Информационные процессы, Том 9, № 4, 2009, стр. 273–279.

Открытая сеть массового обслуживания с групповыми переходами заявок и частично ненадежными приборами

Ю.С. Боярович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
Поступила в редколлегию 4.12.2009

Аннотация—Исследуется работа открытой сети массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок. Каждая система в сети может работать в двух режимах. По результатам исследования устанавливается вид стационарного распределения, а также необходимые и достаточные условия его существования.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все большую актуальность приобретает исследование моделей сетей с ненадежными приборами. При этом значительное внимание уделяется исследованию сетей с приборами, которые могут выходить из строя частично. Например, прибор может переходить из одного режима обслуживания в другой с частичной потерей работоспособности. Помимо этого, значительный интерес представляет исследование сетей с групповыми перемещениями заявок. В [1] рассмотрена открытая сеть массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием. К сожалению, в этой работе возникают значительные трудности в процессе исследования модели, в том числе в процессе решений нелинейных уравнений трафика. Попытка преодолеть эти трудности была предпринята автором в [2], где был предложен альтернативный алгоритм поиска стационарного распределения. В настоящей работе исследована открытая сеть массового обслуживания с групповыми перемещениями заявок, каждая система которой может функционировать в двух режимах. Один из них мы будем называть основным. Заявки, получившие обслуживание в режиме, который не является основным, после обслуживания покидают сеть. Будем считать, что не в основном режиме заявки не получают достаточно качественного обслуживания. Таким образом, удалось построить математическую модель для исследования сети с групповыми переходами заявок и несколькими режимами работы. Помимо этого, в настоящей работе удалось избежать ситуации, когда размер группы, выбранной на обслуживание, превышает количество заявок в узле. Также в исследуемой модели интенсивность обслуживания зависит от количества заявок на приборе, что, в принципе, вполне естественно и зачастую встречается на практике. Благодаря такому описанию модели удалось существенно упростить ее процесс исследования как сети с групповыми переходами заявок, избежать существенных технических сложностей, а также построить эффективный алгоритм поиска стационарного распределения.

2. МОДЕЛЬ ОДНОЛИНЕЙНОГО УЗЛА

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток групп с параметром λ (назовем этот поток обыкновенным). В момент, когда система пуста, в нее поступает дополнительный независимый пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ^*. Обслуживание начинается, когда в системе есть хотя бы одна заявка. Прибор может работать в двух режимах. В момент, когда начинается обслуживание, прибор с вероятностью p_1 выбирает первый режим работы (назовем его основным), а с вероятностью p_2 – второй режим работы. На обслуживание из очереди выбирается группа заявок. Обслуживание – экспоненциальное с параметром $n\mu_l$, где n – количество заявок в очереди на системе, а l – номер режима, в котором функционирует прибор. Отметим, что на обслуживание равновероятно выбирается любая группа размером от 1 до n. Такой прием, как уже было сказано, позволяет избежать ситуации, когда размер группы, выбранной на обслуживание, превышает количество заявок в узле. Пусть Y_i, Y_i^* – размеры i-ых поступающих в систему обыкновенных и дополнительных групп соответственно. Предполагается, что Y_i и Y_i^* – неотрицательные целочисленные случайные величины с функциями распределения A и A^*, функциями вероятностных масс a, a^* и производящими функциями $\tilde{A}$ и $\tilde{A}^*$ соответственно.

Пусть $X(t)$ – количество заявок в системе в момент времени t. Тогда $X(t)$ – цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $\mathbb{Z}_+ = 0, 1, 2, \ldots$. Интенсивности перехода для такой сети выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &q(n, n+k) = \lambda a(k) + \lambda^* a^*(k) \qquad (k \geq 1), \\ &q(n, n-k) = p_1 \frac{1}{n} n\mu_1 + p_2 \frac{1}{n} n\mu_2 = p_1\mu_1 + p_2\mu_2 \qquad (n \geq k \geq 1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для простоты будем предполагать, что наибольший общий делитель тех k, для которых $a(k)a^*(k) > 0$ равен 1. Тогда нетрудно показать, что цепь Маркова $X(t)$ будет неприводимой. Что касается сети, то для нее мы не будем рассматривать подобное ограничение. Для сети будем требовать неприводимость матрицы маршрутизации.

Процесс $X(t)$ является эргодическим. Поскольку если на обслуживание выбирать по одной заявке и обслуживать ее с указанной интенсивностью, то мы получим аналог модели с неограниченным числом приборов, для которой эргодичность установлена. Причем в нашем случае на обслуживание может выбираться группа произвольного размера.

Вероятностное распределение π на $\mathbb{Z}_+$ является стационарным распределением $X(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода q^R, удовлетворяющая соотношениям:

$$\pi(n)q(n, n') = \pi(n')q^R(n', n) \qquad (n, n' \in \mathbb{Z}_+), \tag{2.2}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(n, k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^R(n, k) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{2.3}$$

Здесь функция q^R является функцией интенсивностей перехода обращенного во времени процесса $X(-t)$, который также имеет стационарное распределение π.

Предполагаем, что стационарное распределение π цепи Маркова $X(t)$ существует и является геометрическим, т.е.

$$\pi(n) = (1 - c)c^n. \tag{2.4}$$

Здесь $0 < c < 1$. Подставляя интенсивности q из (2.1) и предполагаемое геометрическое распределение (2.4) в соотношение (2.2), получаем следующие интенсивности для обращенного во времени процесса:

$$\begin{aligned} &q^R(n, n+k) = (p_1\mu_1 + p_2\mu_2)c^k \qquad (k \geq 1,\ n \geq 0), \\ &q^R(n, n-k) = (\lambda a(k) + \lambda^* a^*(k) I_{n=k})c^{-k} \qquad (n \geq k \geq 1). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.1) и (2.5) в (2.3) , получаем

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} (p_1\mu_1 + p_2\mu_2)c^k + \lambda \sum_{k=1}^{n} a(k)c^{-k} + \lambda^* a^*(n)c^{-n} = n\mu + \lambda. \tag{2.6}$$

Полагая в (2.6) $n = 0$, находим

$$c = \frac{\lambda + \lambda^*}{\lambda + \lambda^* + p_1\mu_1 + p_2\mu_2}. \tag{2.7}$$

Если умножить (2.6) на $(cz)^n$ и просуммировать по всем $n \geq 1$, то можно получить следующее соотношение для исследования дополнительного потока:

$$\lambda^* \tilde{A}^*(z) = (p_1\mu_1 + p_2\mu_2)\frac{cz}{(1-cz)^2} - \lambda^* \frac{cz}{1-cz} - \lambda \tilde{A}(z)\frac{1}{1-cz}. \tag{2.8}$$

Очевидно, что при $z = 1$ (2.8) превращается в (2.7). Заметим, что (2.8) эквивалентно равенствам

$$\lambda^* a^*(k) = \Big[(p_1\mu_1 + p_2\mu_2)kc^k - \lambda^* c^k - \lambda \sum_{s=0}^{k-1} a(k-s)c^s\Big],\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.9}$$

Причем очевидно, что для того, чтобы последнее равенство определяло распределение вероятностей, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$(p_1\mu_1 + p_2\mu_2)kc^k \geq \lambda^* c^k + \lambda \sum_{s=0}^{k-1} a(k-s)c^s,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.10}$$

Приведенные рассуждения показывают, что справедлива следующая

Теорема 2.1. *Для того, чтобы $\{\pi(n) = (1-c)c^n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ являлось стационарным распределением $X(t)$, необходимо и достаточно выполнения неравенств (2.10), где $c = c(\lambda^*)$ – корень уравнения (2.7),принадлежащий (0;1). При фиксированном λ^* этот корень существует и единственен. Причем параметры дополнительного потока могут быть найдены из соотношений (2.8) или (2.9).*

Утверждение 1. *С интенсивностями перехода, описанными выше, рассмотренный однолинейный узел является квазиобратимым узлом.*

Доказательство. Действительно, можно рассмотреть каждый переход в результате поступления группы размера m, не являющейся дополнительной как “переход поступления типа m”, переход в результате обслуживания группы размера m как “переход ухода типа m”. Переходы же, соответствующие поступлению дополнительных групп будем рассматривать как внутренние. Полная интенсивность “переходов поступления типа m”, когда система находится в состоянии n, есть:

$$\alpha(m,n) = \sum_{n' \in X} q(n,n') I[(n,n') \quad \text{является “переходом поступления типа } m\text{”}] = \lambda a(m);$$

полная интенсивность “переходов ухода типа m”, когда система находится в состоянии n, есть:

$$\beta(m,n) = \sum_{n' \in X} q^R(n,n') I[(n,n') \quad \text{является “переходом ухода типа } m\text{”}] = (p_1\mu_1 + p_2\mu_2)c^m.$$

Полученные суммарные интенсивности не зависят от состояния. Таким образом, стационарный процесс $X(t)$ является квазиобратимым.

3. МОДЕЛЬ ОТКРЫТОЙ СЕТИ

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с конечным множеством узлов $J = \{1, 2, \ldots, N\}$. В узлы поступают независимые пуассоновские потоки групп заявок с параметрами λ_i для узла $i \in J$ соответственно (будем называть их обыкновенными). Когда узел i пуст, на него поступает дополнительный пуассоновский поток групп интенсивности λ_i^*, $i \in J$. Обслуживание – групповое. В момент, когда начинается обслуживание, прибор выбирает номер режима, в котором он будет функционировать в период обслуживания группы. С вероятностью $p_i(1)$ выбирается первый режим (будем называть его основным), а с вероятностью $p_i(2)$ – второй режим, $i \in J$ (не основной). Длительности обслуживания групп в узлах независимы и имеют показательное распределение с параметрами $\mu_{i,l}$ для узла $i \in J$ соответственно, где l – номер режима, в котором функционирует прибор. Группы, обслуженные не в основном режиме (считаем, что они не получили достаточно качественного обслуживания), после обслуживания сразу выводятся из сети. Размеры поступающих обыкновенных и дополнительных групп – положительные целочисленные случайные величины с функциями распределения A_i, A_i^*, функциями вероятностных масс a_i, a_i^* и производящими функциями $\tilde{A}_i$ и $\tilde{A}_i^*$ соответственно для узла $i \in J$. Обслуженная в узле i в основном режиме группа переходит с вероятностью $p_{i,j}$ в узел j, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть. Потребуем также, чтобы матрица маршрутизации $R = \{r_{i,j}\}_{i,j \in J \cup \{0\}}$ была неприводима.

Пусть $X_i(t)$ – количество заявок в узле i в момент времени t, $i \in J$. Состояние сети будем описывать цепью Маркова $\mathbf{X}(t)$ с непрерывным временем с пространством состояний $\mathbb{Z}_+^N$, где $\mathbf{X}(t) = (X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots,\ X_N(t))$. Обозначим через q функцию интенсивностей перехода для этой цепи. Остальные обозначения будут такими же, как для модели однолинейного узла, но с дополнительным индексом i, указывающим номер узла из множества J, к которому относится рассматриваемая величина. Очевидно, для рассматриваемой модели при $i, j \in J$ и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + k\mathbf{e}_j) = \lambda_j a_j(k) + \lambda_j^* a_j^*(k) I_{\{0\}}(n_j), \qquad 1 \le k,$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - k\mathbf{e}_i + k\mathbf{e}_j) = p_i(1)\mu_{i,1} p_{ij}, \qquad 1 \le k \le n_i,$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - k\mathbf{e}_i) = p_i(1)\mu_{i,1} p_{i,0} + p_i(2)\mu_{i,2}, \qquad 1 \le k \le n_i,$$

где $\mathbf{e_i}$ – единичный вектор, i-я координата которого равна 1, I_A – индикаторная функция множества A. Обозначим через $\hat{\gamma}_j(m)$ – поток обыкновенных групп размера m на узел j:

$$\hat{\gamma}_j(m) = \lambda_j a_j(m) + \sum_{i \in J} c_i^m p_i(1)\mu_{i,1} p_{i,j}, \qquad j \in J. \tag{3.1}$$

А также рассмотрим следующие обозначения:

$$\tilde{\Gamma}_i(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_i(m) z_i^m, \qquad i \in J.$$

При этом $\tilde{\Gamma}_i(1) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_i(m)$ является интенсивностью потока обыкновенных групп на узел i, а $\tilde{\Gamma}_i^{-1}(1)\tilde{\Gamma}_i(z_i)$ – производящей функцией распределения размеров обыкновенных групп, принимаемых узлом i, $i \in J$.

Исследуя процесс обращения времени и применяя подход, аналогичный случаю модели однолинейного узла для модели сети были получены следующие результаты.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы* $\{\pi(\mathbf{n}) = \prod_{j\in J}(1-c_j)c_j^{n_j},\quad \mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^N\}$ *являлось стационарным распределением* $\mathbf{X}(t)$, *необходимо и достаточно выполнения неравенств:*

$$(p_j(1)\mu_{j,1}+p_j(2)\mu_{j,2})kc_j^k \geq \lambda_j^* c_j^k + \tilde{\Gamma}_j(1)\sum_{s=0}^{k-1}\hat{\gamma}_j(k-s)c_j^s, \qquad k=1,2,\ldots,\ j\in J, \tag{3.2}$$

причем $c_j = c_j(\gamma_j^*)$ *находятся по следующей формуле:*

$$c_j = \frac{\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j^*}{\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j^*+\mu_{j,1}p_j(1)+\mu_{j,2}p_j(2)}, \quad j\in J, \tag{3.3}$$

при этом очевидно, что $c_j\in(0;1),\ j\in J$. *При фиксированных* λ_j^* *эти корни существуют и единственны,* $j\in J$. *При выполнении условий теоремы, параметры дополнительного потока могут быть найдены из соотношений:*

$$\lambda_j^* a_j^*(k) = (p_j(1)\mu_{j,1}+p_j(2)\mu_{j,2})kc_j^k - \lambda_j^* c_j^k - \tilde{\Gamma}_j(1)\sum_{s=0}^{k-1}\hat{\gamma}_j(k-s)c_j^s, \qquad k=1,2,\ldots,\ j\in J. \tag{3.4}$$

Поскольку в условиях последней теоремы описанная сеть массового обслуживания квазиобратима по отношению к соответствующему набору интенсивностей, то выходящие из сети потоки обыкновенных групп являются независимыми пуассоновскими потоками, а текущее состояние сети не зависит от предыстории этих потоков.

4. АЛГОРИТМ ПОИСКА СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТРАФИКА

Для описанной модели открытой сети был получен следующий алгоритм поиска стационарного распределения:

Шаг 1. Находим решения $\hat{\gamma}_j,\ j\in J$ системы уравнений трафика:

$$\hat{\gamma}_j = \lambda_j + \sum_{i\in J}\frac{\hat{\gamma}_i+\lambda_i^*}{\mu_{i,1}p_i(1)+\mu_{i,2}p_i(2)}\mu_{i,1}p_i(1)p_{i,j}, \quad j\in J.$$

Шаг 2. Находим $\tilde{\Gamma}_j(1)=\hat{\gamma}_j,\ j\in J$.

Шаг 3. Находим корни $c_j\in(0;1),\ j\in J$ уравнений (3.3).

Шаг 4. Подсчитываем $\hat{\gamma}_j(m)$ по формулам (3.1).

Шаг 5. Проверяем выполнение неравенств (3.2). Если они нарушены, то делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения. При выполнении (3.2) переходим к следующему пункту алгоритма.

Шаг 6. Подсчитываем параметры дополнительного потока по формуле (3.4). Решая систему неравенств (3.2) относительно λ_j^*, $j \in J$, находим область значений интенсивностей дополнительного потока. Эта область определяет значения λ_j^*, $j \in J$, для которых стационарное распределение имеет форму произведения геометрических распределений.

Шаг 7. Записываем искомое решение для стационарного распределения

$$\{\pi(\mathbf{n}) = \prod_{j \in J} (1 - c_j) c_j^{n_j}, \;\; \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^N\}.$$

5. АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТИ С ЧАСТИЧНО НЕНАДЕЖНЫМИ ПРИБОРАМИ

При анализе работы систем и сетей с частично ненадежными приборами, актуальным является вопрос определения размера той части требований, которые покидают сеть за счет недостаточно качественного обслуживания. Для рассмотренной модели открытой сети можно вычислить следующие характеристики: среднее число заявок на i-ой системе $\bar{n}_i$, $i \in J$, а также среднее число требований в сети $\bar{n}$. Предполагается, что сеть функционирует в стационарном режиме. Известно, что

$$\bar{n}_i = \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_i(k) = \frac{c_i}{1 - c_i}, \quad i \in J;$$

$$\bar{n} = \sum_{i \in J} \bar{n}_i.$$

Здесь $\{\pi_i(n),\, n = 0, 1, \ldots\}$, $i \in J$ – стационарное распределение отдельных узлов сети, а c_i, $i \in J$ – параметры этого стационарного распределения, вычисляемые по формулам (3.3).

Положим теперь в рассмотренной модели сети $p_i(2) = 0$, $p_i(1) = 1$, $i \in J$, а все остальные параметры оставим без изменения. Для такой модели обозначим среднее число требований на системе и в сети соответственно через $\bar{n}_i^*$, $i \in J$ и $\bar{n}^*$. Как видно, в такой сети не возникает возможности переключения во второй функциональный режим, и, как следствие, не возникает потерь требований за счет недостаточно качественного обслуживания. Причем

$$\bar{n}_i^* = \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_i^*(k) = \frac{c_i^*}{1 - c_i^*}, \quad i \in J;$$

$$\bar{n}^* = \sum_{i \in J} \bar{n}_i^*,$$

где $\{\pi_i^*(n),\, n = 0, 1, \ldots\}$, $i \in J$ – стационарное распределение узлов сети без потери требований, а c_i^*, $i \in J$ – параметры этого стационарного распределения, являющиеся решениями уравнений (3.3), которые составляются для второй модифицированной модели.

Тогда часть теряемых за счет второго функционального режима требований может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\bar{n}^* - \bar{n}}{\bar{n}^*}.$$

Причем, очевидно, что значение этой величины возрастает с увеличением вероятностей $p_i(2)$, $i \in J$. Таким образом, с ростом вероятности переключения во второй функциональный режим увеличивается часть требований, покидающих сеть сразу же после обслуживания на узле.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована работа открытой сети массового обслуживания с групповыми перемещениями заявок. Интенсивность обслуживания зависела от количества заявок в узле. Каждая обслуживающая система могла функционировать в двух режимах, один из которых мы называли основным. Те заявки, которые получали обслуживание в режиме, не являющемся основным, по окончании обслуживания покидали систему. Описанная модель может найти свое отражение на практике. Действительно, можно рассмотреть массу примеров, когда клиенты, имея возможность получения обслуживания в нескольких узлах, могут покидать сеть в случае получения ими некачественного обслуживания на одной из систем. Также зачастую приходится сталкиваться с ситуацией, когда некоторый продукт, проходящий при создании несколько технологических этапов, подвергается уничтожению в случае нарушения обслуживания на одном из этапов. Для описанной модели предложен эффективный алгоритм поиска стационарного распределения и решения системы уравнений трафика. Таким образом, удалось построить модель открытой сети, сочетающей в себе групповые перемещения заявок, в также возможность функционирования в нескольких режимах.

СЛОВА БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Малинковскому Юрию Владимировичу за внимательное прочтение статьи, ценные рекомендации и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miyazava M.,Taylor P.G. A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers. Adv.Appl.Prob., 1998, no 29 (2), pp 523–534.

2. Malinkovsky, Y., Bojarovich J. Geometric product form stationary distribution for queueing networks with batch movements of positive and negative customers. Материалы международной научной конференции "Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей". Гродно: РИВШ, 2001, стр. 129–134.