Информационные процессы, Том 9, № 3, 2009, стр. 161–182

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Численное исследование алгоритмов расчета вероятности потерь для многопотоковых моделей пакетных сетей

А.Сегайер

Московский технический университет связи и информатики,
Министерство связи и массовых коммуникаций Российской федерации,
Москва, Россия

Поступила в редколлегию 7.09.2009

Аннотация—В работе проводится численное исследование точности многопотоковых моделей соединительных линий мультисервисных сетей (МСС) передачи информации при наличии погрешностей в значениях их параметров. Показано, что усложнение модели с целью обеспечения более точного описания явлений, происходящих в современных сетях связи, ведет и к увеличению числа параметров, описывающих функционирование такой модели. При наличии погрешностей в значениях исходных параметров это приводит к существенному росту погрешностей в значениях выходных параметров модели. Приведенные результаты показывают, что при определенных условиях более предпочтительной оказывается более простая модель соединительной линии МСС.

1. ВЕДЕНИЕ

Развитие современных сетей передачи информации идет по пути предоставления услуг различным пользователям сети с различным качеством обслуживания. Такие сети объединяются термином мультисервисные сети. Для учета особенностей различных источников нагрузки, требований к качеству обслуживания и условий обслуживания требований выделяют для каждого такого вида требований свой поток сообщений [1,2]. В результате возникают многопотоковые модели теории телетрафика. Следует отметить, что развитие сетей и обслуживания в мультисервисных сетях идет по пути увеличения числа типов обслуживаемых сообщений, приоритетов обслуживания и т.п., что приводит к значительному увеличению числа различных потоков, одновременно функционирующих в сети.

Таким образом, возникает противоречие между необходимостью детализации задачи описания функционирования сети с целью более точного определения характеристик сети и падением точности определения этих характеристик, обусловленной возрастанием числа анализируемых состояний и связанной с этим неопределенностью в значениях соответствующих параметров описания модели. Примеры проблем, возникающих при статистическом определении значений параметров моделей, приведены в [3, 4]. Это обстоятельство приводит к тому, что параметры приходится задавать в виде интервалов их возможных изменений. Поэтому возникает необходимость исследования интервальных моделей. Необходимо заметить, что в случае усложнения моделей действует эффект наложения двух негативных факторов: рост числа переменных и рост неопределенности в значениях параметров модели. Поэтому важно понять, когда усложнение модели может привести к более точному результату с учетом неопределенностей, а когда нет. В настоящей работе рассматриваются некоторые примеры постановки задач, приводящие к возрастанию числа состояний анализируемого процесса, которые в последующем будут сравниваться с более простыми моделями.

Некоторые из возникающих при этом проблем, которые являются продолжением исследований [5], и является предметом исследования. Некоторые результаты, включая описание модели, приведены в [6]. Краткое их изложение приведено в разделе 2.

В этой работе анализируются результаты численных расчетов, полученных в результате численной реализации алгоритмов расчета этих моделей и их сравнение с соответствующими результатами, полученными при использовании более простых моделей.

Для реализации этих алгоритмов были разработаны программы на языке C++. Одна программа создана для проведения расчетов, реализующих расчет границ изменения стационарных вероятностей для процесса рождения и гибели с погрешностями в значениях интенсивности входного потока и интенсивности обслуживания, а так же вычисления границ изменения значения среднего объема используемого ресурса. Вторая программа реализует алгоритм нахождения субуниверсального решения системы уравнений статистического равновесия и погрешности этого решения для двухпотоковой модели линии МСС. На основе второй программы проводилось численное моделирование модели процесса рождения и гибели с погрешностями в значениях интенсивности входного потока и интенсивности обслуживания, а так же двухпотоковой модели, рассмотренной в разделе 2. На базе этих программ была так же разработана программа для численного сравнения результатов расчетов вероятности потерь для двухпотоковой модели на основе базовой модели и при применении раздельного обслуживания потоков для определения границ применимости той или иной модели в зависимости от величин погрешностей в значениях входных параметров модели.

В разделе 4 приведены результаты численных исследований для интервальной модели процесса рождения и гибели. Здесь приводится сравнение результатов, полученных при моделировании основного способа расчетов, приведенного в разделе 4, и метода, основанного на решении системы уравнений статистического равновесия (1)–(6). Целью исследования было выяснить насколько изменяются погрешности в расчете характеристик при переходе от специального метода расчетов к универсальному, основанному на применении интервальных моделей для решения систем линейных уравнений, изложенному в разделе 3. Расчеты проводились при относительной погрешности 10% и при относительной погрешности 1%. Уровень погрешности в 10% является практически достижимым с учетом того, что предлагаемые модели сами являются приблизительным описанием реальной ситуации. Уровень погрешности в 1% является очень жестким, поскольку получить его статистическими средствами достаточно сложно. С другой стороны, колебания нагрузки подвержены влиянию многих факторов, поэтому при проектировании сетей следует предполагать, что нагрузка может колебаться в некоторых пределах, которые нужно так же учитывать при расчете пропускной способности сети. Поэтому первое предположение о точности задания параметров является более предпочтительным с практической точки зрения. Кроме того, проводилось исследование влияния на результаты расчетов объема ресурса линии, выраженного в передаточных единицах, и нагрузки на линию, выраженной в средней нагрузке на одну передаточную единицу.

В разделе 5 приведены результаты численных исследований двухпотоковой модели процесса передачи по линии сообщений с различной скоростью. Здесь приводится сравнение результатов, полученных при моделировании основного способа расчетов, приведенного в разделе 3, и упрощенного метода, основанного на замене двухпотоковой модели на однопотоковую с той же средней интенсивностью поступления требований. Однопотоковая модель позволяет перейти к интервальной модели для процесса рождения и гибели и тем самым существенно упростить вычисления, поскольку в последнем случае нет необходимости применять интервальный метод решения систем линейных уравнений. Расчеты проводились при тех же уровнях относительной погрешности для интенсивностей входных потоков и интенсивности обслуживания, что и предыдущем разделе. Кроме того, как и ранее, проводилось исследование влияния на результаты расчетов объема ресурса линии, выраженного в передаточных единицах, и нагрузки на линию, выраженной в средней нагрузке на одну передаточную единицу. Целью исследования было выяснить насколько изменяются погрешности в расчете характеристик при переходе упрощенному методу расчетов и определить области, когда применение одного из методов является предпочтительным.

Из полученных результатов стало ясно, что при малых погрешностях в значениях входных параметров применение упрощенной модели является неоправданным, поскольку она дает большую систематическую ошибку, которая не перекрывается погрешностью, возникающей из-за применения интервального метода решения систем уравнений статистического равновесия. Однако погрешность в определении стационарных вероятностей при применении стандартного метода исследования двухпотоковой модели может быть относительно большой.

В связи с этим рассматривался альтернативный метод расчета характеристик линии МСС, основанный на раздельном обслуживании разных потоков. В этом случае каждому из потоков выделяется своя часть ресурса линии. Понятно, что такой метод будет давать завышенные значения для вероятностей потерь, поскольку не используется эффект статистического мультиплексирования. Но в этом случае можно использовать метод расчетов из раздела 4, который имеет существенно большую устойчивость к неопределенностям в значениях входных параметров модели. Поэтому недостатки, связанные с завышением значений вероятностей потерь, могут быть компенсированы за счет большей точности получаемых результатов.

Результаты исследований приведены в разделе 6. Они состоят из двух серий численных экспериментов. Первая серия проводится при тех же исходных данных, что и при предыдущих исследованиях. Как и следовало ожидать, свойства метода раздельного обслуживания существенно зависят от того, насколько равномерно удается разделить имеющийся ресурс между потоками. Вторая серия вычислений посвящена исследованию возможности применения метода раздельного обслуживания в том случае, когда ресурс распределен равномерно. Обеспечить такие условия легче всего для линий с большой пропускной способностью, для которых применение точной модели является наиболее трудоемким и дает большие значения для возможных интервалов изменения характеристик. В этом случае исследуется эффект разделения ресурса при различной нагрузке на одну передаточную единицу и при различной точности задания входных параметров модели.

В заключительном разделе приведены выводы, полученные на основании анализа результатов вычислений.

2. АНАЛИЗ МОДЕЛИ МУЛЬТИСЕРВИСНОЙ СЕТИ

В качестве примера рассмотрим модель цифровой линии мультисервисной сети, рассмотренной в [2], но с тем изменением, что мы рассматриваем ситуацию, когда параметры модели известны лишь с некоторой точностью. Введем необходимые обозначения аналогично [2].

Источник нагрузки, а это может быть речевая нагрузка, потоковое видео (или любая другая мультимедийная нагрузка), передача данных и т.д., требует предоставления определенного количества передаточной емкости вдоль всего пути следования от источника к получателю. Канальный ресурс выделяется либо на основании пикового значения интенсивности генерации пакетов (гарантийное качество обслуживания), либо на основании значения величины, лежащей между значениями пиковой и средней интенсивностями генерации пакетов (эффективное качество обслуживания). В последнем случае при совместной передаче информационной нагрузки нескольких потоков достигается эффект статистического мультиплексирования.

При формализованном представлении топологии сети основным структурным параметром, задающим пропускную способность цифровых линий, является скорость передачи, выраженная в основных передаточных единицах. Пусть в анализируемой модели сети имеется J цифровых линий, а линия с номером j имеет фиксированную скорость передачи S_j бит в секунду. Предположим также, что на сети обслуживается n потоков сообщений, которые следуют от узла-источника к узлу-получателю по какой-то фиксированной для данного потока цепочке соединительных линий. Будем считать, что для обслуживания сообщения k-го потока требуется канальный ресурс D_k бит в секунду, одинаковый для каждой из цифровых линий, составляющих маршрут следования сообщений k-го потока. Значение D_k не меняется за время обслуживания, не зависит от порядкового номера передаваемого сообщения и оценивается либо на основе пиковой величины интенсивности поступления пакетов, передаваемых в процессе анализируемого соединения, либо с использованием понятия эффективной интенсивности поступления пакетов.

Назовем основной передаточной единицей наибольший общий делитель (НОД) целочисленных значений скоростей $S_1, \ldots, S_J$ всех цифровых линий, имеющихся в сети, и требований к скоростям обслуживания D_1,...,D_n, каждого из n имеющихся в сети потоков сообщений. Обозначим одну основную передаточную единицу через α. Таким образом,

$$\alpha = \text{НОД}(S_1, \ldots, S_J, D_1, \ldots, D_n)$$

будет условной единицей использования передаточного ресурса линии, позволяющей выразить все остальные требуемые ресурсы как целые числа. Поэтому целочисленное представление скорости j-ой цифровой линии имеет вид $v_j = S_j/\alpha$ основных передаточных единиц, а целочисленное выражение требования к скорости обслуживания для сообщений k-го потока в виде $b_k = D_k/\alpha$ основных передаточных единиц. Выбор основной передаточной единицы зависит от детализации описания процесса разделения ресурса. Если анализируется процесс формирования абонентского трафика, то обычно в качестве основной передаточной единицы выступает скорость 64 Кбит/с, которая, как известно, обеспечивает качественную передачу речевой нагрузки, относящейся к одному разговору (отметим, что использование вокодеров может уменьшить это значение до 32 Кбит/с, 16 Кбит/с и даже 8 Кбит/с). На транзитном участке сети, где передается агрегированный трафик, в качестве основной передаточной единицы может быть выбрана скорость 2 Мбит/с, обеспечиваемая системой передачи ИКМ 30/32, или скорость, задаваемая начальным модулем синхронной цифровой иерархии STM-1 155 Мбит/с и т.д.

Далее необходимо уточнить маршруты следования потоков в сети. Допустим, имеется сеть, состоящая из некоторого числа узлов, соединенных между собой цифровыми линиями. Пусть v_j — скорость j-ой линии, выраженная в основных передаточных единицах, $j = 1, 2, \ldots, J$, а k-ый поток сообщений реального времени характеризуется интенсивностью поступления требований на занятие канального ресурса $\lambda_{c,k}$, средним временем занятия выделенного канального ресурса $T_{c,k}$ в процессе одного занятия, числом основных передаточных единиц, необходимых для обслуживания поступившего требования b_k, маршрутом следования сообщений от источника к получателю R_k, который задается последовательностью номеров соединительных линий, составляющих k-ый маршрут. Формальное описание маршрутов следования сообщений реального времени и величины канального ресурса, используемого каждым соединением, задаются маршрутной матрицей $Q = ||q_{j,k}||$ прямоугольного вида размера $J \times n$ с компонентами

$$Q = \begin{vmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} & \cdots & q_{1,n-1} & q_{1,n} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} & \cdots & q_{2,n-1} & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q_{J,1} & q_{J,2} & q_{J,3} & \cdots & q_{J,n-1} & q_{J,n} \end{vmatrix}.$$

Элемент $q_{j,k}$ матрицы Q служит для сообщения информации о том, используется или нет j-ая цифровая линия для передачи сообщения k-го потока сообщений реального времени и какое при этом число единиц ресурса линии занимается. Данная информация следует из равенства

$$q_{j,k} = \begin{cases} b_k, & \text{сообщение } k\text{-го потока реального времени использует } j\text{-ую} \\ & \text{цифровую линию, занимая для своего обслуживания } b_k \text{ ос-} \\ & \text{новных передаточных единиц} \\ 0, & \text{сообщение } k\text{-го потока реального времени не использует } j\text{-} \\ & \text{ую цифровую линию.} \end{cases}$$

Заявка на установление соединения от k-го потока сообщений реального времени принимается к обслуживанию, если каждая из линий, составляющих маршрут следования k-го потока, имеет свободными не менее b_k основных передаточных единиц. После завершения обслуживания весь задействованный ресурс освобождается и может быть занят на обслуживание других сообщений, циркулирующих в сети. Обозначим через N_j множество номеров потоков сообщений реального времени, которые обслуживаются j-ой линией.

Далее ограничимся случаем двух потоков сообщений реального времени, т.е. в принятых обозначениях обслуживается $n = 2$ потоков сообщений, причем для обслуживания сообщения k-го потока, $k = 1, 2$, требуется канальный ресурс в D_k условных единиц, причем $D_1 \leq D_2$. Общий ресурс канала равен v условным единицам. Если для обслуживания вновь поступившего требования недостаточно ресурса линии, то требование теряется.

В соответствии с рассматриваемыми интервальными моделями предполагаем, что интенсивности потоков известны с погрешностями: λ_k — интенсивность k-го потока сообщений — удовлетворяет условию $\lambda_k \in [\lambda_k^-, \lambda_k^+]$, время обслуживания k-го потока сообщений μ_k удовлетворяет условию $\mu_k \in [\mu_k^-, \mu_k^+]$.

В этом случае процесс $r(t)$ имеет вид $r(t) = (i_{c,1}(t), i_{c,2}(t))$, где $i_{c,k}(t)$ — число обслуживаемых в момент времени t требований k-го потока сообщений. Множество возможных состояний процесса $S = \{(i, j) : D_1 i + D_2 j \leq v\}$, где i, j — неотрицательные целые числа.

Система уравнений статистического равновесия принимает вид

$$\begin{aligned} p(i,j)(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2) = p(i-1,j)\lambda_1 + p(i,j-1)\lambda_2 + \\ + p(i+1,j)(i+1)\mu_1 + p(i,j+1)(j+1)\mu_2, \end{aligned} \tag{1}$$

если $i > 0, j > 0, D_1 i + D_2 j \leq v - D_2$;

$$\begin{aligned} p(0,j)(\lambda_1 + \lambda_2 + j\mu_2) = p(i,j-1)\lambda_2 + \\ + p(i+1,j)(i+1)\mu_1 + p(i,j+1)(j+1)\mu_2, \end{aligned} \tag{2}$$

если $j > 0, D_1 i + D_2 j \leq v - D_2$;

$$\begin{aligned} p(i,0)(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2) = p(i-1,j)\lambda_1 + p(i+1,j)(i+1)\mu_1 + \\ + p(i,j+1)(j+1)\mu_2, \end{aligned} \tag{3}$$

если $i > 0, D_1 i \leq v - D_2$;

$$\begin{aligned} p(i,j)(\lambda_1 + i\mu_1 + j\mu_2) = p(i-1,j)\lambda_1 + p(i,j-1)\lambda_2 + \\ + p(i+1,j)(i+1)\mu_1, \end{aligned} \tag{4}$$

если $i > 0, j > 0, v - D_2 < D_1 i + D_2 J \leq v - D_1$;

$$p(i,j)(i\mu_1 + j\mu_2) = p(i-1,j)\lambda_1 + p(i,j-1)\lambda_2, \tag{5}$$

если $i > 0, j > 0, v - D_1 < D_1 i + D_2 j \leq v$ и условие нормировки

$$\sum_{(i,j)\in S} p(i,j) = 1. \tag{6}$$

Вероятность потерь вычисляется по форуле

$$\pi_{c,k} = \sum_{(i,j)\in G_k} P(i,j), \tag{7}$$

где $G_1 = \{(i,j) : v - D_1 < D_1 i + D_2 j\}$, $G_2 = \{(i,j) : v - D_2 < D_1 i + D_2 j\}$. Условие, задающее множество G_1, означает, что вновь поступившее требование из первого потока не будет обслужено из-за нехватки ресурса канала связи, поскольку незанятый объем ресурса меньше требуемого для обслуживания требований первого потока. Аналогично, условие, задающее множество G_2, означает, что вновь поступившее требование из второго потока не будет обслужено.

3. ИНТЕРВАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕДАЧИ ПО КАНАЛУ СООБЩЕНИЙ С РАЗЛИЧНОЙ СКОРОСТЬЮ

Теперь рассмотрим применение к задаче определения стационарных вероятностей теории решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

с неопределенными коэффициентами a_{ij}, b_i:

$$a_{ij}^- \le a_{ij} \le a_{ij}^+, \quad b_i^- \le b_i \le b_i^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a_{ij}^-, a_{ij}^+, \underline{b}_i, \bar{b}_i,$ — заданные вещественные числа, x_j — искомые неизвестные, изложенную в [7].

Составим стандартным образом из коэффициентов и неизвестных $n \times n$-матрицы A, A^+, A^-, n-векторы b, b^+, b^-, x и условимся понимать матричные и векторные неравенства поэлементно. Тогда исходные уравнения и неравенства для коэффициентов удобно записать в виде

$$Ax = b, \tag{8}$$

$$\underline{A} \le A \le \bar{A}, \quad \underline{b} \le b \le \bar{b}. \tag{9}$$

Пары A, b, удовлетворяющие требованиям (9), будем называть допустимыми.

Введем в рассмотрение неотрицательный n-вектор ε, характеризующий точность выполнения равенства (8). Вектор x называется ε-решением уравнения (8), если неравенства

$$-\varepsilon \le Ax - b \le \varepsilon$$

выполняются для любых допустимых пар A, b. За универсальное решение уравнения (8) примем ε-решение с минимальным в некоторой норме вектором ε. Отвечающий универсальному решению x вектор ε называется минимальной невязкой уравнения (8). Тогда по определению пара x, ε удовлетворяет неравенству $|Ax - b| \le \varepsilon$ для любых допустимых A, b и среди всех пар $\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}$ с тем же свойством выделяется условием $\|\varepsilon\| \le \|\tilde{\varepsilon}\|$.

Задача нахождения ε-решений и универсальных решений оказывается весьма трудной с вычислительной точки зрения, поскольку для этого необходимо решать задачу линейного программирования, размерность которой больше размерности исходной задачи. Эти трудности особенно значительны при больших значениях n. В связи с этим в [7] введено понятие субоптимального решения, которое близко к универсальному решению.

Пусть

$$A^0 = 0,5(A^- + A^+), \quad \Delta A = 0,5(A^+ - A^-),$$
$$b^0 = 0,5(b^- + b^+), \quad \Delta b = 0,5(b^+ - b^-),$$
$$A_0^+ = (A^0)'(A^0(A^0)')^{-1},$$

где A' — транспонированная матрица A, а

$$\hat{x} = A_0^+ b^0. \tag{10}$$

Решение (10) называется субуниверсальным решением уравнения (8). Для этого решения получена оценка его погрешности:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\hat{x}) = \Delta A|\hat{x}| + \Delta b \tag{11}$$

и $\hat{x}$ есть $\hat{\varepsilon}$-решение уравнения (8) с наименьшей для него невязкой.

Для применения этого метода оценки погрешности пространство состояний S переводится в однопараметрическое множество, содержащее $n = \#S$ элементов. Значение n зависит от соотношений между D_1, D_2 и v и рассчитывается программными средствами.

4. ИНТЕРВАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Пусть $S = \{0, 1, \ldots, v\}$ — множество всех состояний процесса, интенсивности переходов между состояниями: λ_i — перехода из состояния i в $i+1$, $i = 0, 1, \ldots, v-1$, μ_i — перехода из состояния i в $i-1$, $i = 1, \ldots, v$. Будем предполагать, что интенсивности переходов принадлежат заданным интервалам: $\lambda_i \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+]$, $\lambda_i^+ - \lambda_i^- = 2\Delta_{\lambda,i} > 0$, $\lambda_i^0 = \frac{\lambda_i^- + \lambda_i^+}{2}$, $\mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+]$, $\mu_i^+ - \mu_i^- = 2\Delta_{\mu,i} > 0$, $\mu_i^0 = \frac{\mu_i^- + \mu_i^+}{2}$. Стационарные вероятности процесса обозначаются через p_i.

Известно, что система уравнений статистического равновесия имеет вид

$$\lambda_i p_i = \mu_{i+1} p_{i+1}, i = 0, 1, \ldots, v-1, \tag{12}$$

которые являются стандартными для процесса рождения и гибели. Из этого уравнения получаем, что для любого $j \in S$

$$p_i = \frac{\mu_{i+1} \cdot \ldots \cdot \mu_j}{\lambda_i \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}} p_j, \ i < j,$$
$$p_i = \frac{\lambda_j \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}}{\mu_{j+1} \cdot \ldots \cdot \mu_i} p_j, \ i > j.$$

Используя уравнение нормировки $\sum_{j=0}^{v} p_j = 1$ из приведенных уравнений получаем

$$p_j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{\mu_{i+1} \cdot \ldots \cdot \mu_j}{\lambda_i \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}} + 1 + \sum_{i=j+1}^{v} \frac{\lambda_j \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}}{\mu_{j+1} \cdot \ldots \cdot \mu_i}}.$$

Используя введенные выше обозначения для интервалов изменения интенсивностей λ_i и μ_i получаем границы изменения стационарных вероятностей: для верхней границы —

$$p_j^+ = \frac{1}{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{\mu_{i+1}^+ \cdot \ldots \cdot \mu_j^+}{\lambda_i^- \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}^-} + 1 + \sum_{i=j+1}^{v} \frac{\lambda_j^+ \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}^+}{\mu_{j+1}^- \cdot \ldots \cdot \mu_i^-}}, \tag{13}$$

для нижней границы —

$$p_j^- = \frac{1}{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{\mu_{i+1}^- \cdot \ldots \cdot \mu_j^-}{\lambda_i^+ \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}^+} + 1 + \sum_{i=j+1}^{v} \frac{\lambda_j^- \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}^-}{\mu_{j+1}^+ \cdot \ldots \cdot \mu_i^+}}. \tag{14}$$

Теорема 1. *Для погрешности в вычислении стационарной вероятности* p_j *получаем*

$$\Delta p_j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{\mu_{i+1}^- \cdot \ldots \cdot \mu_j^-}{\lambda_i^+ \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}^+} + 1 + \sum_{i=j+1}^{v} \frac{\lambda_j^+ \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}^+}{\mu_{j+1}^- \cdot \ldots \cdot \mu_i^-}} -$$
$$- \frac{1}{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{\mu_{i+1}^+ \cdot \ldots \cdot \mu_j^+}{\lambda_i^- \cdot \ldots \cdot \lambda_{j-1}^-} + 1 + \sum_{i=j+1}^{v} \frac{\lambda_j^- \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}^-}{\mu_{j+1}^+ \cdot \ldots \cdot \mu_i^+}}.$$

Из приведенной формулы (14) видно, что для максимизации вероятности p_i нужно увеличивать до максимального значения интенсивностей в направлении к состоянию i и минимизировать интенсивности в направлении от этого состояния, а из (13) следует, что для минимизации вероятности p_i нужно уменьшать значения интенсивностей в направлении к состоянию i и увеличивать интенсивности в обратном направлении, что хорошо согласуется с интуитивными соображениями.

Для вычисления погрешности в вычислении функционала $J = \sum_{j=1}^{v} c_j p_j$ с учетом нормировки для стационарных вероятностей получаем оценки.

Пусть $c_i^*, i = 0, \ldots, v,$ — вариационный ряд для c_i, т.е c_i упорядочены в порядке неубывания, причем $k(i)$ — номер элемента i в вариационном ряду, т.е. $c_i^* = c_{k(i)}$.

Теорема 2. *Пусть* j^+ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{i=0}^{j^+} p_{k(i)}^- + \sum_{i=j^++1}^{v} p_{k(i)}^+ \leq 1, \ \sum_{i=0}^{j^+-1} p_{k(i)}^- + \sum_{i=j^+}^{v} p_{k(i)}^+ > 1,$$

а j^- *удовлетворяет условию*

$$\sum_{i=0}^{j^-} p_{k(i)}^- + \sum_{i=j^-+1}^{v} p_{k(i)}^+ \geq 1, \ \sum_{i=0}^{j^--1} p_{k(i)}^- + \sum_{i=j^-}^{v} p_{k(i)}^+ < 1, \tag{15}$$

тогда получаем границы изменения функционала J:
для верхней границы —

$$J^+ = \sum_{i=0}^{j^+-1} c_{k(i)} p_{k(i)}^- + \sum_{i=j^++1}^{v} c_{k(i)} p_{k(i)}^+ + c_{k(j^+)}, \tag{16}$$

для нижней границы —

$$J^- = \sum_{i=0}^{j^--1} c_{k(i)} p_{k(i)}^+ + \sum_{i=j^-+1}^{v} c_{k(i)} p_{k(i)}^- + c_{k(j^-)}. \tag{17}$$

Доказательство. В условиях теоремы получаем задачу поиска условного экстремума J (минимума или максимума в зависимости от того, ищется нижняя и верхняя граница для функционала J) при ограничениях:

1. $p_j \in [p_j^-, p_j^+], j = 0, 1, \ldots, v$;
2. $\sum_{j=0}^{v} p_j = 1$.

Для простоты обозначений будем считать, что последовательность c_j изначально является неубывающей, т.е. представляет собой вариационный ряд, что позволит считать, что $k(i) = i$, и кроме того, $c_j^- = 0$. Последнее условие означает, что вместо минимизации функционала J мы минимизируем $J - c_j^-$, который отличается от исходного функционала на константу. Условие (15) означает, что распределение

$$p_j^+,\ j < j^-,\ p_j^-,\ j > j^-,$$
$$p_j = 1 - \sum_{i=0}^{j^- -1} p_i^+ - \sum_{i=j^- +1}^{v} p_i^-$$

удовлетворяет условиям 1 и 2 ограничений. Сделанные предположения позволяют написать, что

$$c_j \le 0,\ j < j^-,\ \text{и}\ c_j \ge 0, j > j^-. \tag{18}$$

Значит из (17) с учетом (18)

$$J - J^- = \sum_{i=0}^{j^- -1} c_i(p_i - p_i^+) + \sum_{i=j^- +1}^{v} c_i(p_i - p_i^-) \ge 0,$$

поскольку первая группа слагаемых представляет собой произведение неположительных множителей, а вторая — неотрицательных, т.е утверждение (17) теоремы доказано.

Аналогично доказывается и утверждение (16).

Численные исследования метода расчета стационарных вероятностей для пуассоновского входного потока проводились с целью определить степень влияния неопределенности в значениях параметров на погрешности в значениях стационарных вероятностей и, как следствие, на вычисление среднего объема используемого ресурса. Вместе с этим производилось так же сравнение получающихся результатов с аналогичными, получаемыми с помощью непосредственного решения системы линейных уравнений, задающей значения стационарных вероятностей, с применением интервальных моделей, рассмотренных в предыдущем разделе.

Система линейных уравнений имела максимально простой вид (12) с уравнением нормировки $\sum_{j=0}^{v} p_j = 1$. Напомним, что v — это число анализируемых состояний, или, в применении к линии МСС, ее пропускная способность в передаточных единицах. В расчетах рассматривалась ситуация, когда параметры Λ и μ известны с некоторыми относительными погрешностями. Расчеты проводились при различных уровнях погрешности и при различном уровне средней нагрузки на одну передаточную единицу. Кроме того, исследовалась точность вычислений в зависимости от емкости линии при фиксированной средней нагрузке на одну передаточную единицу.

Сначала проанализируем результаты расчетов, когда погрешность имеется при определении интенсивности нагрузки Λ.

Проводились две серии экспериментов: когда фиксирована пропускная способность линии, но изменяется средняя нагрузка на одну передаточную единицу, и когда меняется пропускная способность линии, а средняя нагрузка на одну передаточную единицу фиксирована на уровне 0.6. Уровень выбран так, что вероятность потерь небольшая, для того, чтобы выяснить чувствительность методов при реальных показателях качества обслуживания требований МСС. В первой серии нагрузка одну передаточную единицу менялась от максимального уровня 1 до уровня 0.44, когда потери практически отсутствуют.

В качестве характеристик качества функционирования рассматривались такие характеристики как вероятность потерь p_v и средний объем занятого ресурса I, выраженный в передаточных единицах. При оценке погрешности в вычислении величины I в первом случае использовался метод, описанный в разделе 2. Для реализации этого метода производился расчет границ изменения стационарных вероятностей по формулам (14) и (13). Далее использовался результат теоремы 2 из этого раздела. Поскольку в этом случае $c_j = j$, т.е. растут монотонно с ростом j, то стационарные вероятности нужно было разделить на две группы: в первой группе используются верхние возможные значения вероятностей p_j^+, а во второй — нижние возможные значения вероятностей p_j^-. Кроме того, необходимо было найти границы между этими группами j^+ и j^- соответственно. Поэтому при вычислении верхней границы при j из отрезка $[0, j^+ - 1]$ берется наименьшее возможное значение стационарной вероятности, т.е. p_j^-, а при j из отрезка $[j^+ + 1, v]$ берется наибольшее возможное значение стационарной вероятности, т.е. p_j^+. При вычислении нижней границы для среднего объема занятого ресурса при j из отрезка $[0, j^- - 1]$ берется наибольшее возможное значение стационарной вероятности, т.е. p_j^+, а при j из отрезка $[j^- + 1, v]$ берется наименьшее возможное значение стационарной вероятности, т.е. p_j^-. Далее реализовалась формулы (16) и (17), которые в данном случае имеют вид:

$$I^+ = \sum_{i=0}^{j^+-1} ip_i^- + \sum_{i=j^++1}^{v} ip_i^+ + j^+\left(1 - \sum_{i=0}^{j^+-1} p_i^- - \sum_{i=j^++1}^{v} p_i^+\right),$$

и

$$I^- = \sum_{i=0}^{j^--1} ip_i^+ + \sum_{i=j^-+1}^{v} ip_i^- + j^-\left(1 - \sum_{i=0}^{j^--1} p_i^+ - \sum_{i=j^-+1}^{v} p_i^-\right).$$

Из полученных значений I^+ и I^- находились значения $I = \frac{I^+ + I^-}{2}$ и погрешности $\Delta I = \frac{I^+ + I^-}{2}$.

Расчет характеристик на основе решения системы уравнений статистического равновесия производился на основе метода интервального анализа, описанного в разделе 4. В качестве системы уравнений равновесия использовалась система (12) с уравнением нормировки. Далее к этой системе уравнений применялся описанный в разделе 3 метод вычисления субуниверсального решения, когда интервалы изменения коэффициентов рассчитываются исходя из интервала изменения параметра Λ. Погрешность вычисления $I = \sum_{i=0}^{v} ip_i$ находилась по формуле $\Delta I = \sum_{i=0}^{v} i\Delta p_i$.

Анализ приведенных данных показывает, что оба метода расчетов дают примерно одинаковые значения для вероятности потерь p_v и среднего объема занятого ресурса I, выраженного в передаточных единицах. Различия в значениях I вызваны, в первую очередь, несимметричностью значений I^+ и I^- относительно значения среднего объема используемого ресурса I. Таким образом, можно сделать вывод, что оба метода расчетов дают практически одинаковые значения интересующих нас характеристик, что соответствует теоретическим результатам.

Анализ величин погрешностей показывает, что здесь картина совсем иная. Погрешность при расчете p_v оказывается у обоих методов практически одинаковой. Поэтому при расчете вероятности потерь требований потока сообщений оба метода дают примерно одинаковые результаты как для характеристики, так и для ее погрешности. При расчете среднего объема занятого ресурса I погрешность метода, основанного на интервальных методе, оказывается существенно больше. Если относительная погрешность метода, основанного на границах изменения стационарных вероятностей процесса рождения и гибели, была около 11%–12% во всех ситуациях, то для интервального метода она уже 24% и более. При этом наблюдаются существенно большие колебания относительной погрешности в зависимости от значений входных параметров. Так, например, при $v = 45$ и $\Lambda = 30$ она составляет 61%, а при $v = 45$ и $\Lambda = 35$ она составляет 60%. Отметим, что эти случаи соответствуют режимам нормального функционирования сети, когда потери составляют 0.2% и 2% соответственно.

Таблица 1.

Результаты вычислений при точно известных значениях μ и при относительной погрешности 10% в значениях Λ

Данные		Основной способ				Решение системы лин. уравн.			
v	Λ	p_v	Δp_v	I	ΔI	p_v	Δp_v	I	ΔI
45	45.0	0.1124	0.0531	39.60	1.90	0.1100	0.0545	40.05	17.00
45	40.0	0.0602	0.0379	37.30	2.67	0.0543	0.0389	37.83	19.75
45	35.0	0.0226	0.0180	34.06	3.25	0.0167	0.0177	34.41	20.64
45	30.0	0.0045	0.0041	29.74	3.39	0.0023	0.0035	29.93	18.27
45	25.0	0.000286	0.000276	24.93	2.92	0.000094	0.000188	25.00	14.20
45	20.0	0.000003	0.000003	19.91	2.39	0.000001	0.000002	20.00	10.19
30	18.0	0.0042	0.0035	17.82	2.09	0.0026	0.0032	17.95	8.53
20	12.0	0.0121	0.0081	11.73	1.41	0.0098	0.0080	11.88	4.48
10	6.0	0.0451	0.0183	5.64	0.62	0.0431	0.0184	5.74	1.40

Если сравнивать погрешности вычислений этими методами между собой, то можно увидеть, что погрешность, возникающая при применении интервального метода решения систем линейных уравнений, оказывается в 3–8 раз больше, чем на основании расчетов с применением процесса рождения и гибели. Следует заметить, что чем больше v, тем больше относительная погрешность.Таким образом, с ростом емкости линии переход к использованию решений систем линейных уравнений становится все менее оправданным.

Такие сильные колебания в погрешности определения среднего объема используемого ресурса связаны с тем, что относительные погрешности в определении стационарных вероятностей p_i существенно разные для разных i. При этом значение вероятности для более вероятных состояний оказываются известными и с большей погрешностью.

Таким образом, можно сделать вывод, что переход к интервальным моделям, основанным на решении системы линейных уравнений, приводит к существенному увеличению погрешности в расчете среднего объема используемого ресурса, хотя сами значения характеристик оказываются практически одинаковыми. Это позволяет сделать и второй вывод: при сравнении эффективности разных методов расчета характеристик целесообразно учитывать их устойчивость относительно погрешностей в значениях входных параметров. Без учета этого обстоятельства может быть отдано преимущество методу, который с практической точки зрения окажется менее эффективным.

Далее проводилось численное исследование при уменьшении относительной погрешности в значениях Λ в 10 раз по сравнению с предыдущим примером и при точно известном значении $\mu = 1$ как и в предыдущем примере. Формула для оценки погрешности при применении интервального метода решения систем линейных уравнений говорит о том, что погрешность уменьшится в 10 раз, а значения характеристик не изменятся.

Приведенные таблице 2 результаты показывают, что относительная погрешность метода вычислений, основанного на границах изменения стационарных вероятностей процесса рождения и гибели, уменьшаются нелинейно с уменьшением погрешности в значении параметра Λ. Относительная точность в определении значения I возросла примерно в 6 раз, в то время как относительная точность в значении параметра Λ возросла в 10 раз.

Таблица 2.
Результаты вычислений при точно известных значениях μ и при относительной погрешности 1% в значениях Λ

Данные		Основной способ				Решение системы лин. уравн.			
v	Λ	p_v	Δp_v	I	ΔI	p_v	Δp_v	I	ΔI
45	45.0	0.1100	0.0054	39.97	0.33	0.1100	0.0054	40.05	1.70
45	40.0	0.0544	0.0039	37.78	0.45	0.0543	0.0039	37.83	1.97
45	35.0	0.0168	0.0018	34.33	0.53	0.0167	0.0018	34.41	2.06
45	30.0	0.00234	0.00035	29.84	0.53	0.00232	0.00035	29.93	1.83
45	25.0	0.000095	0.000019	24.93	0.45	0.000094	0.000019	25.00	1.42
45	20.0	0.000001	0.000000	19.96	0.37	0.000001	0.000000	20.00	1.02
30	18.0	0.0026	0.0003	17.90	0.33	0.0026	0.0003	17.95	0.85
20	12.0	0.0098	0.0008	11.85	0.23	0.0098	0.0008	11.88	0.44
10	6.0	0.0432	0.0018	5.73	0.11	0.0431	0.0018	5.74	0.14

При определении вероятности потерь оба метода дали практически одинаковые результаты. Таким образом, при существенном возрастании точности в значении параметра Λ свойства обоих методов будут сближаться.

Далее проводились аналогичные серии экспериментов для случая, когда точно известны значения параметра Λ, а значения μ известны с некоторой относительной погрешностью. При этом сохранены исходные данные об объеме ресурса линии и об интенсивности входного потока.

Таблица 3.
Результаты вычислений при точно известных значениях Λ и при относительной погрешности 10% в значениях μ

Данные		Основной способ				Решение системы лин. уравн.			
v	Λ	p_v	Δp_v	I	ΔI	p_v	Δp_v	I	ΔI
45	45.0	0.1241	0.0476	39.92	1.70	0.1100	0.0544	40.05	17.00
45	40.0	0.0666	0.0367	37.72	2.39	0.0543	0.0389	37.83	19.75
45	35.0	0.0253	0.0187	34.41	3.06	0.0167	0.0177	34.41	20.64
45	30.0	0.0051	0.0045	30.17	3.19	0.0023	0.0035	29.93	18.27
45	25.0	0.000342	0.000327	25.25	2.82	0.000094	0.000188	25.00	14.20
45	20.0	0.000004	0.000004	20.27	2.22	0.000001	0.000002	20.00	10.19
30	18.0	0.0047	0.0038	18.16	1.92	0.0026	0.0032	17.95	8.53
20	12.0	0.0135	0.0082	11.98	1.19	0.0098	0.0080	11.88	4.48
10	6.0	0.0500	0.0158	5.84	0.47	0.0431	0.0184	5.74	1.40

Анализ результатов, приведенных в таблицах 3 и 4, показывает, что получившиеся результаты практически совпадают с аналогичными, полученными при погрешности в определении интенсивности входного потока. При использовании интервального метода решения систем линейных уравнений результаты совпали почти полностью. При использовании основного способа результаты оказались лучше с точки зрения величины погрешности, однако отличие весьма незначительное: максимальное отклонение в погрешности при вычислении I оказалось равным 0.28 (при $v = 45$ и $\Lambda = 40$), что составляет чуть более 10% в относительных величинах, а минимальное — 0.10 (при $v = 45$ и $\Lambda = 25$). При уменьшении v разность между погрешностями изменяется несущественно. таким образом, можно сделать вывод, что при погрешности в определении μ сохраняются те же свойства погрешности вычислений обеих характеристик, что возникали и при погрешности в определении Λ.

Таблица 4.

Результаты вычислений при точно известных значениях и при относительной погрешности 1% в значениях μ

Данные		Основной способ				Решение системы лин. уравн.			
v	Λ	p_v	Δp_v	I	ΔI	p_v	Δp_v	I	ΔI
45	45.0	0.1110	0.0045	40.02	0.26	0.1100	0.0054	40.05	1.70
45	40.0	0.0549	0.0034	37.80	0.39	0.0543	0.0039	37.83	1.97
45	35.0	0.0170	0.0016	34.37	0.45	0.0167	0.0018	34.41	2.06
45	30.0	0.0024	0.0003	29.89	0.45	0.0023	0.0004	29.93	1.83
45	25.0	0.000096	0.000018	24.97	0.38	0.000094	0.000019	25.00	1.42
45	20.0	0.000001	0.000000	19.97	0.33	0.000001	0.000000	20.00	1.02
30	18.0	0.00266	0.00029	17.94	0.28	0.00262	0.00032	17.95	0.85
20	12.0	0.0099	0.0007	11.89	0.19	0.0098	0.0008	11.88	0.45
10	6.0	0.0436	0.0014	5.75	0.07	0.0431	0.0018	5.74	0.14

Анализ второй серии экспериментов, когда фиксирована нагрузка на одну передаточную единицу на уровне 0.6, показывают, что при вычислении среднего объема используемого ресурса основной метод устойчив относительно емкости линии, поскольку относительная погрешность вычислений мало изменяется с ростом v. При использовании интервального метода решения систем линейных уравнений относительная погрешность в вычислении I растет вместе с ростом v: при возрастании емкости в 2 раза относительная погрешность выросла в 1.5 раза, а при возрастании емкости в 3 раза — в 2 раза, т.е. наблюдается рост относительной погрешности. Абсолютные значения погрешности растут еще быстрее, поскольку значения I растут линейно с ростом v. Поэтому для линий с большой пропускной способностью применение методов расчетов, основанных на решении систем статистического равновесия, может быть неоправданным.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПЕРЕДАЧИ ПО ЛИНИИ СООБЩЕНИЙ С РАЗЛИЧНОЙ СКОРОСТЬЮ

В этом разделе рассмотрим результаты численных исследований модели звена МСС, приведенной в разделе 2. Будет производится сравнение результатов вычисления вероятностей потерь требований первого и второго потоков требований как для введенной модели, так и для упрощенной модели, когда рассматривается лишь один поток требований.

В упрощенной модели предполагается, что поступает один поток сообщений, интенсивность которого равна $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 D_2$, все требования используют $D_1 = 1$ единиц канального ресурса, а среднее время обслуживания равно 1. Выбор значения Λ обусловлен тем соображением, что общая средняя нагрузка на одну передаточную единицу одинаковая в обеих моделях. В упрощенной модели изменен процесс обслуживания требований второго потока, поэтому объем занятого ресурса изменяется не скачком, как в исходной модели, а постепенно. Так же происходит и освобождение, поэтому ресурс освобождается постепенно. Это облегчает доступ к ресурсу для требований первого потока. Поэтому упрощенная модель будет давать заниженную вероятность потерь для первого потока и завышенную для второго.

Для численной реализации алгоритма расчета вероятностей потерь (7) необходимо реализовать правило вычисления погрешности, описанное в разделе 4. Поскольку размерность возникающей системы линейных уравнений зависит от соотношений между D_1, D_2 и v, наличием у них общих множителей, то расчет n рассчитывается с помощью программной реализации подсчета количества состояний в множестве S. Верхняя оценка для n в рассматриваемом случае имеет вид

$$n \leq \frac{(v+1)(\frac{v}{D_2}+1)}{2}. \tag{19}$$

Расчеты, полученные с помощью точной модели, сравниваются с соответствующими результатами, полученными для приближенной модели. Погрешность вычислений характеристик приближенной модели оценивалась в соответствии со схемой, описанной в разделе 2. Сначала вычислялись границы изменения стационарных вероятностей процесса, описывающего функционирование приближенной модели, которые обозначаются p_j^+ — для верхней границы при любых допустимых значениях параметров Λ и μ и p_j^- — для нижней границы возможного значения стационарной вероятности p_j. Из сделанных предположений о соответствии между моделями следует, что в качестве оценки вероятности потерь для первого потока $\pi_{c,1}$ следует взять p_v. Погрешность этой характеристики принимается равной $\Delta\pi_{c,1} = \frac{p_v^+ - p_v^-}{2}$. Поскольку в исходной модели для обслуживания требований второго потока требуется наличие не менее D_2 передаточных единиц, то в качестве оценки вероятности потерь для второго потока $\pi_{c,2}$ следует взять $\sum_{j=v-D_2+1}^{v} p_j$ и, соответственно, для оценки погрешности использовать величину $\Delta\pi_{c,2} = \frac{\sum_{j=v-D_2+1}^{v}(p_j^+ - p_j^-)}{2}$.

Таблица 5.

Результаты вычислений при точно известных значениях λ_1 и λ_2

Исходные данные				Точная модель		Приближенная модель	
D_2	v	λ_1	λ_2	$\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$
1	10	3.50	3.50	0.0787	0.0787	0.0787	0.0787
2	15	5.25	2.63	0.0527	0.1198	0.0470	0.1141
3	20	7.00	2.33	0.0390	0.1419	0.0300	0.1312
5	25	8.75	1.75	0.0312	0.2014	0.0200	0.2036
10	30	10.50	1.05	0.0305	0.3385	0.0136	0.5174
10	35	12.25	1.23	0.0216	0.2896	0.0094	0.3969

Приведенные результаты подтверждают справедливость сделанных ранее качественных предположений о характере изменения вероятностей потерь при переходе ко второй модели. Количественные изменения оказались следующими. Из приведенных данных видно, что при $D_2 = 2$ или $D_2 = 3$ погрешность, возникающая из-за перехода к приближенной модели, для характеристики $\pi_{c,2}$ составляет менее 8 %, а для $\pi_{c,1}$ составляет 10–30 %. Таким образом, переход к точной модели при изменении требуемого для обслуживания ресурса не более, чем в 3 раза, является неоправданным, если не требуется очень высокая точность в определении вероятностей потерь. Понятно, что высокая точность может быть обеспечена лишь в том случае, когда точная модель сама обеспечивает такую же точность; т.е. предположения о независимости и пуассоновском характере потоков требований, экспоненциальности закона распределения времени обслуживания оказывают незначительное влияние на вероятности потерь и точность определения входных параметров столь же велика. Во многих приложениях такие предположения являются слишком жесткими: при решении задач проектирования предполагаемая обслуживаемая нагрузка неизвестна столь точно, что относительная погрешность 10–30 % является критической.

При $D_2 = 10$ погрешность становится существенной. Значение характеристики $\pi_{c,1}$ оказывается заниженной более, чем в 2 раза, а для $\pi_{c,2}$ —завышенной почти в полтора раза. При

$D_2 = 5$ погрешность становится существенной для $\pi_{c,1}$, поскольку при применении упрощенной модели она оказывается заниженной в полтора раза, в то время как для $\pi_{c,2}$ значения оказываются еще примерно одинаковыми.

Таким образом можно сделать вывод о том, что переход к точной модели может быть оправданным, если D_2 существенно отличается от D_1.

Однако, как будет видно из приводимых ниже примеров, при наличии погрешности в значениях параметров λ_1, λ_2 и μ ситуация принципиально меняется.

В табл. 6 приводятся данные вычислений при 10% относительной погрешности в значениях параметров λ_1 и λ_2.

Таблица 6.

Результаты вычислений при точно известных значениях μ и при относительной погрешности 10% в значениях λ_1 и λ_2

Исходные данные				Точная модель				Приближенная модель			
D_2	v	λ_1	λ_2	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1	10	3.50	3.50	0.0787	0.3056	0.0787	0.3890	0.0805	0.0277	0.0805	0.0277
2	15	5.25	2.63	0.0525	0.1916	0.1198	0.6796	0.0499	0.0233	0.1190	0.0504
3	20	7.00	2.33	0.0390	0.1632	0.1419	0.9635	0.0336	0.0192	0.1401	0.0690
5	25	8.75	1.75	0.0312	0.1348	0.2014	1.6579	0.0238	0.0157	0.2192	0.1128
10	30	10.50	1.05	0.0305	0.0649	0.3385	3.2767	0.0175	0.0129	0.5469	0.2455
10	35	12.25	1.23	0.0216	0.1783	0.2896	2.7917	0.0132	0.0105	0.4308	0.2247

Анализ приведенных данных показывает, что в этом случае погрешности в вычислениях $\pi_{c,1}$ и $\pi_{c,2}$ оказываются весьма существенными. Например, для $\pi_{c,2}$ получается, что вычисление этой характеристики при $D_2 = 5$ и $D_2 = 10$ становится бессмысленным, поскольку любые значения этой характеристики являются допустимыми. Для $\pi_{c,1}$ относительная погрешность оказывается 200%–400% , что так же делает результаты вычислений практически неприемлемыми. Если учесть, что при малых значениях D_2 приближенная модель дает практически те же результаты, то становится понятным, что переход к точной модели в данном случае является неоправданным.

Ситуация изменяется при увеличении точности входных параметров. Отметим, что используемая нами приближенная схема применения интервальных моделей дает линейную зависимость погрешности вычислений от ошибки в значениях исходных параметров, то можно найти уровни ошибок, при которых применение точной модели окажется приемлемой.

В этом случае из приведенных результатов видно, что применение точной модели может быть оправдано при $D_2 = 10$ для вычисления $\pi_{c,1}$, поскольку границы этой характеристики для точной модели оказываются $[0.024,\ 0.037]$, а для приближенной — $[0.0123,\ 0.0139]$ (строка 5 таблицы), т.к. границы изменения характеристик оказываются непересекающимися. Здесь получается, что применение приближенной модели дает заведомо заниженный результат почти в 2 раза. Для $\pi_{c,2}$ границы для точной модели оказываются $[0.01,\ 0.67]$, а для приближенной — $[0.49,\ 0.54]$, т.е. применение точной модели не дает преимуществ по сравнению с приближенной, а получающиеся для точной модели границы слишком широкие с практической точки зрения. Для остальных случаев ситуация только хуже. Поскольку с уменьшением погрешностей в значениях параметров λ_1, λ_2 и μ линейно уменьшаются и погрешности в определении $\pi_{c,1}$ и $\pi_{c,2}$, то при меньших 1% относительных погрешностях в значениях λ_1 и λ_2 применение точной модели может быть оправдано при D_2 существенно больших D_1.

Таблица 7.

Результаты вычислений при точно известных значениях μ и при относительной погрешности 1% в значениях λ_1 и λ_2

Исходные данные				Точная модель				Приближенная модель			
D_2	v	λ_1	λ_2	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1	10	3.50	3.50	0.0787	0.0306	0.0787	0.0389	0.0788	0.0028	0.0788	0.0028
2	15	5.25	2.63	0.0525	0.0192	0.1198	0.0680	0.0470	0.0023	0.1142	0.0051
3	20	7.00	2.33	0.0390	0.0163	0.1419	0.0963	0.0301	0.0019	0.1313	0.0070
5	25	8.75	1.75	0.0312	0.0135	0.2014	0.1660	0.0200	0.0016	0.2037	0.0114
10	30	10.50	1.05	0.0305	0.0065	0.3385	0.3277	0.0136	0.0013	0.5177	0.0247
10	35	12.25	1.23	0.0216	0.0178	0.2896	0.2795	0.0095	0.0010	0.3973	0.0226

В остальных случаях может быть оправданным переход к рассмотрению обслуживания потоков раздельно, который будет рассмотрен позднее.

Следующая группа результатов посвящена исследованию зависимости результатов расчета вероятностей $\pi_{c,1}$ и $\pi_{c,2}$ в зависимости от погрешности в значениях μ.

Таблица 8.

Результаты вычислений при точно известных значениях λ_1 и λ_2 и при относительной погрешности 10% в значениях μ

Исходные данные				Точная модель				Приближенная модель			
D_2	v	λ_1	λ_2	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1	10	3.50	3.50	0.0787	0.4045	0.0787	0.4890	0.0890	0.0227	0.0890	0.0227
2	15	5.25	2.63	0.0525	0.2922	0.1198	0.7485	0.0553	0.0210	0.1315	0.0443
3	20	7.00	2.33	0.0390	0.2622	0.1419	1.0054	0.0373	0.0184	0.1548	0.0635
5	25	8.75	1.75	0.0312	0.2360	0.2014	1.4865	0.0265	0.0157	0.2413	0.1052
10	30	10.50	1.05	0.0305	0.1603	0.3385	2.8477	0.0195	0.0132	0.5882	0.2266
10	35	12.25	1.23	0.0216	0.2801	0.2896	2.6561	0.0148	0.0111	0.4680	0.2125

В данном случае получаются результаты, аналогичные полученным при таком же значении погрешности для λ_1 и λ_2. Определение вероятности $\pi_{c,2}$ с помощью точной модели оказывается в этом случае практически бесполезным, поскольку получающиеся при этом возможные границы изменения этой характеристики оказываются шире интервала [0, 1] (исключая случай $D_2 = 2$, когда применение точной модели не дает существенное изменение результатов по сравнению с простой моделью). При $D_2 = 10$ получающийся результат существенно хуже, чем в случае погрешности в значениях интенсивностей потоков требований. Здесь погрешность в определении $\pi_{c,1}$ оказывается почти в 14 раз больше самой характеристики, поэтому даже при уменьшении погрешности в 10 раз мы будем иметь значение погрешности больше самой оцениваемой величины. Модель оказалась более чувствительной к погрешности в определении среднего времени обслуживания μ по той причине, что интенсивность освобождения получается при умножении μ на число занятых устройств, которое может достигать значения v, поэтому диапазон изменения интенсивностей освобождения оказывается более широким, чем диапазон изменения интенсивностей поступления.

Таблица 9.

Результаты вычислений при точно известных значениях λ_1 и λ_2 и при относительной погрешности 1% в значениях μ

Исходные данные				Точная модель				Приближенная модель			
D_2	v	λ_1	λ_2	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1	10	3.50	3.50	0.0787	0.0405	0.0787	0.0489	0.0795	0.0021	0.0795	0.0021
2	15	5.25	2.63	0.0525	0.0292	0.1198	0.0749	0.0475	0.0019	0.1152	0.0041
3	20	7.00	2.33	0.0390	0.0262	0.1419	0.1005	0.0304	0.0017	0.1325	0.0058
5	25	8.75	1.75	0.0312	0.0236	0.2014	0.1487	0.0202	0.0014	0.2056	0.0097
10	30	10.50	1.05	0.0305	0.0160	0.3385	0.2848	0.0138	0.0011	0.5214	0.0212
10	35	12.25	1.23	0.0216	0.0280	0.2896	0.2656	0.0096	0.0009	0.4004	0.0197

Анализ полученных данных показывает, что при расчете вероятности $\pi_{c,2}$ применение точной модели неоправдано во всех случаях. Действительно, верхняя граница для $\pi_{c,2}$ с учетом погрешности во всех случаях больше соответствующей верхней границы для приближенной модели, хотя последняя дает оценку сверху для вероятности потерь требований второго потока. Следует отметить, что погрешность результата, связанная с погрешностью в значении параметра μ, для второй модели оказывается существенно меньше погрешности самой модели. При $D_2 = 10$ погрешность в определении $\pi_{c,1}$, связанная с упрощением модели, равна 0.0167 в первом случае и 0.120 — во втором, а погрешность, связанная с погрешностью в значении параметра μ, равна 0.0011 в первом случае, и 0.0009 — во втором, что оказывается меньше более чем в 10 раз. Это означает, что в этом случае вычислительные погрешности приближенной модели достаточны для вычисления вероятностей потерь; они не вносят существенные дополнительные ошибки в результат по сравнению с погрешностями самой модели.

Для вероятности $\pi_{c,1}$ погрешность точной модели составляет 50 % – 100 % процентов и более, поэтому применение точной модели оказывается оправданным при 1% погрешности в значениях μ только при $D_2 \geq 10$.

Полученные результаты показывают, что применение точной модели может быть оправдано лишь при очень точных значениях параметров λ_1, λ_2 и μ. В рассмотренной нами ситуации эти погрешности должны быть менее 1%. Для достижения такой точности в реальных условиях требуется очень точное описание модели и проведение большого числа измерений. Понятно, что это если и достижимо, то только для сетей, находящихся продолжительное время в эксплуатации; при этом должны проводиться измерения нагрузки для определения точных значений параметров λ_1, λ_2 и μ в важные для оператора интервалы времени (ЧНН). Однако в действительности наибольшую ценность рассматриваемые методы расчета пропускной способности линии представляют при решении задач проектирования сетей. Понятно, что в этом случае говорить о точном знании параметров λ_1, λ_2 и μ не приходится, поскольку на этапе проектирования можно знать значения таких характеристик только примерно исходя из типов абонентов, которых предполагается обслуживать создаваемой или реконструируемой сетью. Применение точной модели в этом случае, как показывают полученные результаты, оказываются неэффективными. С другой стороны, применение приближенной модели так же может приводить к серьезным ошибкам, поскольку она дает в ряде случаев слишком оптимистические значения для вероятностей $\pi_{c,1}$ и пессимистические для $\pi_{c,2}$. В качестве альтернативы предлагается рассмотреть модель, когда каждый из потоков обслуживается отдельно заранее выделенной частью пропускной способности линии. Понятно, что в этом случае мы будем получать верхние оценки для вероятностей $\pi_{c,1}$ и $\pi_{c,2}$, поскольку часть требований, которые могли бы быть обслуженными при использовании совместного ресурса выделенных частей линии, теряются в случае их раздельного обслуживания.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПРИ РАЗДЕЛЬНОМ ОБСЛУЖИВАНИИ ПОТОКОВ

Ниже приводятся результаты расчетов раздельного обслуживания двух потоков с интенсивностями как и при их совместном обслуживании, однако каждому из них выделена заранее заданная часть ресурса линии. При выделении ресурса для второго потока необходимо учитывать, что число передаточных единиц должно быть кратно D_2, при этом выделяемая часть ресурса должна быть не менее средней нагрузки на передаточную единицу для каждого из потоков. В связи с этим возможно несколько вариантов разделения ресурса в рассматриваемых ранее условиях. Пусть v_1 — число передаточных единиц линии, выделяемых на обслуживание требований первого потока, а v_2 — на обслуживание требований второго потока. Вариант $D_2 = 1$ — это модельный вариант, он служит исключительно для определения влияния эффекта модификации точной модели на вычисляемые характеристики, поэтому здесь выбрано разделение ресурса поровну между потоками. Для $D_2 = 2$ в наших условиях возможны два варианта распределения ресурса: первый вариант — $v_1 = 7$, $v_2 = 8$, второй вариант — $v_1 = 9$, $v_2 = 6$. Заметим, что при всех проводившихся в рассматриваемой серии расчетах средняя нагрузка на одну передаточную единицу была равной 0.7. При распределении ресурса между потоками этот параметр изменяется: для первого варианта средняя нагрузка на одну передаточную единицу для первого потока равна 0.75, а для второго потока равна 0.66; для второго варианта средняя нагрузка на одну передаточную единицу для первого потока равна 0.58, а для второго потока равна 0.875. Для $D_2 = 3$ так же возможны два варианта распределения ресурса: первый вариант — $v_1 = 11$, $v_2 = 9$, второй вариант — $v_1 = 8$, $v_2 = 12$, поскольку ресурс, выделяемый второму потоку, должен быть кратным 3. Теперь средняя нагрузка на одну передаточную единицу будет: для первого варианта — для первого потока 0.64, а для второго потока 0.78; для второго варианта — для первого потока 0.875, а для второго потока 0.58. Для $D_2 = 5$: первый вариант — $v_1 = 15$, $v_2 = 10$, второй вариант — $v_1 = 10$, $v_2 = 15$, поскольку ресурс, выделяемый второму потоку, должен быть кратным 5. Здесь средняя нагрузка на одну передаточную единицу будет: для первого варианта — для первого потока 0.58, а для второго потока 0.875; для второго варианта — для первого потока 0.875, а для второго потока 0.58. Для $D_2 = 10$ возможен только один варианта распределения ресурса: $v_1 = 15$, $v_2 = 20$, поскольку ресурс, выделяемый второму потоку, должен быть кратным 10, а при $v = 30$ распределить ресурс таким образом, чтобы средняя нагрузка на одну передаточную единицу была меньше 1, вообще невозможно. Теперь средняя нагрузка на одну передаточную единицу будет для первого потока 0.82, а для второго потока 0.62. Поскольку емкость линии в рассматриваемых примерах является небольшой, то дискретность выбора ресурса для второго потока оказывает сильное влияние на средняя нагрузка на одну передаточную единицу для потоков и сделать ее примерно одинаковой для всех потоков не удается. Это приводит к тому, что вероятность потерь для того из потоков, которому досталась относительно меньшая часть ресурса, будет иметь большие потери. Они будут превосходить те погрешности, которые возникают просто из-за разделения общего ресурса между различными пользователями.

В тестовом варианте, когда выдержан баланс распределения нагрузки между потоками, оценка, даваемая моделью с раздельным обслуживанием, оказывается лучше, чем точная модель, если погрешность в значениях μ равна 10%, и хуже, если погрешность в значениях μ равна 1%. Если погрешность в значениях μ равна 10%, то верхняя граница для $\pi_{c,1}$ равна 0.48, а при раздельном обслуживании 0.18, что существенно ближе к точному значению 0.08. Если погрешность в значениях μ равна 1%, то верхняя граница для $\pi_{c,1}$ равна 0.12, а при раздельном обслуживании 0.16, что уже дальше от точного значения 0.08. Таким образом, в идеальном случае распределения нагрузки между потоками при относительной погрешности в значениях μ 1% лучше пользоваться точной моделью, а при 10% — моделью с раздельным обслуживанием.

Таблица 10.

Результаты вычислений при точно известных значениях λ_1 и λ_2 и при относительной погрешности 10% в значениях μ

Исходные данные				Точная модель				Раздельное обслуживание			
D_2	v_1+v_2	λ_1	λ_2	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1	5+5	3.50	3.50	0.0787	0.4055	0.0787	0.4890	0.1694	0.0198	0.1694	0.0198
2	7+8	5.25	2.63	0.0525	0.2922	0.1198	0.7495	0.1506	0.0236	0.1798	0.0171
2	9+6	5.25	2.63	0.0525	0.2922	0.1198	0.7495	0.0527	0.0154	0.3218	0.0143
3	11+9	7.00	2.33	0.0390	0.2622	0.1419	1.0054	0.0553	0.0179	0.2802	0.0144
3	8+12	7.00	2.33	0.0390	0.2622	0.1419	1.0054	0.1959	0.0273	0.1446	0.0157
5	15+10	8.75	1.75	0.0312	0.2360	0.2014	1.4875	0.0210	0.0103	0.3824	0.0086
5	10+15	8.75	1.75	0.0312	0.2360	0.2014	1.4875	0.1721	0.0297	0.1888	0.0134
10	15+20	12.25	1.23	0.0216	0.2801	0.2896	2.6561	0.1051	0.0301	0.2729	0.0089

Таблица 11.

Результаты вычислений при точно известных значениях λ_1 и λ_2 и при относительной погрешности 1% в значениях μ

Исходные данные				Точная модель				Раздельное обслуживание			
D_2	v_1+v_2	λ_1	λ_2	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1	5+5	3.50	3.50	0.0787	0.0405	0.0787	0.0489	0.1554	0.0019	0.1554	0.0019
2	7+8	5.25	2.63	0.0525	0.0292	0.1198	0.0749	0.1462	0.0014	0.1654	0.0016
2	9+6	5.25	2.63	0.0525	0.0292	0.1198	0.0749	0.0475	0.0019	0.3010	0.0014
3	11+9	7.00	2.33	0.0390	0.0262	0.1419	0.1005	0.0482	0.0016	0.2610	0.0014
3	8+12	7.00	2.33	0.0390	0.0262	0.1419	0.1005	0.1803	0.0026	0.1324	0.0015
5	15+10	8.75	1.75	0.0312	0.0236	0.2014	0.1487	0.0168	0.0009	0.3600	0.0008
5	10+15	8.75	1.75	0.0312	0.0236	0.2014	0.1487	0.1576	0.0028	0.1741	0.0013
10	15+20	12.25	1.23	0.0216	0.0280	0.2896	0.2656	0.0939	0.0028	0.2597	0.0009

Заметим, что для $\pi_{c,2}$ оценка оказалась хуже, хотя обе вероятности должны быть одинаковыми. Различие связано с тем, что из системы уравнений статистического равновесия (1)–(5) удалено одно уравнение, которое заменено условием нормировки (6), поэтому была нарушена симметрия в представлении потоков в модели.

При других значениях D_2 ситуация несколько хуже, потому что не удается добиться равного значения средней нагрузки на одну передаточную единицу для каждого из потоков. Заметим, что при погрешности 10% даже при самом неблагоприятном выделении ресурса для перового потока верхняя граница для $\pi_{c,1}$ ниже, чем для точной модели: при $D_2 = 2$ у точной модели верхняя граница 0.34, а у модели с раздельным обслуживанием — не выше 0.17, при $D_2 = 5$ 0.27 и 0.20 соответственно, а при $D_2 = 10$ — 0.30 и 0.14 соответственно. При вычислении $\pi_{c,2}$ ситуация еще хуже: точная модель дает практически бесполезный результат с точки зрения гарантированного решения, а раздельное обслуживание даже при самом неблагоприятном распределении ресурса дает относительную погрешность до 100 %. Таким образом, при погрешности в определении μ 10% и более применение модели с раздельным обслуживанием потоков оказывается предпочтительнее использования точной модели.

При погрешности в значении μ 1% результаты расчетов показывают, что ситуация с точной моделью существенно улучшается. Однако, если выбрать из возможных вариантов распределения ресурсов тот, когда нагрузка на одну передаточную единицу ближе к соответствующей у точной модели, то погрешность, получающаяся у модели с раздельным обслуживанием оказывается близкой к верхней границе, задаваемой точной моделью. Например, при $D_2 = 3$, $v_1 + v_2 = 11 + 9$ верхняя граница для $\pi_{c,1}$ у точной модели — 0.06, у модели с раздельным обслуживанием — не выше 0.05, верхняя граница для $\pi_{c,2}$ у точной модели — 0.24, у модели с раздельным обслуживанием — не выше 0.26; при $D_2 = 5$, $v_1 + v_2 = 15 + 10$ верхняя граница для $\pi_{c,2}$ 0.35 и 0.36, верхняя граница для $\pi_{c,1}$ 0.05 и 0.02 соответственно. Понятно, что при погрешности в значении параметра μ менее 1% точная модель будет давать более точные значения, чем модель с раздельным обслуживанием потоков.

Как отмечалось выше, в рассмотренных случаях не удалось распределить ресурс линии равномерно между потоками. Следующая серия вычислений посвящена исследованию идеального варианта распределения ресурса между потоками, когда средняя нагрузка на одну передаточную линию одинаковая для обоих потоков. Вычисления проводились при следующих исходных данных: $v = 30$, $D_2 = 5$, $v_1 = v_2 = 15$, $\lambda_1 = v_1 * \rho$, $\lambda_2 = v_2 * \rho / D_2$, $\mu = 1$. Значения ρ и относительной погрешности в значениях входных параметров приведены в таблицах.

Для каждого случая проводились три серии вычислений, которые различались уровнем погрешности в исходных данных. По сравнению с предыдущим был введен промежуточный уровень, когда относительная погрешность равна 5%. Кроме того, введен новый уровень в 0.5%. Случай 10% погрешности не рассматривался, поскольку из предыдущих примеров ясно, что в этом случае модель с раздельным обслуживанием потоков будет иметь предпочтение. В первой серии, когда относительная погрешность равна 1%, проводились расчеты при различных значениях ρ: от перегруженной линии, до слабо нагруженной. В остальных случаях рассматривались средне нагруженные линии.

Таблица 12.

Результаты вычислений при точно известных значениях μ и при заданной относительной погрешности в значениях λ_1 и λ_2

Исходные данные		Точная модель				Раздельное обслуживание			
ρ	$\Delta\lambda_i$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1.0	0.01	0.0752	0.0442	0.3818	0.3536	0.1803	0.0033	0.3460	0.0120
0.8	0.01	0.0402	0.0226	0.2364	0.2064	0.08573	0.00029	0.2684	0.0014
0.6	0.01	0.0143	0.0089	0.1012	0.0961	0.01987	0.00014	0.1803	0.0015
0.5	0.01	0.0065	0.0054	0.0516	0.0608	0.00568	0.00006	0.1343	0.0015
0.4	0.01	0.0022	0.0031	0.0200	0.0379	0.000892	0.000013	0.0898	0.0014
0.3	0.01	0.00046	0.00175	0.0050	0.0229	0.000053	0.000001	0.0501	0.0012
0.7	0.05	0.0257	0.0723	0.1648	0.7267	0.0470	0.0011	0.2253	0.0074
0.6	0.05	0.0143	0.0445	0.1012	0.4804	0.0199	0.0007	0.1803	0.0076
0.5	0.05	0.0065	0.0268	0.0516	0.3042	0.00568	0.00029	0.1343	0.0076
0.6	0.005	0.0143	0.0045	0.1012	0.0480	0.0199	0.0001	0.1803	0.0008
0.5	0.005	0.0065	0.0027	0.0516	0.0304	0.00568	0.00003	0.1343	0.0008
0.4	0.005	0.0022	0.0016	0.0200	0.0190	0.000892	0.000007	0.0898	0.0007

Анализ приведенных данных показывает, что как и в предыдущих случаях, не наблюдается принципиальной разницы в природе погрешности. Поэтому подробно проанализируем результаты, приведенные в таб. 12.

При относительной погрешности 5% во всех случаях модель с раздельным обслуживанием дает более узкие границы для вероятностей потерь требований как первого, так и второго потоков. И это несмотря на то, что в случае малой нагрузки она дает заниженное значение вероятности. Связано это с тем, что относительная погрешность у основной модели оказывается очень большой: в 6–8 раз больше самой вычисляемой величины вероятности. Для вероятности $\pi_{c,2}$ модель с раздельным обслуживанием всегда дает завышенное значение, однако более низкая погрешность позволяет иметь более низкую итоговую верхнюю границу для вероятности потерь второго потока.

Таблица 13.

Результаты вычислений при точно известных значениях λ_1 и λ_2 и при заданной относительной погрешности в значениях μ

Исходные данные		Точная модель				Раздельное обслуживание			
ρ	$\Delta\mu$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$	$\pi_{c,1}$	$\Delta\pi_{c,1}$	$\pi_{c,2}$	$\Delta\pi_{c,2}$
1.0	0.01	0.0752	0.0548	0.3818	0.3818	0.1818	0.0034	0.3484	0.0013
0.8	0.01	0.0402	0.0326	0.2364	0.2260	0.0865	0.0027	0.2704	0.0014
0.6	0.01	0.0148	0.0188	0.1012	0.0927	0.0201	0.0010	0.1818	0.0013
0.5	0.01	0.00646	0.01533	0.0516	0.0538	0.00574	0.00038	0.1355	0.0011
0.4	0.01	0.00217	0.01310	0.0200	0.0346	0.000904	0.000072	0.0906	0.0009
0.3	0.01	0.00046	0.01175	0.0050	0.0248	0.000054	0.000005	0.0506	0.0006
0.7	0.05	0.0257	0.1214	0.1648	0.7704	0.0501	0.0100	0.2346	0.0069
0.6	0.05	0.0143	0.0942	0.1012	0.4658	0.0215	0.0055	0.1881	0.0066
0.5	0.05	0.00646	0.07664	0.0516	0.2698	0.00629	0.00199	0.1406	0.0058
0.6	0.005	0.0143	0.0094	0.1012	0.0464	0.0200	0.0005	0.1810	0.0006
0.5	0.005	0.00646	0.00766	0.0516	0.0269	0.00571	0.00019	0.1349	0.0006
0.4	0.005	0.00217	0.00655	0.0200	0.0173	0.00090	0.00004	0.09019	0.00045

При относительной погрешности 1% ситуация иная. Для вероятности $\pi_{c,1}$ точная модель всегда дает лучший результат. При $\rho = 0.8$ и $\rho = 0.6$, т.е. в условиях большой и средней нагрузки на одну передаточную единицу, обе модели дают примерно одинаковые верхние границы для вероятности потерь требований первого потока, однако погрешность у модели с раздельным обслуживанием существенно меньше. Здесь необходимо отметить, что при малых нагрузках: $\rho = 0.4$ и $\rho = 0.3$ модель с раздельным обслуживанием дает меньшее значение вероятности $\pi_{c,1}$, которое оказывается заниженным по сравнению с точным результатом. Здесь наблюдается эффект, связанный с тем, что при малых нагрузках выделение гарантированного объема ресурса для требований первого потока дает ему преимущества по сравнению с тем случаем, когда он делит общий ресурс со вторым потоком. Обусловлено это, как отмечалось в [2], тем обстоятельством, что может поступить относительно небольшая группа требований второго потока, которая заблокирует доступ к ресурсу требований первого потока. Для вероятности $\pi_{c,2}$ получается похожий результат. Однако при $\rho = 1$, $\rho = 0.8$ и $\rho = 0.6$ вторая модель дает лучший результат. При меньших значениях нагрузки лучшие результаты дает точная модель. Хотя в этих случаях относительная погрешность оказывается больше 100%, однако у модели с раздельным обслуживанием вероятность потерь требований второго потока оказывается существенно больше. Здесь начинает сказываться то обстоятельство, что для второго потока получается линия с малым значением пропускной способности, выраженной в передаточных единицах этого потока (в данном случае $v_2 = 3$), поэтому малые значения вероятности потерь трудно достижимы.

При относительной погрешности 0.5% во всех случаях точная модель дает более низкую верхнюю границу для вероятностей потерь требований как первого, так и второго потоков, а модель с раздельным обслуживание дает границы, не входящие в интервал возможных значений вероятностей потерь. При этом возможны отклонения как в одну, так и в другую сторону. При $\rho = 0.6$ вероятности оказываются завышенными, а при $\rho = 0.4$ вероятность потерь требований первого потока существенно заниженной: она меньше нижней границы для этой вероятности, даваемой точной моделью.

При погрешностях в значении μ результат практически такой же. Отметим только, что в этом случае погрешности в вычислении вероятности потерь требований первого потока у точной модели оказываются несколько больше, что, однако, при анализируемых данных не дает дополнительные преимущества для модели с раздельным обслуживанием.

7. ВЫВОДЫ

1. Уровень погрешности в значениях входных параметров модели может оказывать определяющее значение при решении вопроса о целесообразности введения усложнений в модель. Целесообразность модели при вычислении одних характеристик может не оправдываться при вычислении других моделей.
2. При необходимости получения гарантированных значений характеристик в ряде случаев предпочтительным оказывается использование более простых моделей МСС с раздельным обслуживанием разных потоков, хотя эти модели будут давать заведомо смещенные оценки рассчитываемых характеристик.
3. При объединении потоков требований в МСС необходимо учитывать не только свойства самих процессов, но и точность задания их параметров. Это может приводить к целесообразности объединения существенно большего количества поток в один даже при условии, что в этом случае придется увеличить интервалы изменения их параметров.
4. При росте емкости линии возрастает погрешность вычислений при применении точной модели и ее применение может оказаться неоправданным даже если значения входных параметров известны очень точно. В этом случае целесообразно переходить к такой модификации модели, при которой можно избежать решения систем уравнений статистического равновесия.

Автор выражает признательность своему научному руководителю Цитовичу И.И. за редактирование рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. *Теория телетрафика мультисервисных сетей.* М.: РУДН, 2007.
2. Лагутин В.С., Степанов С.Н. *Телетрафик мультисервисных сетей связи.* М.: Радио и связь, 2000.
3. Tsitovich I., Bubnov Yu., Melik-Gaykazova E. On robust models of multyservise system traffic *XII-th International summer conference on probability and statistics. Abstracts.* Bulgaria, Sozopol, 2006, p. 38.
4. Цитович И.И. Устойчивые модели трафика мультисервисных сетей *Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С.Попова. Серия: научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск: LX-2.* М.: 2005, том 2, стр. 271–273.
5. Сегайер А., Цитович И.И. Об интервальных задачах для моделей пакетных сетей. *Обозрение прикладной и промышленной математики,* 2008, том 15, № 6, стр. 1130–1131.
6. Сегайер А., Цитович И.И. О задаче построения моделей МСС. *Электоросвязь*, 2009, № 6, стр. 87–91.
7. Ащепков Л.Т. *Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления.* М.: Наука, 2006.