ

Обозначим через q_{ik}^m, $m = 0, 1$, $i = l_k(u-1) + v$, $u = \overline{1, I}$, $v = \overline{1, l_k}$, $k \geqslant 0$, стационарную вероятность того, что непосредственно до момента смены фаз процесса генерации заявок в системе было k других заявок, полумарковский процесс генерации заявок находился на фазе u, марковский процесс обслуживания — на фазе v и, если $m = 0$, то поступление заявок в систему было заблокировано, а если $m = 1$, то поступление заявок в систему было разблокировано. Положим $\boldsymbol{q}_k^m = (q_{1k}^m, \ldots, q_{Il_k,k}^m)$, $\boldsymbol{q}_k = (\boldsymbol{q}_k^0, \boldsymbol{q}_k^1)$, $m = 0, 1$, $k \geqslant 0$.

Векторы $\boldsymbol{q}_k$, $k \geqslant 0$, стационарных вероятностей того, что поступающая заявка застанет в системе k других заявок и соответствующие фазы процессов генерации и обслуживания, для случая бесконечного накопителя имеют вид

$$\boldsymbol{q}_k = \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j \tilde{P}_{j,k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{q}_k = \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j \tilde{P}_{j-k}, \quad k \geqslant n, \tag{21}$$

где матрицы $\tilde{P}_{ij}$, $\tilde{P}_k$ определяются соотношениями

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ij}^{00} & \tilde{A}_{ij}^{01} \\ A_{ij}^{10} & \tilde{A}_{ij}^{11} \end{pmatrix}, \quad i \geqslant j, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{22}$$

$$\tilde{P}_k = \begin{pmatrix} A_k^{00} & A_k^{01} \\ A_k^{10} & A_k^{11} \end{pmatrix}, \quad k \geqslant 0,$$

а матрицы A_k, A_{kw}^{i0}, $\tilde{A}_{kw}^{i1}$ определяются, в свою очередь, соотношениями (3)–(6). В формуле (22) стоят матрицы $\tilde{A}_{ij}^{01}$ и $\tilde{A}_{ij}^{11}$ вместо соответственно A_{ij}^{01} и A_{ij}^{11}, поскольку розыгрыш фаз происходит только в момент смены фаз полумарковского процесса генерации заявок и учитывать его с помощью матриц Ω_k не требуется.

Получим соотношения, связывающие вектора $\boldsymbol{q}_k$ и $\boldsymbol{p}_k$, $k \geqslant 0$.

Запишем вначале СУР (11)–(13) следующим образом.

При $k = 0$:

$$\boldsymbol{p}_0^0 = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 A_{i0}^{00} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{i0}^{10}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{p}_0^1 = \boldsymbol{0},$$

При $k = \overline{1, n-1}$:

$$\boldsymbol{p}_k^0 = \sum_{i=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 A_{ik}^{00} + \sum_{i=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{ik}^{10}, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{p}_k^1 = \sum_{i=k-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 A_{i,k-1}^{01} + \sum_{i=k-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{i,k-1}^{11}, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{25}$$

При $k = n$:

$$\boldsymbol{p}_n^0 = \sum_{i=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 A_{i-n}^{00} + \sum_{i=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{i-n}^{10}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{p}_n^1 = \sum_{i=n-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 A_{i,n-1}^{01} + \sum_{i=n-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{i,n-1}^{11}, \tag{27}$$

При $k = n + 1$:

$$\boldsymbol{p}_{n+1}^0 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 A_{i-n-1}^{00} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{i-n-1}^{10}, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{p}_{n+1}^1 = \sum_{i=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 \sum_{j=0}^{i-n} A_j^{01} + \sum_{i=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{i-n}^{11} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 \sum_{j=0}^{i-n-1} \tilde{A}_j^{11}, \tag{29}$$

При $k \geqslant n+2$:

$$\boldsymbol{p}_k^0 = \sum_{i=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^0 A_{i-k}^{00} + \sum_{i=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 A_{i-k}^{10}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{p}_k^1 = \sum_{i=k-1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^1 \tilde{A}_{i-k+1}^1, \tag{31}$$

Теперь обратимся к соотношениям (20), (21) для векторов $\boldsymbol{q}_k$, $k \geqslant 0$.

При $k = \overline{0, n-1}$:

$$\boldsymbol{q}_k^0 = \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 A_{j,k}^{00} + \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 A_{j,k}^{10}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{q}_k^1 = \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 \tilde{A}_{j,k}^{01} + \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 \tilde{A}_{j,k}^{11}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{33}$$

При $k \geqslant n$:

$$\boldsymbol{q}_k^0 = \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 A_{j-k}^{00} + \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 A_{j-k}^{10}, \quad k \geqslant n, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{q}_k^1 = \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 A_{j-k}^{01} + \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 A_{j-k}^{11}, \quad k \geqslant n, \tag{35}$$

Сравнение формул (23), (24), (26), (28), (30) и (32), (34) дает соотношения

$$\boldsymbol{p}_k^0 = \boldsymbol{q}_k^0, \quad k \geqslant 0, \tag{36}$$

формул (25), (27) и (33) — соотношения

$$\boldsymbol{p}_{k+1}^1 = \boldsymbol{q}_k^1 (E_m \otimes \Omega_k), \quad k = \overline{0, n-1},$$

и, наконец, формулы (29), (31), (35) приводят к равенству

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \boldsymbol{p}_{k+1}^1 = \sum_{k=n}^{\infty} \boldsymbol{q}_k^1.$$

Заметим, что для векторов $\boldsymbol{q}_k$, $k \geqslant 0$, выполняется очевидное соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{q}_k \mathbf{1} = 1.$$

Соотношения для вероятности π_1 того, что новая заявка в момент генерации не встанет на прибор и не попадет в накопитель, и для вероятности π_2 того, что в момент генерации не попадет в накопитель, принимают вид

$$\pi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{q}_k^0 \mathbf{1}, \tag{37}$$

$$\pi_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{q}_k \mathbf{1} + \sum_{i=n}^{\infty} \boldsymbol{q}_k^0 \mathbf{1}. \tag{38}$$

Убедимся в том, что вероятность π_1 не зависит от параметров обслуживания. Выражение (37) для π_1 с учетом формул (36), (32), (34) можно переписать следующим образом:

$$\pi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{q}_k^0 \mathbf{1} = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{p}_k^0 \mathbf{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 A_{j,k}^{00} \mathbf{1} + \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 A_{j,k}^{10} \mathbf{1} \right) + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 A_{j-k}^{00} + \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 A_{j-k}^{10} \right) \mathbf{1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_j^0 \sum_{k=0}^{j} A_{j,k}^{00} \mathbf{1} + \sum_{j=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_{j,k}^{00} \mathbf{1} + \sum_{k=n}^{j} A_{j-k}^{00} \mathbf{1} \right)$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_j^1 \sum_{k=0}^{j} A_{j,k}^{10} \mathbf{1} + \sum_{j=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_{j,k}^{10} \mathbf{1} + \sum_{k=n}^{j} A_{j-k}^{10} \mathbf{1} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_j^0 \left(\int_0^{\infty} q_{00}(x) dA(x) \otimes E \right) \mathbf{1} + \sum_{j=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^0 \int_0^{\infty} q_{00}(x) dA(x) \otimes E \mathbf{1}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_j^1 \int_0^{\infty} q_{10}(x) dA(x) \otimes E \mathbf{1} + \sum_{j=n}^{\infty} \boldsymbol{p}_j^1 \int_0^{\infty} q_{10}(x) dA(x) \otimes E \mathbf{1}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\pi}}^0 \int_0^{\infty} q_{00}(x) dA(x) \mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\pi}}^1 \int_0^{\infty} q_{10}(x) dA(x) \mathbf{1} = \hat{\boldsymbol{\pi}}^0 \mathbf{1},$$

где вектор-строки $\hat{\boldsymbol{\pi}}^0$ и $\hat{\boldsymbol{\pi}}^1$ определяются из СУР

$$(\hat{\boldsymbol{\pi}}^0, \hat{\boldsymbol{\pi}}^1) = (\hat{\boldsymbol{\pi}}^0, \hat{\boldsymbol{\pi}}^1) \int_0^{\infty} B(x) \otimes dA(x),$$

$$B = \begin{pmatrix} q_{00}(x) & q_{01}(x) \\ q_{10}(x) & q_{11}(x) \end{pmatrix}$$

с условием нормировки $(\hat{\boldsymbol{\pi}}^0 + \hat{\boldsymbol{\pi}}^1)\mathbf{1} = 1$.

5. СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВКИ В СИСТЕМЕ

В этом пункте получим соотношения, позволяющие рассчитывать среднее время ожидания начала обслуживания и среднее время пребывания заявки, попавшей в систему и не выбитой другими заявками.

Введем вектор-строки $\hat{\boldsymbol{p}}_k(j) = (\hat{\boldsymbol{p}}_k^0(j), \hat{\boldsymbol{p}}_k^1(j))$, $\hat{\boldsymbol{p}}_k^m(j) = (\hat{p}_{1k}^m(j), \ldots, \hat{p}_{Il,k}^m(j))$, $k \geqslant 1$, $j \geqslant 0$, $m = 0, 1$, где $\hat{p}_{ik}^m(j)$, $i = l(u-1)+v$, $u = \overline{1, I}$, $v = \overline{1, l}$, представляет собой стационарную вероятность того, что произвольная заявка попадет в накопитель и после j-го момента смены фаз полумарковского процесса останется в накопителе на k-м месте, причем полумарковский процесс генерации заявок будет находиться на фазе u, марковский процесс обслуживания — на фазе v и, если $m = 0$, то поступление заявок в систему было заблокировано, а если $m = 1$, то поступление заявок в систему было разблокировано. Обозначим через $\hat{\boldsymbol{p}}(j)$, $j \geqslant 0$, вектор-строку $\hat{\boldsymbol{p}}(j) = (\hat{\boldsymbol{p}}_1(j), \hat{\boldsymbol{p}}_2(j), \ldots)$. Заметим, что вектор $\hat{\boldsymbol{p}}(0)$ представляет собой вектор стационарных вероятностей того, что новая заявка попадет в накопитель при соответствующих значениях фаз процессов генерации и обслуживания. Другими словами,

$$\hat{\boldsymbol{p}}(0) = (\boldsymbol{0}_{Il}, \boldsymbol{p}_{n+1}^1, \boldsymbol{0}_{Il}, \boldsymbol{p}_{n+2}^1, \ldots).$$

Рассмотрим блочную матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{n+1,n+1} & 0 & 0 & \cdots \\ \hat{P}_{n+2,n+1} & \hat{P}_{n+2,n+2} & 0 & \cdots \\ \hat{P}_{n+3,n+1} & \hat{P}_{n+3,n+2} & \hat{P}_{n+3,n+3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{P}_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i-j}^{00} & 0 \\ A_{i-j}^{10} & \tilde{A}_{i-j}^{1} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{n+1, i}, \quad i \geqslant n+1.$$

Вектор $\hat{\boldsymbol{p}}(1)$ найдем по формуле

$$\hat{\boldsymbol{p}}(1) = \hat{\boldsymbol{p}}(0)\hat{P}.$$

Покомпонентно для вектора $\hat{\boldsymbol{p}}(1)$ имеем

$$\hat{\boldsymbol{p}}_i^0(1) = \sum_{k=n+i}^{\infty} \boldsymbol{p}_k^1 A_{k-(n+i)}^{10}, \ i \geqslant 1,$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_i^1(1) = \sum_{k=n+i}^{\infty} \boldsymbol{p}_k^1 \tilde{A}_{k-(n+i)}^{1} = \boldsymbol{p}_{n+i+1}^1, \ i \geqslant 1.$$

Составляющие остальных векторов $\hat{\boldsymbol{p}}(j)$, $j \geqslant 2$, в силу уравнений (31) находятся рекуррентно из соотношений

$$\hat{\boldsymbol{p}}_i^0(j) = \sum_{k=i}^{\infty} \boldsymbol{p}_k^0(j-1)\, A_{k-i}^{00} + \sum_{k=i}^{\infty} \boldsymbol{p}_{n+k+j-1}^1\, A_{k-i}^{10}, \ i \geqslant 1, \ j \geqslant 2,$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_i^1(j) = \boldsymbol{p}_{n+i+j}^1, \ i \geqslant 1, \ j \geqslant 2.$$

Вероятность того, что заявка, попав в накопитель, затем попадет на прибор между j-м и $(j+1)$-м моментом смены фаз процесса генерации равна $\hat{\boldsymbol{p}}(j)\boldsymbol{p}^*$, где вектор $\boldsymbol{p}^*$ имеет вид

$$\boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{p}_1^{*T}, \boldsymbol{p}_2^{*T}, \ldots)^T,$$

$$\boldsymbol{p}_k^* = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} (A_{n+k,i}^{00} + A_{n+k,i}^{01})\mathbf{1} \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (A_{n+k,i}^{10} + A_{n+k,i}^{11})\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вероятность ψ_1 того, что заявка, попав в систему, будет обслужена, равна

$$\psi_1 = \frac{1}{1-\pi_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k^1 \mathbf{1} + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{p}}(j)\boldsymbol{p}^* \right).$$

Вероятность ψ_2 того, что заявка, попав в систему, будет выбита другой заявкой, определяется соотношением

$$\psi_2 = \frac{1}{1-\pi_1} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{p}}(j)\bar{\boldsymbol{p}}, \tag{39}$$

где

$$\bar{\boldsymbol{p}} = (\bar{\boldsymbol{p}}_1^T, \bar{\boldsymbol{p}}_2^T, \ldots)^T,$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_k = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{k-1} A_j^{01}\mathbf{1} \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \tilde{A}_j^{11}\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad k \geqslant 0.$$

Можно показать, что выполняется очевидное соотношение $\psi_1 + \psi_2 = 1$.

Обозначим через $\boldsymbol{a}_k$, $k = \overline{1, r}$, вектор-столбец, координатами которого являются средние времена, проведенные заявкой, находившейся в накопителе на k-м месте сразу после очередного момента смены фаз процесса генерации при соответствующих значениях фаз процесса генерации и процесса обслуживания, до момента попадания этой заявки на прибор при условии, что она попадет на прибор до следующего момента смены фаз процесса генерации. Для векторов $\boldsymbol{a}_k$ справедливы соотношения

$$\boldsymbol{a}_k = \int\limits_0^{\infty} (\mathbf{1} - A(x)\mathbf{1}) \otimes (F_{k-1}(x)N\mathbf{1}) x dx, \quad k \geqslant 1, \tag{40}$$

где матрицы $F_k(x)$, $k \geqslant 0$, вычисляются с помощью формул (7), (8).

Выражение для среднего времени w^* ожидания начала обслуживания попавшей в накопитель заявки при условии, что она не будет выбита, записывается в виде

$$w^* = \frac{1}{1-\pi_2} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{p}}(j)(ja\mathbf{1} + \boldsymbol{a}),$$

где вектор $\boldsymbol{a}$ имеет вид $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \ldots)^T$, вектора $\boldsymbol{a}_k$, $k \geqslant 1$, определяются формулой (40), среднее время a между сменами фаз полумарковского процесса — формулой (2), а вероятность ψ_2 — формулой (39).

Среднее время w ожидания начала обслуживания попавшей в систему заявки, не выбитой другими заявками, можно записать в виде

$$w = \frac{1}{1-\pi_1} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{p}}(j)(ja\mathbf{1} + \boldsymbol{a}).$$

Среднее время v пребывания заявки в системе можно отыскать по формуле

$$v = \frac{1}{1-\pi_1} \left[b \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}_k^1 \mathbf{1} + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{p}}(j)(ja\mathbf{1} + \boldsymbol{a} + b\mathbf{1}) \right],$$

где $b = -\boldsymbol{h}H^{-1}\mathbf{1}$ — среднее время обслуживания заявки, а $\boldsymbol{h}$ и H — параметры распределения (1) фазового типа на отдельном приборе.

Таким образом, в настоящей работе разработаны методы расчета стационарных характеристик для СМО с прерывающимся полумарковским потоком заявок, обслуживанием фазового типа на каждом приборе и выбиванием заявок из накопителя бесконечной емкости первой заявкой, поступившей на периоде времени, когда доступ для поступления заявок в систему открыт. Для этой системы получены математические соотношения, позволяющие производить численные расчеты стационарного распределения числа заявок, вероятности потери заявки, вероятности того, что заявка, попав в систему, будет выбита другими заявками, средних времен ожидания начала обслуживания и пребывания в системе заявки, попавшей в систему и не выбитой другими заявками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин В.В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем и блокировкой полумарковского потока заявок. *Информационные процессы*, 2008, том 8, № 1, стр. 1–9.
2. Чаплыгин В.В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем, блокировкой полумарковского потока заявок и выбиванием заявок из накопителя. *Информатика и ее применения*, 2008, том 2, вып. 3, стр. 38–44.
3. Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания SM/MSP/n/r. *Автоматика и телемеханика*, 2004, № 9, стр. 85–100.
4. Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/n/r. *Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика»*, 2003, № 1, стр. 119–143.
5. Бочаров П. П., Д'Апиче Ч., А. В. Печинкин, Салерно С. Система массового обслуживания G/MSP/1/r. *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 2, стр. 127–143.
6. Çinlar E. Queues with semi-Markovian arrivals. *J. Appl. Prob.*, 1967, vol. 4, pp. 365–379.
7. Чаплыгин В.В. Система массового обслуживания SM/MSP/1/r. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*, 2004, № 2, стр. 60–74.
8. Neuts M. F. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach.* New York: Dover Publications Inc, 1994.
9. Semenova O. SM/MSP/1 queueing system with Markovian arrival of disasters. *Queues, Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference «Modern Mathematical Methods of Analysis and Optimization of Telecommunication Networks».* Gomel, 2003, vol. 17, pp. 220–225.

10. Семенова О.В. Оптимальное пороговое управление потоком в системе массового обслуживания SM/MSP/1 с MAP-потоком сбоев. *Вестник Брестского государственного технического университета, серия «Физика, математика, химия»,* 2003, № 5, стр. 81–85.

11. Семенова О.В. Оптимальное многопороговое управление потоком в системе SM/MSP/1 с BMAP-потоком отрицательных запросов. *Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. Материалы научной конференции.* Минск: Изд-во БГУ, 2004, стр. 143–148.

12. Takagi H., Wu D.A. Multiserver queue with semi-Markovian batch arrivals. *Computer Communications*, 2004, vol. 27 , no. 6, pp. 549–556.

13. H. Takagi, D.A. Wu. Multiserver queue with semi-Markovian batch arrivals with application to the MPEG frame sequence. *Internet Performance and Control of Network Systems III, Proceedings of SPIE.* 2002, vol. 4865, pp. 178–189.

14. Печинкин А.В., Соколов И.А., Чаплыгин В.В. Многолинейные системы массового обслуживания с независимыми отказами и восстановлениями приборов. *Системы и средства информатики: спец. выпуск «Математическое и алгоритмическое обеспечение информационно-телекоммуникационных систем».* М.: Изд-во Института проблем информатики РАН, 2006, стр. 99–123.

15. Печинкин А.В., Соколов И.А., Чаплыгин В.В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем и ненадежными приборами. *Информатика и ее применение*, 2007, том 1, № 1, стр. 27–39.

16. Печинкин А.В., Соколов И.А., Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики многолинейной системы массового обслуживания с одновременными отказами приборов. *Информатика и ее применения*, 2007, том 1, № 2, стр. 28–38.

17. Печинкин А.В., Соколов И.А., Чаплыгин В.В. Многолинейная система массового обслуживания с групповым отказом приборов. *Информатика и ее применения*, 2009, том 3 (в печати).

18. Печинкин А.В., Тришечкин С.И. Система SM_2/MSP/1/r с дисциплиной случайного выбора заявок на обслуживание и общим накопителем. *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 11, стр. 160–180.

19. Lee M.H., Dudin A.N., Klimenok V.I. The SM/M/N queueing system with broadcasting service. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, vol. 2006, pp. 1–18.

20. Dudin A.N., Klimenok V.I., Kim C.S., Lee M.H. The SM/PH/N Queueing System with Broadcasting Service. *Proccedings of the 13th International conference on analitical and stochastic modelling techniques and applications (ASMTA 2006).* Bonn, Germany, 2006, pp. 8–13.