Информационные процессы, Том 9, № 4, 2009, стр. 287–292.

Открытые неоднородные сети с многорежимными стратегиями обслуживания

Ю.Е. Летунович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
Поступила в редколлегию 7.12.2009

Аннотация—В настоящей работе исследуется модель открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания, несколькими типами положительных и отрицательных заявок. Кроме того, в сети циркулируют информационные сигналы, которые могут изменять номер режима работы системы. Для данной модели исследован вопрос о виде стационарного распределения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение систем и сетей массового обслуживания с ненадёжными приборами представляет большой интерес, поскольку зачастую на практике возникают ситуации, когда оборудование может частично или полностью выходить из строя. Попытка построения моделей с многорежимными стратегиями обслуживания, адекватно описывающих такую ситуацию, была предпринята в работе [1]. В настоящей работе эта модель обобщена на случай нескольких типов заявок, так как чаще всего на практике приходится иметь дело с “неоднородными” клиентами, которые требуют различную интенсивность обслуживания. Кроме того, модель расширена введением информационных сигналов, которые, поступая в сеть, могут изменять режим работы системы. Наличие сигналов можно интерпретировать как внешнее воздействие на прибор. Например, при небольших поломках, не выводящих из строя станок, может понадобиться помощь наладчика, который, устранив поломку, повышает работоспособность станка.

Итак, рассматриваетя открытая сеть с многорежимными стратегиями обслуживания, в узлах которой приборы могут функционировать в различных режимах. Каждый режим обслуживания характеризуется своими показателями. Прибор не выходит из строя полностью, его производительность уменьшается с увеличением номера режима работы. Прибор может частично терять работоспособность как при обслуживани, так и в незанятом сотоянии. Для указанной сети предполагается, что время обслуживания требования и время пребывания прибора в определённом режиме имеют экспоненциальное распределение.

Устанавливается достаточное условие мультипликативности стационарного распределения состояний сети.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В сеть, состоящую из N узлов, поступают $2M+2$ независимых между собой пуассоновских стационарных потока: M потоков обычных или положительных заявок с параметрами $\lambda_u^+, u=\overline{1,M}$, M потоков отрицательных заявок с параметрами $\lambda_u^-, u=\overline{1,M}$, поток сигналов уменьшения режима с параметром ω^- и поток сигналов увеличения режима с параметром ω^+.

Отрицательные заявки в отличие от обычных (положительных) заявок не требуют обслуживания. Поступив в узел, отрицательная заявка уменьшает число заявок в нём на единицу, если число заявок в системе больше нуля, и не поизводит никаких изменений, если в узле нет заявок. После уничтожения положительной заявки соответствующего типа отрицательная заявка исчезает и в дальнейшем не оказывает влияния на сеть.

В каждом из N узлов находится единственный прибор, который может работать в $r_i + 1, i = \overline{1, N}$, режимах. Назовём 0 основным режимом работы. Время переключения с одного режима на другой имеет показательное распределение. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок в узле не меняется. Преключение происходит только на соседние режимы.

Сигнал уменьшения режима при поступлении в i-ый узел с режимом l_i переводит его в режим $l_i - 1$, не изменяя числа заявок в системе, и не производит никаких действий, если система находится в режиме 0. Сигнал увеличения режима при поступлении в систему с режимом l_i переводит её в режим $l_i + 1$, не изменяя числа заявок в системе, и не производит никаких действий, если система находится в режиме работы r_i. Изменив режим работы, описанные сигналы пропадают, не оказывая дальнейшего влияния на систему.

Времена обслуживания заявок прибором i-го узла независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок типа u имеют показательное распределение с параметром $\mu_{i,u}, u = \overline{1, M}, i = \overline{1, N}$.

Каждая заявка потока положительных заявок независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p^+_{0(i,u)}$ $\big(\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M p^+_{o(i,u)} = 1\big)$. Каждая заявка потока отрицательных заявок независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p^-_{0(i,u)}$ $\big(\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M p^-_{o(i,u)} = 1\big)$. Поступающие сигнал повышения и сигнал уменьшения режима направляются в i-ый узел соответсвенно с вероятностями q^+_{0i} и q^-_{0i} $\big(\sum_{i=1}^N q^+_{oi} = 1, \sum_{i=1}^N q^-_{oi} = 1\big)$.

Положительная заявка типа u после обслуживания в i-ом узле с вероятностью $p^+_{(i,u)(j,v)}$как положительная типа v, с вероятностью $p^-_{(i,u)(j,v)}$ как отрицательная типа v, как сигнал увеличения или как сигнал уменьшения режима с вероятностями $q^+_{(i,u)j}$, $q^-_{(i,u)j}$ соответственно мгновенно направляется в j-ый узел, $i, j = \overline{1, N}$,или покидает сеть с вероятностью $p_{(i,u)0}$ $\big(\sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M (p^+_{(i,u)(j,v)} + p^-_{(i,u)(j,v)} + q^+_{(i,u)j} + q^-_{(i,u)j}) + p_{(i,u)0} = 1\big)$.

Состояние сети массового обслуживания в момент времени t будем описывать вектором $x(t) = (x_1(t), ..., x_N(t))$, где $x_i(t)$– состояние i-го узла в момент времени t. Таким образом, состояние каждого узла сети описывается произвольно, и состояние узла может не совпадать с числом заявок в узле. Обозначим через $|x_i|^{l_i}_u$ – число положительных заявок типа u,$u = \overline{1, M}$, в i-ом узле, $i = \overline{1, N}$,который функционирует в l_i-ом режиме, когда система находится в состоянии x_i.

Положительная заявка типа u при поступлении в i-ый узел извне или с другого узла переводит узел из состояния x_i в состояние $\tilde{x}_i$ с вероятностью $\pi^+_{i,u}(x_i, \tilde{x}_i)$ $\big(\sum_{u=1}^M \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1} \times$ $\times \pi^+_{i,u}(x_i, \tilde{x}_i) = 1\big)$; отрицательная заявка – с вероятностью $\pi^-_{i,u}(x_i, \tilde{x}_i)$ $\big(\sum_{u=1}^M \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1} \times$ $\times \pi^-_{i,u}(x_i, \tilde{x}_i) = 1\big)$; сигнал, увеличивающий режим,– с вероятностью $\sigma^+_i(x_i, \tilde{x}_i)$ $\big(\sum_{u=1}^M \times$ $\times \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i+1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i} \sigma^+_i(x_i, \tilde{x}_i) = 1\big)$; сигнал, уменьшающий режим, – с вероятностью $\sigma^-_i(x_i, \tilde{x}_i)$ $\big(\sum_{u=1}^M \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i-1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i} \sigma^-_i(x_i, \tilde{x}_i) = 1\big)$. Обслуженная положительная заявка при уходе с i-го узла переводит его из состояния x_i в состояние $\tilde{x}_i$ с вероятностью $\rho_{i,u}(x_i, \tilde{x}_i)$, $\big(\sum_{u=1}^M \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1} \rho_{i,u}(x_i, \tilde{x}_i) = 1\big)$.

В каждом узле сети предполагаются возможными внутренние переходы из состояния x_i в другое состояние $\tilde{x}_i$, но с тем же числом положительных заявок $(|\tilde{x}_i|^{l_i+1}_u = |x_i|^{l_i}_u, |\tilde{x}_i|^{l_i-1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i)$.Это значит,что такие переходы связаны не с поступлением или обслуживанием заявок или сигналов, а с переходами системы из одного режима работы в другой. Для состояний x_i, у которых номер режима $1 \leq l_i \leq r_i - 1$, время пребывания в режиме l_i имеет показательное распределение. При этом, с интенсивностью $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i)$ прибор переходит в l_i+1-ый режим, а с интенсивностью $\varphi_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – в l_i-1-ый режим. Предполагается, что $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i) = 0$, когда узел находится в режиме r_i, и $\varphi_i(x_i, \tilde{x}_i) = 0$, когда система функционирует в режиме работы 0.

3. ИЗОЛИРОВАННЫЙ УЗЕЛ

Рассмотрим изолированный i-ый узел и предположим, что в него поступают четыре независимых пуассоновских потока: поток положительных заявок типа u с параметром $\alpha^+_{i,u}$, поток отрицательных заявок типа u с параметром $\alpha^-_{i,u}$, поток сигналов, которые увеличивают режим работы узла, с параметром β^+_i и поток синалов, которые уменьшают режим работы узла, с параметром β^-_i. Здесь $\alpha^+_{i,u}$, $\alpha^-_{i,u}$, β^+_i, β^-_i – средние интенсивности поступления положительных, отрицательных заявок, сигналов повышения и сигналов уменьшения режимов соответсвенно в i-ый узел.

Обозначим через $p_i(x_i)$ стационарные вероятности состояний марковского процесса $x(t)$, который описывает модель сети. Уравнения обратимости для изолированного узла запишутся в следующем виде:

$$\alpha^+_{i,u}\pi^+_{i,u}(x_i, \tilde{x}_i)p_i(x_i) = [\mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i, x_i) + \alpha^-_{i,u}\pi^-_{i,u}(\tilde{x}_i, x_i)]p_i(\tilde{x}_i), |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1, u = \overline{1, M}; \quad (3.1)$$

$$[\beta^+_i\sigma^+_i(x_i, \tilde{x}_i) + \nu_i(x_i, \tilde{x}_i)]p_i(x_i) = [\beta^-_i\sigma^-_i(\tilde{x}_i, x_i) + \varphi_i(\tilde{x}_i, x_i)]p_i(\tilde{x}_i), |\tilde{x}_i|^{l_i+1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i, u = \overline{1, M}. \quad (3.2)$$

Для рассматриваемой модели уравнения трафика имеют вид:

$$\alpha^+_{i,u} = \lambda^+ p^+_{0(i,u)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} \frac{\alpha^+_{j,v}\mu_{j,v}}{\alpha^-_{j,v} + \mu_{j,v}} p^+_{(j,v)(i,u)},$$

$$\alpha^-_{i,u} = \lambda^- p^-_{0(i,u)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} \frac{\alpha^+_{j,v}\mu_{j,v}}{\alpha^-_{j,v} + \mu_{j,v}} p^-_{(j,v)(i,u)},$$

$$\beta^+_i = \omega^+ q^+_{0i} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} \frac{\alpha^+_{j,v}\mu_{j,v}}{\alpha^-_{j,v} + \mu_{j,v}} q^+_{(j,v)i},$$

$$\beta^-_i = \omega^- q^-_{0i} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} \frac{\alpha^+_{j,v}\mu_{j,v}}{\alpha^-_{j,v} + \mu_{j,v}} q^-_{(j,v)i}.$$

Предполагается выполнение следующих условий:

$$\sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1} p_i(\tilde{x}_i)\rho_{i,u}(\tilde{x}_i, x_i) = \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1} p_i(\tilde{x}_i)\pi^-_{i,u}(\tilde{x}_i, x_i), i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}, l_i = \overline{0, r_i}. \quad (3.3)$$

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $[\tilde{x}_i]$ – N-мерный вектор $\tilde{x}$, у которого все координаты, кроме i-ой, совпадают с координатами вектора x, а i -ая координата равна $\tilde{x}_i$. Через $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]$ обозначим N-мерный вектор $\tilde{x}$, у которого все координаты, кроме i-ой и j-ой, совпадают с координатами вектора x, а i -ая координата равна $\tilde{x}_i$, j -ая координата равна $\tilde{x}_j$. Если $q(x,y)$–интенсивность перехода процесса $x(t)$ из сотояния x в состояние y, $q(x)=\sum_{y\neq x} q(x,y)$– интенсивность его выхода из состояния x, то интенсивности перехода процесса $x(t)$ имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&q(x,[\tilde{x}_i]) = \lambda^+ p^+_{0(i,u)} \pi^+_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i), |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1;\\
&q(x,[\tilde{x}_i]) = [\lambda^- p^-_{0(i,u)} \pi^-_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i) + \mu_{i,u}(p_{(i,u)0} + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M p^-_{(i,u)(j,v)} I_{[|x_j|^{l_j}_v = 0]} +\\
&+ \sum_{j=1}^N (q^+_{(i,u)j} I_{[l_j = r_j]} + q^-_{(i,u)j} I_{[l_j=0]}))\rho_i(x_i,\tilde{x}_i)] I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1;\\
&q(x,[\tilde{x}_i]) = [\omega^+ q^+_{0i} \sigma^+_i(x_i,\tilde{x}_i) + \nu(x_i,\tilde{x}_i)] I_{[l_i \neq r_i]}, |\tilde{x}_i|^{l_i+1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i;\\
&q(x,[\tilde{x}_i]) = [\omega^- q^-_{0i} \sigma^-_i(x_i,\tilde{x}_i) + \varphi(x_i,\tilde{x}_i)] I_{[l_i \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i-1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i;\\
&q(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \mu_{i,u}\rho_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i) p^+_{(i,u)(j,v)} \pi^+_{j,v}(x_j,\tilde{x}_j) I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1, |\tilde{x}_j|^{l_j}_v = |x_j|^{l_j}_v + 1;\\
&q(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \mu_{i,u}\rho_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i) p^-_{(i,u)(j,v)} \pi^-_{j,v}(x_j,\tilde{x}_j) I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0, |x_j|^{l_j}_v \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1, |\tilde{x}_j|^{l_j}_v = |x_j|^{l_j}_v - 1;\\
&q(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \mu_{i,u}\rho_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i) q^+_{(i,u)j} \sigma^+_j(x_j,\tilde{x}_j) I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0, l_j \neq r_j]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1, |\tilde{x}_j|^{l_j+1}_v = |x_j|^{l_j}_v, \tilde{x}_j \neq x_j;\\
&q(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \mu_{i,u}\rho_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i) q^-_{(i,u)j} \sigma^-_j(x_j,\tilde{x}_j) I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0, l_j \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1, |\tilde{x}_j|^{l_j-1}_v = |x_j|^{l_j}_v, \tilde{x}_j \neq x_j;\\
&i,j = \overline{1,N}.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Для всех иных состояний y будем считать $q(x,y)=0$. Интенсивность выхода получается сложением вышеуказанных интенсивностей перехода:

$$
q(x) = \lambda^+ + \lambda^- \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M p^-_{0(i,u)} I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0]} + \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M \mu_{i,u} I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0]} +
$$

$$
+\omega^+ \sum_{i=1}^N q^+_{0i} I_{[l_i \neq r_i]} + \omega^- \sum_{i=1}^N q^-_{0i} I_{[l_i \neq 0]} +
$$

$$
+ \sum_{i=1}^N \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i+1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i} \nu_i(x_i,\tilde{x}_i) I_{[l_i \neq r_i]} + \sum_{i=1}^N \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i-1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i} \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i) I_{[l_i \neq 0]}.
$$

Теорема. *Если для всех* $i=\overline{1,N}$ *и* $u=\overline{1,M}$ *выполняются неравенства*

$$
\alpha^+_{i,u} < \mu_{i,u} + \alpha^-_{i,u}, \qquad \sup_{x_i} \sum_{|\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i} (\nu_i(x_i,\tilde{x}_i) + \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)) < \infty
$$

и условия (3.3), то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имет форму произведения

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N), \tag{4.2}$$

где $p_i(x_i)$ – стационарное распределение изолированного i-го узла, определяемое с помощью уравнений обратимости (3.1), (3.2).

Доказательство. Положим

$$
\begin{aligned}
&q^R(x,[\tilde{x}_i]) = [\mu_{i,u}\rho_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i) + \alpha^-_{i,u}\pi^-_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i)]\frac{\lambda^+ p^+_{0(i,u)}}{\alpha^+_{i,u}} I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1;\\
&q^R(x,[\tilde{x}_i]) = \frac{\alpha^+_{i,u}\pi^+_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i)}{\mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) + \alpha^-_{i,u}\pi^-_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)}[\lambda^- p^-_{0(i,u)}\pi^-_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) +\\
&+ \mu_{i,u}(p_{(i,u)0} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} p^-_{(i,u)(j,v)} I_{[|x_j|^{l_j}_v = 0]} + \sum_{j=1}^{N}(q^+_{(i,u)j} I_{[l_j = r_j]} + q^-_{(i,u)j} I_{[l_j = 0]}))\rho_i(\tilde{x}_i,x_i)], |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1;\\
&q^R(x,[\tilde{x}_i]) = \frac{\beta^-_i\sigma^-_i(x_i,\tilde{x}_i) + \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)}{\beta^+_i\sigma^+_i(\tilde{x}_i,x_i) + \nu_i(\tilde{x}_i,x_i)}[\omega^+ q^+_{0i}\sigma^+_i(\tilde{x}_i,x_i) + \nu_i(\tilde{x}_i,x_i)]I_{[l_i \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i - 1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i;\\
&q^R(x,[\tilde{x}_i]) = \frac{\beta^+_i\sigma^+_i(x_i,\tilde{x}_i) + \nu_i(x_i,\tilde{x}_i)}{\beta^-_i\sigma^-_i(\tilde{x}_i,x_i) + \varphi_i(\tilde{x}_i,x_i)}[\omega^- q^-_{0i}\sigma^-_i(\tilde{x}_i,x_i) + \varphi_i(\tilde{x}_i,x_i)]I_{[l_i \neq r_i]}, |\tilde{x}_i|^{l_i + 1}_u = |x_i|^{l_i}_u, \tilde{x}_i \neq x_i;\\
&q^R(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \frac{\mu_{i,u}\rho_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i) + \alpha^-_{i,u}\pi^-_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i)}{\alpha^+_{i,u}\pi^+_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)} \frac{\alpha^+_{j,v}\pi^+_{j,v}(x_j,\tilde{x}_j)}{\mu_{j,v}\rho_{j,v}(\tilde{x}_j,x_j) + \alpha^-_{j,v}\pi^-_{j,v}(\tilde{x}_j,x_j)} *\\
&* \mu_{j,v}\rho_{j,v}(\tilde{x}_j,x_j) p^+_{(j,v)(i,u)}\pi^+_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) I_{[|x_i|^{l_i}_u \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u - 1, |\tilde{x}_j|^{l_j}_v = |x_j|^{l_j}_v + 1;\\
&q^R(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \frac{\alpha^+_{i,u}\pi^+_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i)}{\mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) + \alpha^-_{i,u}\pi^-_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)} \frac{\alpha^+_{j,v}\pi^+_{j,v}(x_j,\tilde{x}_j)}{\mu_{j,v}\rho_{j,v}(\tilde{x}_j,x_j) + \alpha^-_{j,v}\pi^-_{j,v}(\tilde{x}_j,x_j)} *\\
&* \mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) p^-_{(i,u)(j,v)}\pi^-_{j,v}(\tilde{x}_j,x_j), |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1, |\tilde{x}_j|^{l_j}_v = |x_j|^{l_j}_v + 1;\\
&q^R(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \frac{\alpha^+_{i,u}\pi^+_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i)}{\mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) + \alpha^-_{i,u}\pi^-_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)} \frac{\beta^+_j\sigma^+_j(x_j,\tilde{x}_j) + \nu_j(x_j,\tilde{x}_j)}{\beta^-_j\sigma^-_j(\tilde{x}_j,x_j) + \varphi_j(\tilde{x}_j,x_j)} *\\
&* \mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) q^-_{(i,u)j}\sigma^-_j(\tilde{x}_j,x_j) I_{[l_j \neq r_j]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1, |\tilde{x}_j|^{l_j + 1}_v = |x_j|^{l_j}_v, \tilde{x}_j \neq x_j;\\
&q^R(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \frac{\alpha^+_{i,u}\pi^+_{i,u}(x_i,\tilde{x}_i)}{\mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) + \alpha^-_{i,u}\pi^-_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)} \frac{\beta^-_j\sigma^-_j(x_j,\tilde{x}_j) + \varphi_j(x_j,\tilde{x}_j)}{\beta^+_j\sigma^+_j(\tilde{x}_j,x_j) + \nu_j(\tilde{x}_j,x_j)} *\\
&* \mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i) q^+_{(i,u)j}\sigma^+_j(\tilde{x}_j,x_j) I_{[l_j \neq 0]}, |\tilde{x}_i|^{l_i}_u = |x_i|^{l_i}_u + 1, |\tilde{x}_j|^{l_j - 1}_v = |x_j|^{l_j}_v, \tilde{x}_j \neq x_j,\\
&i,j = \overline{1,N}.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Для всех остальных состояний y положим $q^R(x,y) = 0$. Найдём теперь $q^R(x) = \sum_{y \neq x} q^R(x,y)$. Аналогично можно показать, используя (3.3), что

$$\begin{aligned}&\sum_{|\tilde{x}_i|_u^{l_i}=|x_i|_u^{l_i}+1}\frac{\alpha_{i,u}^{+}\pi_{i,u}^{+}(x_i,\tilde{x}_i)\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)}{\mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)+\alpha_{i,u}^{-}\pi_{i,u}^{-}(\tilde{x}_i,x_i)}=\frac{\alpha_{i,u}^{+}}{\mu_{i,u}+\alpha_{i,u}^{-}};\\&\sum_{|\tilde{x}_i|_u^{l_i}=|x_i|_u^{l_i}+1}\frac{\alpha_{i,u}^{+}\pi_{i,u}^{+}(x_i,\tilde{x}_i)\pi_{i,u}^{-}(\tilde{x}_i,x_i)}{\mu_{i,u}\rho_{i,u}(\tilde{x}_i,x_i)+\alpha_{i,u}^{-}\pi_{i,u}^{-}(\tilde{x}_i,x_i)}=\frac{\alpha_{i,u}^{+}}{\mu_{i,u}+\alpha_{i,u}^{-}},\\&u=\overline{1,M},l_i=\overline{0,r_i},i=\overline{1,N}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Теперь сложим равенства (4.3). С учётом условий (4.4), а также используя уравнения трафика, получим, что $q^R(x)=q(x)$ для любого состояния $x\in X$. Кроме того, функция

$$q^R:(X,X)\backslash\{(x,x),x\in X\}\to[0,\infty),$$

определённая равенствами (4.3) , удовлетворяет соотношениям

$$p(x)q^R(x,y)=p(y)q(y,x),$$

что легко проверяется подстановкой в него равенств (4.1), (4.3) и использования (3.1), (3.2) и (4.2). Значит, $q^R(x,y)$ будут являться инфинитезимальными интенсивностями перехода для обращённой во времени цепи Маркова $x(-t)$, а $p(x)$, определённые в (4.2), – стационарными вероятностями для $x(t)$ и $x(-t)$.

Эргодичность марковского процесса $x(t)$ при выполнении неравенств из условия теоремы доказывается стандартным способом с помощью эргодической теоремы Фостера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была рассмотрена неоднородная сеть массового обслуживания с экспоненциальным обслуживанием в узлах и марковской маршрутизацией. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах, отвечающих различной степени работоспособности. Время переключения с одного режима на другой имеет показательное распределение. Переключение происходит только на соседние режимы. Кроме того, в сети циркулируют отрицательные заявки и информационные сигналы двух типов: сигналы повышения и сигналы понижения режимов работы системы. Установлены достаточные условия мультипликативности стационарного распределения состояний сети.

СЛОВА БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Малинковскому Юрию Владимировичу за внимательное прочтение статьи, ценные рекомендации и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малинковский, Ю. В., Нуеман А. Ю. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания. Весцi НАН Беларусi, 2001, № 3, стр 129–134.

2. Кравченко, С.В. Открытые сети с информационными сигналами. Известия Гомельского гос. унив. им. Ф. Скорины, 2002, № 6 (15), стр. 175–178.

3. Малинковский, Ю.В. Критерий представимости стационарного распределния состояний открытой марковской сети обслуживания с нескольвими классами заявок в форме произведения. Автоматика и телемеханика, 1991,№ 4, стр. 75–83.