Информационные процессы, Том 9, № 3, 2009, стр. 183–198.

Оптимальное правило остановки в задаче различения гипотез в схеме с возможными переключениями.

Ю.А.Кузнецов

МГУ им.М.В.Ломоносова, Москва
Поступила в редколлегию 4.08.2009

Аннотация—В статье рассматривается задача из области теории последовательного различения гипотез. Требуется различить гипотезы относительно неизвестного параметра, характеризующего поведение нескольких процессов. Случайные процессы возможно наблюдать поочередно и требуется найти оптимальное правило наблюдения и момент остановки наблюдения. В статье указываются оптимальные правила управления и границы продолжения наблюдений. Полученные утверждения иллюстрируются результатами численного моделирования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача последовательного различения *двух гипотез* была сформулирована Вальдом [1]. Им была указана процедура, основанная на последовательном критерии отношения вероятностей. В совместной работе Вальда с Волвфитцем [2] была показана оптимальность этой процедуры в *условно вариационной задаче*: при заданных ограничениях на вероятности ошибочных решений (вероятности ошибок первого и второго рода) необходимо найти процедуру, которая давала бы минимальную длительность наблюдений по обеим гипотезам. Этой же задаче посвящены работы Блеквейла и Гиршика [3], Ширяева [4], Лемана [5]. Ширяевым А.Н. в [6] было дано решение *байесовской задачи* последовательного различения двух гипотез о сносе броуновского движения, из которого следовала оптимальность вальдовской процедуры в случае броуновского движения.

Представляет значительный интерес рассмотрение следующего обобщения вальдовской постановки задачи последовательного различения гипотез, идущей из радиолокации. Постановка задачи содержится в разделах ниже.

2. ИМПУЛЬСНАЯ ПОСТАНОВКА

В непрерывном времени задача первоначально возникла в радиолокации как проблема обнаружения цели.

Представим себе, что имеется прибор (*локатор*), который может наблюдать в одном из двух направлений (*север,юг*). Допускается переключение с одного *направления* на другое. Требуется различить две гипотезы: H_0 – интересующая нас *цель* присутствует на одном из этих направлений, H_1 – цели нет. Одна из возможных постановок задачи состоит в том, чтобы при заданных ограничениях на вероятности ложных тревог минимизировать среднее время до принятия решений (*цель есть/цели нет* или *цель есть на том или другом направлении/цели нет*).

Настоящая работа посвящена решению формулируемых далее задач последовательного различения гипотез в предположении, что отсутствие цели моделируется броуновским движением (*белым* шумом в различной интерпретации), её же наличие – броуновским движением со сносом. Пусть на 1-ом направлении может наблюдаться процесс X_t^{imp} и на 2-ом направлении процесс Y_t^{imp} (индекс “imp” от англ. impulsive–импульсный, здесь этот индекс означает, что процессы рассматриваются в рамках импульсной постановки). В момент времени t=0 разыгрывается значение случайной величины θ, принимающей одно из трех возможных значений 0,1,2. Пусть известны вероятности $\pi_i = \mathrm{P}(\theta = i), i = 0, 1, 2$. При этом стохастические дифференциалы наблюдаемых процессов равны

$$\begin{cases} dX_t^{imp} = 1_{\theta=1}dt + dW_t^1, \\ dY_t^{imp} = 1_{\theta=2}dt + dW_t^2. \end{cases}$$

Здесь W_t^1, W_t^2 – независимые броуновские движения. Значение θ показывает на каком направлении находится цель: $\theta = 1$ $(\theta = 2)$ означает, что цель присутствует на первом(втором) направлении, при $\theta = 0$ цель отсутствует.

Поскольку наблюдения могут проводиться только по одному направлению, необходимо определить понятие переключения между наблюдаемыми направлениями. Самое простое определение *стратегии переключения* заключается в задании некоторой последовательности моментов остановки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$. А именно, допустим в момент t=0 принято решение наблюдать первое направление. Обозначим τ_1 – первый момент времени (случайный момент остановки) когда принято решение о переключении наблюдения направлений, т.е. предположим, что в интервале $[0, \tau_1)$ наблюдается первое направление, а далее в момент τ_1 происходит переключение на второе направление. Пусть следующее переключение происходит в случайный момент времени τ_2, т.е. на интервале $[\tau_1, \tau_2)$ наблюдается второе направление и т.д. Если $\tau_1, \tau_2, \tau_3, , ...$ – последовательность случайных моментов, где происходят переключения, то на интервалах вида $[\tau_{2i}, \tau_{2i+1})$ производится наблюдение на первом направлении, а на интервалах вида $[\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2})$ на втором(i=1,2,..). Пусть каждый наблюдаемый процесс в самом начале его наблюдения стартует из 0, т.е. предположим, что $X_{\tau_k}^{imp} = 0$ и $Y_{\tau_k}^{imp} = 0$, если на интервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$ наблюдается процесс X_t^{imp} или Y_t^{imp} соответственно. Обозначим получающийся в результате этой процедуры наблюдения за процессами X_t^{imp} и Y_t^{imp} процесс через Z_t. При этом значения процесса Z_t будут совпадать со значениями процесса X_t^{imp} на всех интервалах времени где наблюдался процесс X_t^{imp} и , аналогично, Z_t будет совпадать с Y_t^{imp} всюду где наблюдался Y_t^{imp}. Предположим, что моменты, в которые происходят переключения являются моментами остановки относительно фильтрации, порожденной наблюденным процессом Z_t.

В некоторый случайный момент времени τ мы можем прекратить наблюдения и принять решение $d = 0, 1$ о значении параметра θ. Значение $d = 0$ $(d = 1)$ будет означать, что принято решение об отсутствии (наличии) цели. Пусть $\Gamma = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...)$ – множество моментов переключения между направлениями. Тройку (Γ, τ, d) будем называть стратегией. При применении такой стратегии мы понесем потери, равные следующей функции риска

$$\rho(\Gamma, \tau, d) = \mathrm{E}\left(\alpha \mathrm{I}(\theta = 0, d = 1) + \beta \mathrm{I}(\theta = 1, 2, d = 0) + c\tau\right),$$

где α и β – платы за ошибки первого и второго рода, c– плата за единицу времени наблюдения за процессами.

Задача заключается в нахождении оптимальной стратегии(если она существует) и нахождении минимального риска по всем возможным стратегиям

$$\rho = \rho\left(\pi_0, \pi_1, \pi_2\right) = \inf_{(\Gamma, \tau, d)} \rho(\Gamma, \tau, d).$$

Это так называемая *импульсная* постановка (*импульсы* – это моменты переключения). Заметим, что если считать, что моменты переключения могут быть только кратными некоторому числу $\delta > 0$, то импульсная постановка превращается в задачу различения гипотез в схеме с альтернативными наблюдениями в дискретном времени, изучаемую в [7], [8].

Недостатком импульсной постановки в непрерывном времени является то, что в классе импульсных стратегий может не существовать оптимального правила, хотя можно найти импульсное управление, имеющее риск как угодно близкий к функции риска ρ.

3. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА

В предыдущем разделе были определены процессы X_t^{imp}, Y_t^{imp}, находящиеся на двух направлениях и был определен процесс Z_t, получающийся в результате наблюдений за процессами X_t^{imp}, Y_t^{imp}. В этом разделе мы введем два процесса X_t, Y_t, аккумулирующие наблюденные процессы на обоих направлениях. Рассмотрим интервалы времени, где наблюдается только первое направление. Пусть это будут интервалы $[0,\tau_1), [\tau_2,\tau_3), [\tau_4,\tau_5)$....

Для построения процесса X_s "склеим" траектории процесса Z_t на этих интервалах, при этом индекс s в X_s будет обозначать общее время наблюдения только первого направления на временном промежутке $[0,t]$, т.е. определим

$$X_s = Z_{\tau_1} + Z_{\tau_3} + Z_{\tau_5} + ... + Z_{\tau_{2n-1}} + Z_t,$$

где $t \in [2n, 2n+1)$ и

$$\begin{aligned} s &= |[0,\tau_1)| + |[\tau_2,\tau_3)| + ... + |[\tau_{2n-2},\tau_{2n-1})| + |[t,\tau_{2n+1})| = \\ &= \tau_1 + (\tau_3-\tau_2) + ... + (\tau_{2n-1}-\tau_{2n-2}) + (\tau_{2n+1}-t). \end{aligned}$$

Аналогично определяется процесс Y_s. В итоге мы определили пару случайных процессов (X_{t_1}, Y_{t_2}), где $t_1(t_2)$ – общее время наблюдения первого(второго) направления. При этом если t – общее время наблюдения за процессами, то $t_1 + t_2 = t$. Легко проверить, что получившиеся процессы X_{t_1}, Y_{t_2} являются броуновскими движениями, если $\theta = 0$. Если же $\theta = 1$, то X_t является броуновским движением со сносом, а Y_t – независимым от него броуновским движением. Если $\theta = 2$, то Y_t является броуновским движением со сносом, а X_t – независимым от Y_t броуновским движением, т.е.

$$X_{t_1} = \begin{cases} W_{t_1}^1, \theta = 0, 2, \\ W_{t_1}^1 + t_1, \theta = 1 \end{cases}$$

и

$$Y_{t_2} = \begin{cases} W_{t_2}^2, \theta = 0, 1, \\ W_{t_2}^2 + t_2, \theta = 2, \end{cases}$$

где $W_{t_1}^1, W_{t_2}^2$ – независимые броуновские движения.

Чтобы задать теперь правило выбора направления для наблюдения определим два процесса $(T_1(t), T_2(t))$, где $T_i(t)$ – общее время наблюдения i-го направления (i=1,2). При этом $T_1(t) + T_2(t) = t$, где t – общее время наблюдения. Любые две такие неубывающие функции будут задавать некоторое правило для наблюдения за процессами. Заметим, что в импульсной постановке правило выбора направления задавалось с помощью последовательности моментов переключения между направлениями. Сейчас эта последовательность заменена на две неубывающие функции. При этом такая замена является расширением множества возможных стратегий. Действительно, имея последовательность моментов переключения в импульсной постановке, можно построить две неубывающие ступенчатые функции равными общему времени наблюдения соответствующего направления с точками роста в этих моментах. По этим двум функциям можно однозначно восстановить последовательность моментов переключения (это будут точки скачков функций). Поэтому для описания правила переключения направлений можно задать процессы $(T_1(t), T_2(t))$. В дальнейшем будем оперировать именно с этой парой. Удобно определить стратегию как четверку $s = (T_1(t), T_2(t), \tau, d)$. Заметим, что если в импульсной постановке построить процессы $T_1(t), T_2(t)$ по моментам переключения направлений, то эти процессы будут неупреждающими, т.е. $T_1(t), T_2(t)$ будут измеримы относительно фильтрации, порожденной наблюденными процессами до момента t:

$$\{T_1(t) \leq t_1, T_2(t) \leq t_2\} = \sigma(X_{u_1}, Y_{u_2}, u_1 \in [0, t_1], u_2 \in [0, t_2]).$$

Расширяя множество допустимых стратегий разумно требовать выполнение этого свойства и для пары $(T_1(t), T_2(t))$: определим стратегию переключения направлений как любую пару $(T_1(t), T_2(t))$ возрастающих неупреждающих процессов, выходящих из нуля и таких, что $T_1(t) + T_2(t) = t$. Заметим, что новый класс допустимых стратегий будет содержать принципиально новые управления, которые не могут быть реализованы в импульсной постановке. Такими управлениями будут, например, непрерывные управления (когда $T_1(t), T_2(t)$ – непрерывные функции), которые предписывают наблюдать оба направления одновременно. Итак,исходная задача переформулируется как проблема нахождения оптимальной стратегии и поиска следующей функции риска

$$\rho = \rho\,(\pi_1, \pi_2) = \inf_{(T_1(t), T_2(t), \tau, d)} \rho((T_1(t), T_2(t), \tau, d)) = \inf_s \mathrm{E}\,(\alpha \mathrm{I}(\theta = 0, d = 1) + \beta \mathrm{I}(\theta = 1, 2, d = 0) + c\tau)),$$

где $s = (T_1(t), T_2(t), \tau, d)$ – допустимая стратегия, т.е. такая, что

$$\begin{cases} T_1(0) = 0, \\ T_2(0) = 0, \\ T_1(t) + T_2(t) = t, \\ T_i(t) - \text{ неубывающая функция}, i = 1, 2, \\ \{T_1(t) \leq t_1, T_2(t) \leq t_2\} \in \mathcal{F}_{t_1, t_2} = \sigma(X_{u_1}, Y_{u_2}, u_1 \in [0, t_1], u_2 \in [0, t_2])\ \forall t_1, t_2, \\ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}\ \text{,т.е.} \{\tau \leq t\} \cap \{T_1(t) \leq t_1, T_2(t) \leq t_2\} \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}, \\ d \text{ является} \mathcal{F}_{T_1(t), T_2(t)} \text{ -измеримой случайной величиной.} \end{cases}$$

При этом наблюдаемые процессы имеют следующий вид

$$X_{t_1} = \begin{cases} W^1_{t_1}, \theta = 0, 2, \\ W^1_{t_1} + t_1, \theta = 1 \end{cases}$$

и

$$Y_{t_2} = \begin{cases} W^2_{t_2}, \theta = 0, 1, \\ W^2_{t_2} + t_2, \theta = 2, \end{cases}$$

где $W^1_{t_1}, W^2_{t_2}$- независимые броуновские движения.

Здесь α и β – платы за ошибки первого и второго рода, c – плата за единицу времени наблюдения за процессами. Далее будем считать, не ограничивая общности, что $\alpha = \beta = 1$. Всюду в дальнейшем будут использоваться следующие обозначения

$$\pi_0(t) = P(\theta = 0|\mathcal{F}_t), \pi_1(t) = P(\theta = 1|\mathcal{F}_t), \pi_2(t) = P(\theta = 2|\mathcal{F}_t)$$
$$\varphi_1(t) = \frac{\pi_1(t)}{\pi_0(t)}, \varphi_2(t) = \frac{\pi_2(t)}{\pi_0(t)},$$

где

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{(T_1(t), T_2(t))}.$$

4. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА.

Определение. Управление $(T_1(t), T_2(t))$ называется *стандартным*, если происходит наблюдение процеса Y_t (первого направления), когда $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ и процесса Y_t (второго направления), когда $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$, где $\varphi_i(t) = \pi_i(t)/\pi_0(t), i = 1, 2$.

Теорема. *1. В классе марковских стандартных стратегий оптимальное правило остановки определяется как момент первого попадания вектора $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ в некоторую область остановки наблюдений ($A \cup D$ на рис. 1). Область продолжения наблюдений разбивается на области возможных переключений между направлениями ($C_1 \cup C_2$) и область, где возможно наблюдение лишь одного направления ($B_1 \cup B_2$).*

2. Границы γ_1 и γ_2, разделяющие область остановки и область продолжения наблюдений, задаются с помощью кривых $\gamma_1 = \gamma_1(\varphi_1)$ и $\gamma_2 = \gamma_2(\varphi_1)$, которые могут быть для каждого $b = 1 + \varphi_1$ найдены как решения следующей системы уравнений (в области наблюдения B_1)

$$\begin{cases} c\left(\gamma_2 - \gamma_1\right)\left(\frac{b^2}{\gamma_1\gamma_2} - 1\right) = b - 1, \\ c\left(\gamma_2 - \gamma_1\right)\left(\frac{b^2}{\gamma_1\gamma_2} + 1\right) + 2cb\ln\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 1. \end{cases}$$

И функция риска в этой области равна

$$\rho\left(\varphi_1, \varphi_2\right) = 2c\left(\ln\varphi_2\right)\frac{b - \varphi_2}{b + \varphi_2} + \frac{c_1}{b + \varphi_2} + c_2,$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{(b+\gamma_1)(b+\gamma_2) - (\gamma_1+\gamma_2) - 2c(\ln\gamma_1)(b-\gamma_1)(b+\gamma_2) + 2c(\ln\gamma_2)(b-\gamma_2)(b+\gamma_1)}{\gamma_2-\gamma_1}, \\ c_2 &= \tfrac{(b+\gamma_1-2) - 2c(\ln\gamma_1)(b-\gamma_1) + 2c(\ln\gamma_2)(b-\gamma_2)}{\gamma_2-\gamma_1}. \end{aligned}$$

3. Граница $\tilde{\gamma}_2$, разделяющая область остановки и область продолжения наблюдений, задается в области C_1 с помощью кривой $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_2\left(\varphi_1\right)$, которая может быть найдена как решение следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\tilde{\gamma}_2'}{\tilde{\gamma}_2^2} = \frac{\left(1/\varphi_1 - 2\ln\varphi_1\right) - \left(1/\tilde{\gamma}_2 - 2\ln\tilde{\gamma}_2\right)}{\left(\varphi_1 - \tilde{\gamma}_2\right)\left(1 + \varphi_1 + \tilde{\gamma}_2\right)}$$

с начальным условием $\tilde{\gamma}_2\left(\varphi^*\right) = \gamma_2\left(\varphi^*\right)$, где φ^* таково, что $\gamma_1\left(\varphi^*\right) = \varphi^*$.

И функция риска в этой области равна

$$\rho\left(\varphi_1, \varphi_2\right) = 2c\left(\ln\varphi_2\right)\frac{1 + \varphi_1 - \varphi_2}{1 + \varphi_1 + \varphi_2} + \frac{c_1}{1 + \varphi_1 + \varphi_2} + c_2,$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= 2c\left(\tfrac{(1+\varphi_1)^2}{\gamma_2} - \gamma_2 - 2(1 + \varphi_1)\ln\gamma_2\right), \\ c_2 &= \tfrac{1}{1+\varphi_1+\gamma_2}\left(1 - c_1 - 2c(1 + \varphi_1 - \gamma_2)\ln\gamma_2\right). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы будет проводиться в несколько этапов. Сначала будут получены границы областей продолжения наблюдения и областей остановки. Отдельно будет рассмотрен случай с областью без переключений B_1 (будут указаны два способа нахождения границ) и случай с областью C_1, где возможно переключение между направлениями. Случаи с областями B_2 и C_2 могут быть рассмотрены по аналогии в силу симметрии. Затем будет доказана оптимальность момента остановки как первого момента выхода вектора апостериорных вероятностей гипотез за область продолжения наблюдений.

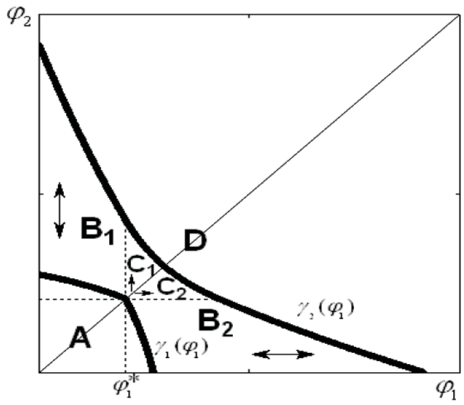


Рис. 1 Области остановки и продолжения наблюдений.

5. ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ ПРОДОЛЖЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ

5.1. Область без переключений B_1 (1 способ-вспомогательная задача)

Рассмотрим область пространства значений вектора апостериорных вероятностей гипотез в которой нет переключения между направлениями. Сведем исходную задачу к одномерной классической задаче последовательного различения гипотез (дальше в тексте–вспомогательная задача).

Пусть вектор относительных апостериорных вероятностей $(\varphi_1, \varphi_2) \in B_1$.

Введенные ранее процессы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, вообще говоря, зависят от всей траектории процессов $T_1(s)$ и $T_2(s)$ $(s \in [0, t])$. Однако, можно показать, что зависимость будет только от общего времени наблюдения за первым и вторым направлениями, т.е.

$$\varphi_1(t) = \varphi_1\left(T_1(t), T_2(t)\right), \varphi_2(t) = \varphi_2\left(T_1(t), T_2(t)\right).$$

Кроме того, можно доказать, что $\varphi_1(t)$ будет зависеть только от $T_1(t)$ и не будет зависеть от $T_2(t)$ (аналогично $\varphi_2(t)$ зависит только от $T_2(t)$). Поэтому

$$\varphi_1(T(t)) = \varphi_1(T_1(t), T_2(t)) = \varphi_1(T_1(t), 0)$$

и

$$\varphi_2(T(t)) = \varphi_2(T_1(t), T_2(t)) = \varphi_2(0, T_2(t)).$$

Отсюда, в частности следует, что если наблюдать, скажем, только второе направление, то изменяться будет только $\varphi_2(t)$, а $\varphi_1(t)$ изменяться не будет. Поэтому в этом случае вектор относительных апостериорных вероятностей (φ_1, φ_2) будет колебаться вдоль вертикальной оси (на рис. 1 в области B_1, где наблюдается только второе направление, это колебание условно обозначено направленными в противоположные стороны стрелками).

Заметим, что функция риска в рассматриваемой задаче может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned}\rho = \rho\left(\pi_0, \pi_1, \pi_2\right) &= \inf_{(T_1(t), T_2(t), \tau, d)} \mathrm{E}\left(\mathrm{I}(\theta = 0, d = 1) + \mathrm{I}(\theta = 1, 2, d = 0) + c\tau\right)\right) \\ &= \inf_{(T_1(t), T_2(t), \tau)} \mathrm{E}\left(\min(\pi_0(\tau), 1 - \pi_0(\tau)) + c\tau\right)\end{aligned}$$

в силу того, что если принято решение остановиться в момент τ, то оптимальное решение d определяется однозначно в зависимости от значения $\pi_0(\tau)$.

Далее, поскольку в области B_1 будет наблюдаться только второе направление, то $T_1(t) = 0$, $T_2(t) = \tau$ и поэтому задача свелась к нахождению оптимального момента остановки τ:

$$\rho = \rho\left(\pi_0, \pi_1, \pi_2\right) = \inf_{\tau} \mathrm{E}\left(\min(\pi_0(\tau), 1 - \pi_0(\tau)) + c\tau\right)$$

Для решения поставленной проблемы удобно рассмотреть вспомогательную задачу.

Вспомогательная задача. Пусть имеется некоторая неизвестная случайная величина δ, принимающая два возможных значения: 1 и 2. Определим процесс $Q_t = 1_{\delta=2}t + W_t$, где W_t– некоторый независимый от δ броуновский процесс. Предположим, что априорные вероятности $P(\delta = 1) = 1 - \pi, P(\delta = 2) = \pi$ известны. В момент $t = 0$ за процессом Q_t начинает производиться наблюдение. По результатам наблюдения за траекториями процесса Q_t можно в какой-то момент времени τ остановиться. Задача состоит в нахождении оптимального момента остановки τ, при котором будет минимальна следующая функция риска:

$$E(c\tau + \frac{1}{k}\min(1 - \pi(\tau), k - (1 - \pi(\tau))),$$

где $\pi(t) = \mathrm{P}(\,\delta = 2|\,\mathcal{F}_t^Q)$, $\mathcal{F}_t^Q = \sigma(Q_s, s \le t)$, $k > 0$ – некоторая константа.

Обозначим через ρ_2 – минимальное значение функции риска по всем возможным моментам остановки:

$$\rho_2 = \rho_2(\pi, k) = \min_{\tau}\left(E(c\tau + \frac{1}{k}\min(1 - \pi(\tau), k - (1 - \pi(\tau)))\right).$$

Тогда, если ρ – риск в исходной задаче, ρ_2 – риск во вспомогательной задаче, то верно следующее

Предложение 1. *Функция риска в исходной задаче связана с функцией риска во вспомогательной задаче в области B_1 следующим образом (в области без переключений между направлениями):*

$$\rho(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \left.\rho_2(\pi, k)\right|_{\substack{\pi=\pi_2 \\ k=1+\frac{\pi_1}{\pi_0}}}$$

Доказательство. В исходной задаче

$$\pi_0(t) = P(\theta = 0|\mathcal{F}_t), \pi_1(t) = P(\theta = 1|\mathcal{F}_t), \pi_2(t) = P(\theta = 2|\mathcal{F}_t)$$

При этом наблюдается только второе направление. Поэтому

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) = \frac{\pi_1(0)}{\pi_0(0)} = \frac{\pi_1}{\pi_0}.$$

Можно показать, что точное значение относительной вероятности $\varphi_2(t)$ будет следующим

$$\varphi_2(t) = \frac{\pi_2(t)}{\pi_0(t)} = \frac{\pi_2(0)}{\pi_0(0)}\exp(Y_t - \frac{t}{2}).$$

И риск в исходной задаче равен

$$\rho = \inf_{\tau}\left(c\tau + \min\left(\pi_0\left(\tau\right), 1 - \pi_0(\tau)\right)\right) =$$

$$= \inf_{\tau}\left(c\tau + \min\left(\frac{\varphi_1(0) + \varphi_2(t)}{1 + \varphi_1(0) + \varphi_2(t)}, \frac{1}{1 + \varphi_1(0) + \varphi_2(t)}\right)\right).$$

Обозначим относительную вероятность апостериорной вероятности в вспомогательной задаче через

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \frac{\pi(t)}{1-\pi(t)} = \frac{\pi(0)}{1-\pi(0)} \exp\left(Q_t - \frac{t}{2}\right).$$

Тогда имеем следующее равенство по распределению:

$$\frac{1-\pi(0)}{\pi(0)}\tilde{\varphi}_2(t) \stackrel{d}{=} \frac{\pi_0(0)}{\pi_2(0)}\varphi_2(t)$$

и

$$Q_t \stackrel{d}{=} Y_t, 0 \le t \le T,$$

где $T > 0$.

Кроме того,

$$ct + \min\left(\frac{\varphi_1(0)+\varphi_2(t)}{1+\varphi_1(0)+\varphi_2(t)}, \frac{1}{1+\varphi_1(0)+\varphi_2(t)}\right) =$$

$$= ct + \frac{1}{k}\min\left(1-\pi(t), k-(1-\pi(t))\right)\Big|_{\substack{\pi(0)=\pi_2 \\ k=1+\frac{\pi_1}{\pi_0}}}.$$

Отсюда получаем совпадение рисков и оптимальных стратегий в исходной и вспомогательной задачах. Значит, при $\gamma_1 \le \gamma_1^*$ задача сводиться к обычной задаче о различении двух гипотез, только лишь с измененной функцией риска.

Предложение 2. *В вспомогательной задаче оптимальным моментом остановки является первый момент выхода апостериорной вероятности $\pi(t)$ из области (A, B), где A и B– некоторые точки, являющиеся решением следующей системы уравнений:*

$$\begin{cases} L\left[\Psi(B)-\Psi(A)\right] - L(B-A)\psi(B) = 2-2B-k \\ L\left[\psi(A)-\psi(B)\right] = 2 \end{cases}$$

Здесь

$$\Psi(\pi) = (1-2\pi)\ln\left(\tfrac{\pi}{1-\pi}\right),$$
$$\psi(\pi) = \Psi'(\pi) = \left(\tfrac{1}{\pi} - \tfrac{1}{1-\pi}\right) + 2\ln\left(\tfrac{1-\pi}{\pi}\right).$$

Доказательство. Как и в классической задаче различения двух гипотез, сначала выпишем некоторую систему уравнений, которой должны удовлетворять функция риска и границы областей наблюдения. А потом покажем (это можно сделать так же как и в параграфе 6 далее), что найденное решение является действительно функцией риска. Итак, будем искать решение следующей системы при фиксированном значении k.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\rho_2}{\partial\pi^2}(\pi,k) = -\frac{2c}{\pi^2(1-\pi)^2}, A < \pi < B \\ \frac{\partial\rho_2}{\partial\pi}(\pi,k)\Big|_{\pi=A} = \frac{1}{k} \\ \frac{\partial\rho_2}{\partial\pi}(\pi,k)\Big|_{\pi=B} = -\frac{1}{k} \\ \rho_2(\pi,k)|_{\pi=A} = \left(1-\frac{1-\pi}{k}\right)\big|_{\pi=A} \\ \rho_2(\pi,k)|_{\pi=B} = \left(\frac{1-\pi}{k}\right)\big|_{\pi=B} \end{cases}$$

Обозначим $f(\pi) = k\rho_2(\pi,k), L = 2kc$. Тогда система перепишется следующим образом

$$\begin{cases} f''(\pi) = -\frac{L}{\pi^2(1-\pi)^2} \\ f'(A) = 1 \\ f'(B) = -1 \\ f(A) = k - 1 + \pi \\ f(B) = 1 - \pi \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка, стоящего в первой строке системы имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & f(\pi) = L\left[\ln(1-\pi) + \ln\pi\right] + 2L\left[-(1-\pi)(\ln(1-\pi) - 1) - \pi(\ln\pi - 1)\right] + a\pi + b = \\ & = L\left[\ln(1-\pi) + \ln\pi\right] + 2L\left[-\ln(1-\pi) + 1 + \pi\ln(1-\pi) - \pi - \pi\ln\pi + \pi\right] + a\pi + b = \\ & = L\left[\ln\pi - \ln(1-\pi) + 2 + 2\pi\ln\tfrac{1-\pi}{\pi}\right] + a\pi + b = \\ & = L\left[\left(\ln\tfrac{\pi}{1-\pi}\right)(1-2\pi) + 2\right] + a\pi + b = \\ & = L\left(\ln\tfrac{\pi}{1-\pi}\right)(1-2\pi) + a\pi + c, \end{aligned}$$

где a,b,c – произвольные константы(зависящие от k).

При этом производная равна

$$f'(\pi) = L\left(\frac{1}{1-\pi} - \frac{1}{\pi} - 2\ln\left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)\right) + a.$$

Поэтому система переписывается следующим образом(первое уравнение не выписываем)

$$\begin{cases} L\left(\frac{1}{1-A} - \frac{1}{A} - 2\ln\left(\frac{1-A}{A}\right)\right) + a = 1, \\ L\left(\frac{1}{1-B} - \frac{1}{B} - 2\ln\left(\frac{1-B}{B}\right)\right) + a = -1, \\ L\left[\left(\ln\frac{A}{1-A}\right)(1-2A)\right] + aA + c = (k-1) + A, \\ L\left[\left(\ln\frac{B}{1-B}\right)(1-2B)\right] + aB + c = 1 - B. \end{cases}$$

Введем

$$\begin{aligned} & \Psi(\pi) = (1-2\pi)\ln\left(\tfrac{\pi}{1-\pi}\right), \\ & \psi(\pi) = \Psi'(\pi) = \left(\tfrac{1}{\pi} - \tfrac{1}{1-\pi}\right) + 2\ln\left(\tfrac{1-\pi}{\pi}\right). \end{aligned}$$

Тогда систему можно свести к следующей

$$\begin{cases} L\left[\Psi(B) - \Psi(A)\right] + a(B-A) = 2 - A - B - k, \\ L\psi(A) + a = 1, \\ L\psi(B) + a = -1. \end{cases}$$

Выражая из последних двух уравнений a, имеем

$$\begin{cases} L\left[\Psi(B) - \Psi(A)\right] + \frac{L}{2}(B-A)(-\psi(A) - \psi(B)) = 2 - A - B - k, \\ L\left[\psi(A) - \psi(B)\right] = 2. \end{cases}$$

Далее эта система эквивалентна

$$\begin{cases} L\left[\Psi(B) - \Psi(A)\right] - L(B-A)\psi(B) = 2 - 2B - k, \\ L\left[\psi(A) - \psi(B)\right] = 2. \end{cases}$$

Итак, решение исходной системы сводится к решения последней системы. Из этой системы мы находим точки A и B – границы области продолжения наблюдения. А затем, зная эти точки мы из самой первой системы находим функцию риска. Итак, вспомогательная задача решена, а с ней и исходная задача в области B_1.

5.2. Область без переключений B_1(2 способ)

Найдем границы области продолжения наблюдения в той части плоскости, где наблюдается только одно направление. Границы γ_1 и γ_2 вместе с неизвестной функцией риска $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ найдем из системы (задача Стефана с подвижными границами)

$$\begin{cases} -2c = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_2} \frac{2\varphi_2^2}{1+\varphi_1+\varphi_2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi_2^2} \varphi_2^2, \\ \rho_0\left(\varphi_1, \gamma_1\left(\varphi_1\right)\right) = \rho\left(\varphi_1, \gamma_1\left(\varphi_1\right)\right), \\ \rho_0\left(\varphi_1, \gamma_2\left(\varphi_1\right)\right) = \rho\left(\varphi_1, \gamma_2\left(\varphi_1\right)\right), \\ \left.\frac{\partial \rho_0(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial \varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)} = \left.\frac{\partial \rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial \varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)}, \\ \left.\frac{\partial \rho_0(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial \varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = \left.\frac{\partial \rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial \varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)}, \end{cases}$$

где

$$\rho_0\left(\varphi_1, \varphi_2\right) = \min\left(\pi_0, 1-\pi_0\right) = \min\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{1+\varphi_1+\varphi_2}, \frac{1}{1+\varphi_1+\varphi_2}\right).$$

Обозначим $b = 1+\varphi_1$. Тогда функция $\rho\left(\varphi_1, \varphi_2\right)$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$-2c = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_2} \frac{2\varphi_2^2}{b+\varphi_2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi_2^2} \varphi_2^2.$$

Решение этого уравнения имеем следующий вид

$$\rho\left(\varphi_1, \varphi_2\right) = 2c\left(\ln \varphi_2\right) \frac{b-\varphi_2}{b+\varphi_2} + \frac{c_1(b)}{b+\varphi_2} + c_2(b),$$

где $c_1(b)$ и $c_2(b)$ зависят от b. Поэтому система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} 2c\left(\ln \gamma_1\right) \frac{b-\gamma_1}{b+\gamma_1} + \frac{c_1(b)}{b+\gamma_1} + c_2(b) = 1 - \frac{1}{b+\gamma_1}, \\ 2c\left(\ln \gamma_2\right) \frac{b-\gamma_2}{b+\gamma_2} + \frac{c_1(b)}{b+\gamma_2} + c_2(b) = \frac{1}{b+\gamma_2}, \\ \left(2c\left(\ln \gamma\right) \frac{b-\gamma}{b+\gamma} + \frac{c_1(b)}{b+\gamma} + c_2(b)\right)'_{\gamma=\gamma_1} = \left(1 - \frac{1}{b+\gamma}\right)'_{\gamma=\gamma_1}, \\ \left(2c\left(\ln \gamma\right) \frac{b-\gamma}{b+\gamma} + \frac{c_1(b)}{b+\gamma} + c_2(b)\right)'_{\gamma=\gamma_2} = \left(\frac{1}{b+\gamma}\right)'_{\gamma=\gamma_2}. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений $c_1(b)$ и $c_2(b)$, получаем

$$\begin{cases} c\left(\gamma_2-\gamma_1\right)\left(\frac{b^2}{\gamma_1\gamma_2} - 1\right) = b-1, \\ c\left(\gamma_2-\gamma_1\right)\left(\frac{b^2}{\gamma_1\gamma_2} + 1\right) + 2cb\ln\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 1. \end{cases}$$

Из этой системы находим $\gamma_1 = \gamma_1\left(\varphi_1\right)$и $\gamma_2 = \gamma_2\left(\varphi_1\right)$. И, используя эти значения, можно найти функцию риска

$$\rho\left(\varphi_1, \varphi_2\right) = 2c\left(\ln \varphi_2\right) \frac{1+\varphi_1-\varphi_2}{1+\varphi_1+\varphi_2} + \frac{c_1}{1+\varphi_1+\varphi_2} + c_2,$$

где

$$c_1 = \frac{(b+\gamma_1)(b+\gamma_2)-(\gamma_1+\gamma_2)-2c(\ln\gamma_1)(b-\gamma_1)(b+\gamma_2)+2c(\ln\gamma_2)(b-\gamma_2)(b+\gamma_1)}{\gamma_2-\gamma_1},$$
$$c_2 = \frac{(b+\gamma_1-2)-2c(\ln\gamma_1)(b-\gamma_1)+2c(\ln\gamma_2)(b-\gamma_2)}{\gamma_2-\gamma_1}.$$

5.3. Область с переключениями C_1

Найдем границы областей наблюдения в области, где возможно переключение направлений. Граница в этом случае состоит только из одной линии $\gamma_2 = \gamma_2(\varphi_1)$. Для нахождения границы и функции риска решим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -2c = \frac{\partial\rho}{\partial\varphi_2}\frac{2\varphi_2^2}{1+\varphi_1+\varphi_2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi_2^2}\varphi_2^2, \\ \rho(\varphi_1,\gamma_2(\varphi_1)) = \rho_0(\varphi_1,\gamma_2(\varphi_1)), \\ \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = \left.\frac{\partial\rho_0(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)}, \\ \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1}\right|_{\varphi_1=\varphi_2} = \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_1=\varphi_2}. \end{cases}$$

Здесь первые два уравнения аналогичны тем, которые были в случае двусоставной границе области продолжения наблюдений. А третье уравнение появляется впервые-это условие так называемого “гладкого склеивания” (условие гладкости функции риска $\rho(\varphi_1,\varphi_2)$) на диагонали . Подставляя в эту систему выражение для $\rho(\varphi_1,\varphi_2)$, получаем следующую систему

$$\begin{cases} 2c\ln\varphi_2(1+\varphi_1-\varphi_2) + c_1 + c_2(1+\varphi_1+\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = 1, \\ 2c\left(\frac{(1+\varphi_1)^2}{\varphi_2} - \varphi_2 - 2(1+\varphi_1)\ln\varphi_2\right)\Big|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = c_1, \\ 2c\frac{1}{\varphi_1}\frac{1}{1+2\varphi_1} - 4c\ln\varphi_1\frac{1}{1+2\varphi_1}\Big|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = \frac{c_1'}{1+2\varphi_1} + c_2'\Big|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)}. \end{cases}$$

Исключая c_1 и c_2 и их производные, получим для искомой границы $\tilde\gamma = \tilde\gamma_2(\varphi_1)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\tilde\gamma'}{\tilde\gamma^2} = \frac{\left(\frac{1}{\varphi_1} - 2\ln\varphi_1\right) - \left(\frac{1}{\tilde\gamma} - 2\ln\tilde\gamma\right)}{(\varphi_1-\tilde\gamma)(1+\varphi_1+\tilde\gamma)}$$

с начальным условием $\tilde\gamma_2(\varphi^*) = \gamma_2(\varphi^*)$, где φ^* таково, что $\gamma_1(\varphi^*) = \varphi^*$.

6. ОПТИМАЛЬНОСТЬ

В этом разделе будет проведен заключительный шаг в доказательстве теоремы. Рассматривается стандартное управление (доказательство того, что стандартное управление действительно существует проводится так же, как и в [9]) и момент остановки наблюдений определяется как момент первого выхода за область продолжения наблюдения. Область продолжения наблюдения, в свою очередь, определяется своими границами, которые были получены пока что формально в разделах выше. Для доказательства теоремы осталось показать, что полученные границы областей наблюдения и момент остановки, по ним определяемый, являются оптимальными.

Рассмотрим стандартную стратегию

$$T^*(t) = (T_1^*(t), T_2^*(t)),$$

построенную в предыдущем параграфе.

Далее определим момент остановки τ^* следующим образом

$$\tau^* = \inf\{t : (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)) \notin C\},$$

где $C = C_1 \cup C_2 \cup B_1 \cup B_2$ – область продолжения наблюдения. Рассмотрим сначала область $\{(\varphi_1,\varphi_2) : \varphi_1 < \varphi_2\}$. В этой части пространства возможных значений вектора (φ_1,φ_2) область продолжения наблюдений состоит из множеств B_1 и C_1. Границы множества B_1 могут быть заданы как функции $\gamma_1 = \gamma_1(\varphi_1)$ и $\gamma_2 = \gamma_2(\varphi_1)$. И эти границы определяются как решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\varphi_2\pi_2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\frac{\partial^2\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2^2} = -c, \\ \rho(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)} = \pi_0(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)}, \\ \rho(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = 1 - \pi_0(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)}, \\ \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)} = 1, \\ \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = -1, \\ \pi_0(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{1}{1+\varphi_1+\varphi_2}. \end{cases}$$

Граница множества C_1 задается некоторой функцией $\gamma_2 = \gamma_2(\varphi_1)$, где $\varphi_1^* \le \varphi_1($ φ_1^* такая точка, что $\gamma_1(\varphi_1^*) = \varphi_1^*)$.

Эта граница определяется из следующей системы

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\varphi_2\pi_2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\frac{\partial^2\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2^2} = -c, \\ \rho(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = 1 - \pi_0(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)}, \\ \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = -1, \\ \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1}\right|_{\varphi_1=\varphi_2} = \left.\frac{\partial\rho(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_1=\varphi_2}, \\ \pi_0(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{1}{1+\varphi_1+\varphi_2}. \end{cases}$$

Границы областей B_2 и C_2 находятся из соображений симметрии, поскольку направления в постановке задачи равноправны. B_2 и C_2 получаются зеркальным отражением областей B_1 и C_1 относительно биссектрисы.

Границы $\gamma_1(\varphi_1)$ и $\gamma_2(\varphi_1)$ области C определяются как решения следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1}\varphi_1\pi_1 + \frac{\varphi_1^2}{2}\frac{\partial^2\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1^2} = -c, \varphi_1 > \varphi_2, \\ \frac{\partial\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\varphi_2\pi_2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\frac{\partial^2\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2^2} = -c, \varphi_1 < \varphi_2, \\ \rho(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)} = \pi_0(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)}, \\ \rho(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = 1 - \pi_0(\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)}, \\ \rho'\ (\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_1(\varphi_1)} = 1, \\ \rho'\ (\varphi_1,\varphi_2)|_{\varphi_2=\gamma_2(\varphi_1)} = -1, \\ \left.\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_1}\right|_{\varphi_1=\varphi_2} = \left.\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_1=\varphi_2}, \\ \pi_0(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{1}{1+\varphi_1+\varphi_2}. \end{cases}$$

В эти уравнения входит также неизвестная функция ρ (заданная на множестве C), которая определяется из системы уравнений вместе с границами γ_1 и γ_2.

Заметим, что эта система имеет решение. Определим функцию ρ^* следующим образом

$$\rho^*(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{cases} \min(\pi_0(\varphi_1,\varphi_2), 1-\pi_0(\varphi_1,\varphi_2)), (\varphi_1,\varphi_2) \in C, \\ \rho(\varphi_1,\varphi_2), (\varphi_1,\varphi_2) \notin C \end{cases}$$

Здесь $\pi_0(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{1}{1+\varphi_1+\varphi_2}$.

Докажем, что эта функция $\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)$ является минимальным риском, т.е. $\rho^*(\varphi_1,\varphi_2) \le$ E$(c\tau + \min(\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)))$ для любой стратегии $(T(t),\tau)$.

Будем рассматривать только стратегии, предполагающие "стандартное" правило выбора направления. Для доказательства того, что $\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)$ – функция риска, а $(T_1^*(t), T_2^*(t), \tau^*)$ – оптимальная стратегия достаточно доказать, что

$$A.\rho^*(\varphi_1,\varphi_2) \le \mathrm{E}[c\tau + \min(\pi_0(\tau), 1-\pi_0(\tau))]$$
$$\forall (T_1(t), T_2(t), \tau)$$
$$B.\rho^*(\varphi_1,\varphi_2) = \mathrm{E}[c\tau^* + \min(\pi_0(\tau^*), 1-\pi_0(\tau^*))]$$

Докажем свойство А.

Пусть $(T_1(t), T_2(t), \tau)$ – произвольная стратегия(здесь, как и всюду, выбор направления предполагается "стандартным"). Применяя формулу Ито, имеем

$$\begin{aligned}
&d\rho^*\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\right) = d\rho^*\left(\varphi_1\left(T_1(t)\right), \varphi_2(T_2(t))\right)\\
&= \tfrac{\partial\rho^*}{\partial\varphi_1} d\varphi_1\left(T_1(t)\right) + \tfrac{\partial\rho^*}{\partial\varphi_2} d\varphi_2\left(T_2(t)\right) + \tfrac{\partial^2\rho^*}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} d\left\langle \varphi_1\left(T_1(t)\right), \varphi_2(T_2(t))\right\rangle\\
&+ \tfrac12 \tfrac{\partial^2\rho^*}{\partial\varphi_1^2} d\left\langle \varphi_1\left(T_1(t)\right), \varphi_1(T_1(t))\right\rangle + \tfrac12 \tfrac{\partial^2\rho^*}{\partial\varphi_2^2} d\left\langle \varphi_2\left(T_1(t)\right), \varphi_2(T_2(t))\right\rangle\\
&= \tfrac{\partial\rho^*}{\partial\varphi_1}\varphi_1\left(1_{\theta=1}dT_1 + dW^1_{T_1(t)}\right) + \tfrac{\partial\rho^*}{\partial\varphi_2}\varphi_2\left(1_{\theta=2}dT_2 + dW^2_{T_2(t)}\right)\\
&+ \tfrac12 \tfrac{\partial^2\rho^*}{\partial\varphi_1^2}\varphi_1^2 dT_1 + \tfrac12 \tfrac{\partial^2\rho^*}{\partial\varphi_2^2}\varphi_2^2 dT_2.
\end{aligned}$$

Заметим, что процессы $\left(1_{\theta=1} - \pi_1(t)\right)t + W_t^1$ и $\left(1_{\theta=2} - \pi_2(t)\right)t + W_t^2$ являются броуновскими движениями относительно фильтраций
$\mathcal{F}_t^1 = \sigma\left(\left(1_{\theta=1} - \pi_1(s)\right)s + W_s^1, s \le t\right)$ и $\mathcal{F}_t^2 = \sigma\left(\left(1_{\theta=2} - \pi_2(s)\right)s + W_s^2, s \le t\right)$ соответственно.

Поэтому последнее выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&d\rho^*\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\right) = \left(\tfrac12 \tfrac{\partial^2\rho^*}{\partial\varphi_1^2}\varphi_1^2 + \tfrac{\partial\rho^*}{\partial\varphi_1}\varphi_1\pi_1\right)dT_1(t)\\
&+ \left(\tfrac12 \tfrac{\partial^2\rho^*}{\partial\varphi_2^2}\varphi_2^2 + \tfrac{\partial\rho^*}{\partial\varphi_2}\varphi_2\pi_2\right)dT_2(t)\\
&+ M_t^1 + M_t^2,
\end{aligned}$$

где M_t^1 и M_t^2 некоторые мартингалы относительно фильтраций $\mathcal{F}^1_{T_1(t)}$ и $\mathcal{F}^2_{T_2(t)}$ соответственно.

Заметим, что $\mathrm{E}M_t^1 = \mathrm{E}M_t^2 = 0$.

В силу определения функции $\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)$ имеем при $\varphi_1 > \varphi_2$

$$\begin{cases}
\frac{\partial\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1}\varphi_1\pi_1 + \frac{\varphi_1^2}{2}\frac{\partial^2\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1^2} = -c, \text{в области продолжения наблюдения C},\\
\frac{\partial\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1}\varphi_1\pi_1 + \frac{\varphi_1^2}{2}\frac{\partial^2\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1^2} > 0, \text{в зоне остановки.}
\end{cases}$$

Аналогично при $\varphi_1 < \varphi_2$

$$\begin{cases}
\frac{\partial\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\varphi_2\pi_2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\frac{\partial^2\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2^2} = -c, \text{в области продолжения наблюдения C},\\
\frac{\partial\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\varphi_2\pi_2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\frac{\partial^2\rho^*(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2^2} > 0, \text{в зоне остановки.}
\end{cases}$$

Поэтому, если теперь вместо t подставить случайный момент остановки τ и взять математическое ожидание, получим

$$\rho^*(\varphi_1(0),\varphi_2(0)) \le \mathrm{E}[\rho^*(\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)) + c\tau].$$

Если рассматривать функцию риска ρ^* как функцию φ_1 и φ_2 (как это делалось до сих пор), то ρ^* будет удовлетворять первому уравнению в первой системе этого параграфа. Так же можно считать, что ρ^* зависит от φ_1 и π_2, поскольку

$$\varphi_2 = (1+\varphi_1)\frac{\pi_2}{1-\pi_2}.$$

При фиксированном φ_1 функция $\rho^*(\varphi_1, \pi_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \pi_2^2} = -\frac{2c}{\pi_2^2(1-\pi_2)^2},$$

которое эквивалентно уравнению из первой системы данного параграфа. Но из этого уравнения следует, что $\rho^*(\varphi_1, \pi_2)$ выпукла по π_2 при фиксированном φ_1. Отсюда следует, что, в силу выполнения условия гладкого склеивания функций ρ^* и $\min(\pi_1+\pi_2, 1-(\pi_1+\pi_2))$, что

$$\rho^*(\varphi_1, \pi_2) \le \min(\pi_1+\pi_2, 1-(\pi_1+\pi_2))$$

или, что эквивалентно,

$$\rho^*(\varphi_1, \varphi_2) \le \min(\pi_1+\pi_2, 1-(\pi_1+\pi_2)) = \min(\pi_0, 1-\pi_0).$$

Поэтому,

$$\rho^*(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)) \le \min[\pi_0(\tau), \pi_1(\tau)+\pi_2(\tau)].$$

Поэтому

$$\rho^*(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \le \mathrm{E}[c\tau + \min(\pi_0(\tau), \pi_1(\tau)+\pi_2(\tau))],$$

т.е. свойство A доказано.

Докажем свойство B. Рассмотрим стратегию $(T_1^*(t), T_2^*(t), \tau^*)$. По определению

$$\tau^* = \inf\{t : (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \notin C\}$$

Если начальная точка $(\varphi_1(0), \varphi_2(0))$ находится в области остановки, то по определению функции $\rho^*(\varphi_1, \varphi_2)$ имеем

$$\rho^*(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = \min[\pi_0(0), 1-\pi_0(0)].$$

Поэтому равенство B в этом случае выполнено.

Пусть теперь начальная точка $(\varphi_1(0), \varphi_2(0))$ находится в зоне продолжения наблюдения. Тогда

$$\rho^*(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = \mathrm{E}[\rho^*(\varphi_1(\tau^*), \varphi_2(\tau^*)) + c\tau^*]$$

(см. доказательство свойства A).

Но $(\varphi_1(\tau^*), \varphi_2(\tau^*)) \in \partial C$ (по определению τ^*).

A на этой границе функция ρ^* совпадает с $\min[\pi_0, 1-\pi_0]$. Значит

$$\rho^*(\varphi_1(\tau^*), \varphi_2(\tau^*)) = \min(\pi_0(\tau^*), 1-\pi_0(\tau^*)).$$

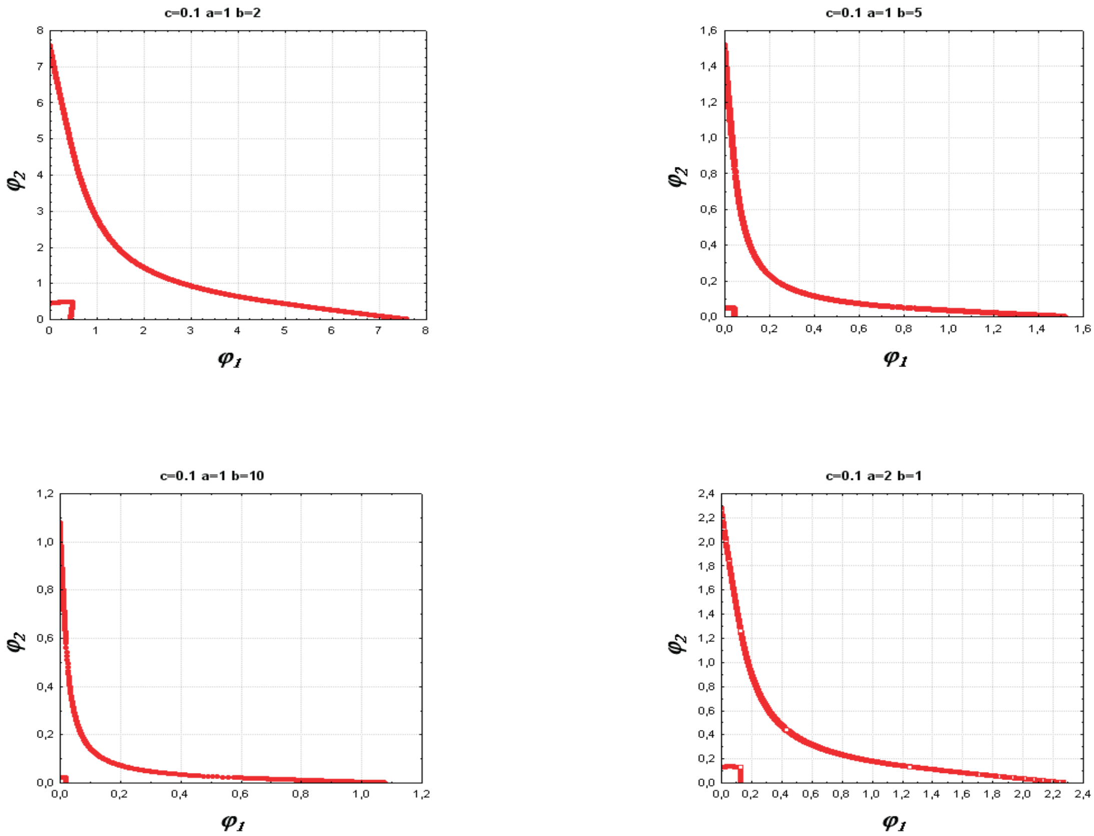
Поэтому

$$\rho^*(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = \mathrm{E}[c\tau^* + \min(\pi_0(\tau^*), 1-\pi_0(\tau^*))].$$

Свойство B доказано, а с ним доказана и оптимальность стратегии $(T_1^*(t), T_2^*(t), \tau^*)$ и доказано, что $\rho^*(\varphi_1, \varphi_2)$ действительно является функцией риска.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ниже представлены графики (рис. 2) , полученные с помощью численного моделирования в программе STATISTICA. На каждом графике изображены границы областей продолжения наблюдения и областей остановки для различных комбинаций трех входных параметров – платы за единицу времени наблюдения c, плату за ошибку первого рода α и плату за ошибку второго рода β (поскольку границы не изменятся, если все параметры пропорционально изменить, то коэффициент полагался равным 0.1). Результаты моделирования вполне согласуются с ожидаемыми выводами. Зависимость расположения границ от этих трех параметров достаточно сложная, но можно отметить некоторые общие качественные особенности. Если увеличивать ошибки первого и второго рода в одинаковое количество раз, то границы области остановки будут расширяться, так как при этом плата за ошибки повышается и необходимо принимать более точное решение и, следовательно, необходимо наблюдать процессы более длительное время и значит область продолжения наблюдений должна увеличиться. И, наоборот, если плата за стоимость наблюдений c повышается, границы области остановки сужаются, поскольку, необходимо "экономить" на наблюдениях и сделать вывод как можно быстрее. При увеличении платы за ошибки первого рода α при неизменных остальных параметров β и c нижняя граница будет подниматься, поскольку в этом случае принимать решение о наличии цели нужно реже. Если же увеличивать стоимость ошибки второго рода β при неизменных остальных параметрах, то верхняя граница будет опускаться, поскольку в этом случае принимать решение о наличии цели чаще.



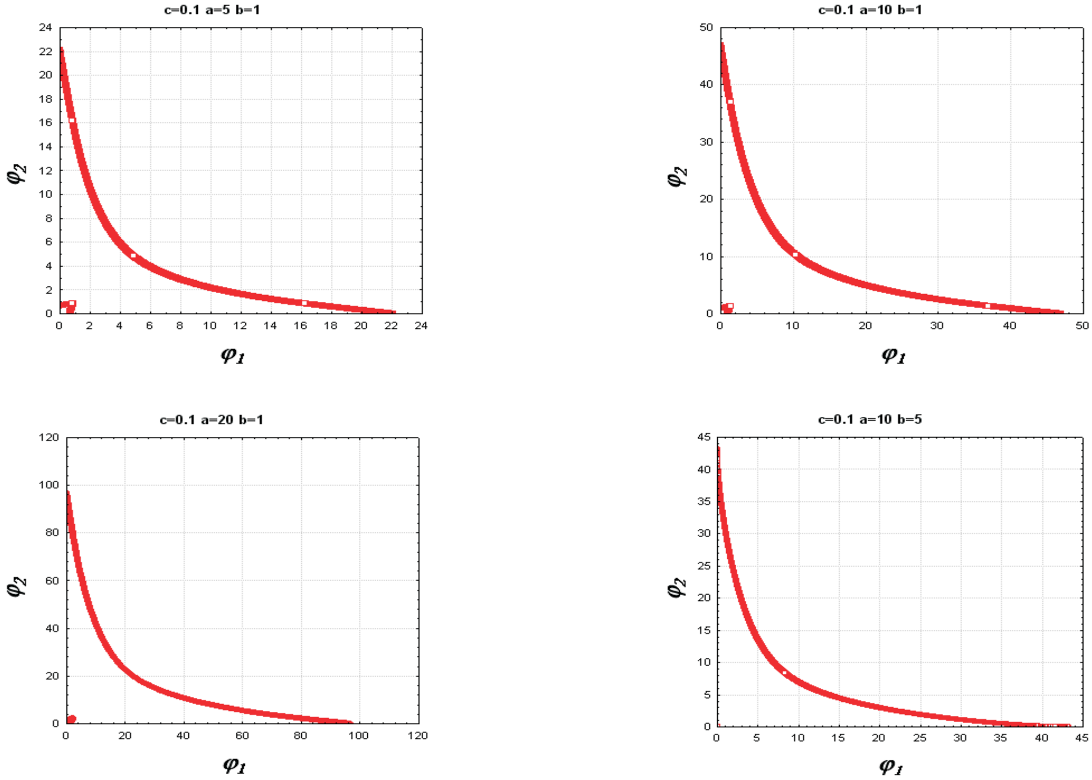


Рис.2 Области остановки и продолжения наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wald A., *Sequential Analysis*, New York: Wiley, 1947.
2. Wald A.,Wolfowitz J. Optimum character of the sequential probability ratio test, *Ann. Math. Stat.*, 1948, 19, pp. 326—339.
3. Blackwell D.,Girshick M.A. *Theory of Games and Statistical Decisions*, New York: Wiley, 1954.
4. Shiryaev A. N. Two problems of sequential analysis. *Cybernetics*, 1967, vol. 3, pp. 63–69.
5. Lehmann E. L. T*esting Statistical Hypotheses*. New York: Wiley, 1959.
6. Ширяев А.Н. *Статистический последовательный анализ*, М.: Наука, 1976.
7. Cairoli R., Dalang Robert C. *Sequential Stochastic Optimization*. Wiley Series in Probability & Mathematical Statistics, 1996.
8. Кузнецов Ю.А. Различение гипотез в дискретной схеме с альтернативными направлениями. *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2006, т. 13, в. 5, с. 821–828.
9. Mandelbaum A., Shepp L.A., Vanderbei J. Optimal switching between a pair of brownian motions, *The Annals of Probability*, 1990, Vol. 18 , no. 3, pp. 1010–1033.

9