

## Система $M/M/1$ с ненадежным прибором и пороговой политикой восстановления

Д. В. Ефросинин\*, О. В. Семенова\*\*

\*Российский университет дружбы народов, г. Москва

\*\*ЗАО Научно-производственная фирма «Информационные и сетевые технологии», г. Москва

Поступила в редколлегию 4.12.2009

**Аннотация**—В статье рассматривается система массового обслуживания типа  $M/M/1$  с ненадежным прибором. Прибор выходит из строя через экспоненциально распределенное время, когда он находится в рабочем состоянии и на нем обслуживается заявка. Восстановление прибора происходит в течение экспоненциально распределенного времени в соответствии с пороговой политикой, задаваемой пороговым уровнем  $q \geq 1$ . После очередного отказа прибор не восстанавливается до тех пор, пока число заявок не превысит уровень  $q$ . В работе проводится анализ системы в стационарном режиме, а также решается задача оптимального управления восстановлением с целью минимизации средних затрат при заданной структуре штрафов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается система массового обслуживания  $M/M/1$  с пороговым управлением восстановления ненадежного прибора. В процессе обслуживания прибор может выходить из строя (происходит отказ). Восстановление прибора производится через случайное время в соответствии с пороговой политикой управления, заданной пороговым уровнем  $q \geq 1$ . Если в момент отказа число заявок в очереди не превышает  $q$ , то прибор остается в состоянии отказа, до тех пор пока число заявок не достигнет уровня  $q$ . После этого через экспоненциально распределенное время происходит его восстановление. Если отказ происходит, когда длина очереди превышает порог  $q$ , то восстановление прибора начинается сразу после отказа.

Пороговые политики управления применяются во многих приложениях, где необходимо изменять интенсивности обслуживания приборов, их число, а также контролировать включение и выключение обслуживающих приборов. В [1] исследовалась многолинейная система  $MAR/PH/K$  с неоднородными приборами. В работе приведено доказательство того, что оптимальная политика управления, минимизирующая среднее число заявок в системе, имеет пороговую структуру, т.е. прибор с индексом  $j$ ,  $1 \leq j \leq K$ , должен включаться, только если число ожидающих обслуживания заявок превысит пороговый уровень  $q_j$ . Пороговая политика управления интенсивностями обслуживания в многолинейных системах с однородными приборами рассматривалась в [2]. В работе [3] представлен анализ системы типа  $M/M/1$  с ненадежным отключаемым прибором и пороговой  $N$ -политикой управления, регулирующей включение и выключение прибора в зависимости от числа  $N$  заявок в очереди. Система массового обслуживания  $M/G/1$  с отключением прибора и пороговой политикой включения исследовалась в [4].

Задача, рассмотренная в данной статье, отличается от предыдущих работ тем, что здесь применяется пороговая политика для восстановления прибора. Во многих приложениях для осуществления ремонта необходимо подключение специальных устройств, использование дорогостоящего диагностического программного обеспечения или вызов специалистов. В этом случае политика накопления некоторого числа заявок в буфере до момента начала ремонта может быть более выгодной, чем осуществление ремонта при малом числе заявок.

Структура статьи следующая. В разделе 2 описывается математическая модель системы и приведено условие существования стационарного режима. В разделе 3 проведен стационарный анализ системы в терминах производящих функций. Задача оптимального управления восстановлением с целью минимизации средних потерь описывается в разделе 4. Раздел 5 содержит численные эксперименты и их краткое обсуждение.

### 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему массового обслуживания типа  $M/M/1$  с ненадежным прибором. Поступающие в систему заявки образуют пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$ . Время обслуживания экспоненциально распределено с параметром  $\mu$ .

Прибор может находиться в двух состояниях: рабочем и состоянии отказа. В процессе обслуживания заявки, если прибор находится в рабочем состоянии, через экспоненциальное время с параметром  $\alpha$  происходит отказ, и прибор переходит в состояние отказа, причем заявка остается на приборе до завершения его восстановления. Восстановление прибора осуществляется в соответствии с пороговой политикой. Восстановление прибора в состоянии отказа происходит за экспоненциальное время с параметром  $\beta$ , если число заявок в очереди больше или равно значения заданного порогового уровня  $q$  ( $q \geq 1$ ). После завершения восстановления прибор переходит в рабочее состояние и продолжает обработку находящейся на нем заявки, обслуживание которой было прервано.

Обозначим через  $N(t)$  число заявок в системе и  $D(t)$  – состояние прибора в момент времени  $t$ .  $D(t) = 1$ , если прибор находится в рабочем состоянии, и  $D(t) = 0$ , если прибор находится в состоянии отказа. Очевидно, что двумерный процесс

$$\{X(t)\}_{t \geq 0} = \{N(t), D(t)\}_{t \geq 0}$$

является цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний  $E = \{x = (n, d) | n \in \mathbb{N}_0, d \in \{0, 1\}\}$ . Граф переходов между состояниями компоненты  $N(t)$  цепи Маркова  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , для пороговой политики  $q$  представлена на Рис. 1.

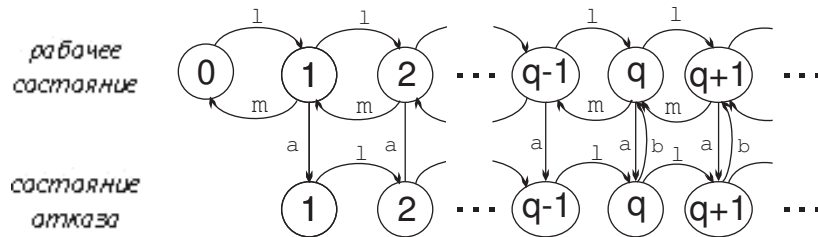


Рис. 1. Диаграмма интенсивностей переходов для пороговой политики  $q$ .

Далее установим условие существования стационарного режима.

**Теорема 1.** *Цепь Маркова  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  является эргодической, если выполнено следующее условие:*

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) < 1. \tag{1}$$

**Доказательство.** Рассмотрим поведение системы, в которой число заявок превышает пороговый уровень  $q$ . Обозначим через  $\nu_i$  момент завершения  $i$ -го обслуживания и через  $R_i = R(\nu_i+)$  – число заявок в очереди сразу после момента  $\nu_i$ . Очевидно, что для случайной величины  $R_i$  справедливо следующее соотношение:

$$R_i = R_{i-1} - 1 + S_i, \tag{2}$$

где  $S_i$  – число поступивших заявок в течение  $i$ -го времени обслуживания (включая возможные отказы и восстановления). Очевидно, что последовательность случайных величин  $R_i, i \in \mathbb{N}$  образует цепь Маркова на множестве состояний  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , которая является вложенной цепью для  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  и является неприводимой и непериодической.

Согласно критерию Фостера (см., например [5]), для получения условия эргодичности цепи необходимо показать, что для некоторого положительного числа  $\varepsilon > 0$  справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n < -\varepsilon,$$

где  $\eta_n = \mathbb{M}[R_i - R_{i-1} | R_{i-1} = n]$ .

В соответствии с рекуррентным соотношением (2), имеем

$$\eta_n = -1 + \mathbb{M}[S_i | R_{i-1} = n]. \tag{3}$$

Случайная величина  $S_i$  не зависит от числа заявок в системе и задается распределением

$$\mathbb{P}[S_i = k] = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dH(t), \quad k \geq 0,$$

где  $H(t)$  обозначает функцию распределения времени  $H$ , в течение которого заявка находится на приборе (с учетом возможных отказов и восстановлений). Преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) функции  $H(t)$  получено ниже (см. формулу (16)).

Для условного математического ожидания  $\mathbb{M}[S_i | R_{i-1} = n]$  получим следующее выражение:

$$\mathbb{M}[S_i | R_{i-1} = n] = \mathbb{M}[S_i] = \sum_{k=1}^\infty k \mathbb{P}[S_i = k] = \lambda \mathbb{M}[H].$$

Заметим, что доля времени, в течение которого прибор находится в работоспособном состоянии, равна  $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ . Таким образом, эффективная интенсивность обслуживания равна  $\frac{\mu\beta}{\alpha + \beta}$ . Отсюда получаем, что

$$\mathbb{M}[S_i | R_{i-1} = n] = \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right). \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в (3), получим

$$\eta_n = -1 + \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Предположим теперь, что  $\frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) < 1$ . Тогда число  $\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \right)$  положительно, и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) - 1 = -2\varepsilon < -\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

### 3. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Если выполнено условие (1), то для цепи Маркова  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  существуют финальные вероятности, совпадающие со стационарными:

$$\pi_0(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[N(t) = n, D(t) = 0]$$

вероятность того, что в системе находится  $n$  заявок, и прибор пребывает в состоянии отказа,  $n \geq 1$ ;

$$\pi_1(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[N(t) = n, D(t) = 1]$$

вероятность того, что в системе находится  $n$  заявок, и прибор пребывает в рабочем состоянии,  $n \geq 0$ .

Стационарные вероятности состояний системы  $\pi_0(n)$ ,  $n \geq 1$  и  $\pi_1(n)$ ,  $n \geq 0$  удовлетворяют следующей системе уравнений равновесия:

$$(\lambda + \beta I_{\{n \geq q\}})\pi_0(n) = \lambda\pi_0(n-1)I_{\{n > 1\}} + \alpha\pi_1(n), \quad n \geq 1, \quad (5)$$

$$(\lambda + (\mu + \alpha)I_{\{n > 0\}})\pi_1(n) = \lambda\pi_1(n-1)I_{\{n > 0\}} + \mu\pi_1(n+1) + \beta\pi_0(n)I_{\{n \geq q\}}, \quad n \geq 0, \quad (6)$$

где  $I_{\{A\}} = 1$  – функция-индикатор события  $A$ .

Решение системы уравнений (5)–(6) рекуррентными методами представляется проблематичным, поэтому воспользуемся аппаратом производящих функций (для  $|z| \leq 1$ ). Для этого введем следующие обозначения:

$$P_1(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^n \pi_0(n), \quad P_2(z) = \sum_{n=q}^{\infty} z^n \pi_0(n), \quad P_3(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^n \pi_1(n), \quad P_4(z) = \sum_{n=q}^{\infty} z^n \pi_1(n). \quad (7)$$

**Теорема 2.** Производящие функции  $P_i(z)$ ,  $i = \overline{1,4}$ , определенные в (7), удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \frac{\alpha\lambda z - (\lambda(\lambda z - \mu)\Gamma(q-1) + \mu(\alpha - \lambda z + \mu)\Gamma(q))z^q}{\lambda(\lambda z^2 - (\alpha + \lambda + \mu)z + \mu)} \pi_1(0), \\ P_2(z) &= \frac{(\lambda(\lambda z - \mu)\Gamma(q-1) + \mu(\alpha - \lambda z + \mu)\Gamma(q))z^q}{\lambda^2 z^2 - \lambda(\alpha + \beta + \lambda + \mu)z + (\beta + \lambda)\mu} \pi_1(0), \\ P_3(z) &= \frac{\lambda(1-z)z + (\lambda z \Gamma(q-1) - \mu \Gamma(q))z^q}{\lambda z^2 - (\alpha + \lambda + \mu)z + \mu} \pi_1(0), \\ P_4(z) &= \frac{(-\lambda^2 z \Gamma(q-1) + (\beta + \lambda)\mu \Gamma(q))z^q}{\lambda^2 z^2 - \lambda(\alpha + \beta + \lambda + \mu)z + (\beta + \lambda)\mu} \pi_1(0), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Gamma(n) = g_1 \gamma_1^n + g_2 \gamma_2^n$ ,  $n = \overline{0, q}$ ,

$$\gamma_{1,2} = \frac{\alpha + \lambda + \mu \pm \sqrt{(\alpha + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}, \quad (9)$$

$$g_1 = \frac{\gamma_2(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad g_2 = \frac{\gamma_1(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}. \quad (10)$$

Вероятность  $\pi_1(0)$  является единственным решением, получаемым из условия нормировки,  $\pi_1(0) + \sum_{i=1}^4 P_i(1) = 1$  и вычисляется по формуле

$$\pi_1(0) = \frac{\alpha\lambda(\beta\mu - (\alpha + \beta)\lambda)}{\beta\mu(-\lambda(\mu - \lambda)\Gamma(q-1) + \mu(\alpha - \lambda + \mu)\Gamma(q))}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим уравнения (6) для  $0 \leq n \leq q-1$ . Очевидно, что это разностные уравнения, решение которых имеет вид

$$\pi_1(n) = \gamma^n \pi_1(0), \quad 0 \leq n \leq q. \quad (11)$$

Для произвольного  $n$ ,  $1 \leq n \leq q$ , уравнение (5) имеет вид

$$(\lambda + \mu + \alpha)\pi_1(n) = \lambda\pi_1(n-1) + \mu\pi_1(n+1). \quad (12)$$

Подстановка (11) в (12) приводит к соотношению

$$\mu\gamma^2 - (\lambda + \mu + \alpha)\gamma + \lambda = 0.$$

Это квадратичное уравнение имеет два корня вида (9). Таким образом, вероятности  $\pi_1(n)$ ,  $0 \leq n \leq q$  должны удовлетворять соотношению

$$\pi_1(n) = \Gamma(n)\pi_1(0), \quad 0 \leq n \leq q, \quad (13)$$

где  $\Gamma(n) = g_1\gamma_1^n + g_2\gamma_2^n$ .

Из граничных условий следуют равенства  $\Gamma(0) = 1$  и  $\Gamma(1) = \lambda/\mu$ , которые получены из (6) для  $n = 0$  и из (13). Отсюда получаем следующую систему уравнений для неизвестных  $g_1$  и  $g_2$ :

$$\begin{aligned} g_1\gamma_1 + g_2\gamma_2 &= \frac{\lambda}{\mu} = \gamma_1\gamma_2, \\ g_1 + g_2 &= 1, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид (10).

Из уравнений (5) для  $1 \leq n \leq q - 1$  через рекуррентную подстановку получим вероятность  $\pi_0(q - 1)$ , удовлетворяющую равенству

$$\pi_0(q - 1) = \frac{\alpha}{\lambda} P_3(1). \tag{14}$$

Умножая (5) и (6) на соответствующие степени  $z$  и складывая полученные соотношения для всех возможных  $n$ , после преобразований получим систему четырех уравнений для  $P_i(z)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,

$$\begin{aligned} \lambda(1 - z)P_1(z) &= \alpha P_3(z) - \lambda z^q \pi_0(q - 1), \\ ((1 - z)\lambda + \beta)P_2(z) &= \alpha P_4(z) + \lambda z^q \pi_0(q - 1), \\ (\lambda z^2 - (\alpha + \lambda + \mu)z + \mu)P_3(z) &= \mu z \pi_1(1) - \lambda z^2 \pi_1(0) + (\lambda z \pi_1(q - 1) - \mu \pi_1(q))z^q, \\ (\lambda z^2 - (\alpha + \lambda + \mu)z + \mu)P_4(z) &= \beta z P_2(z) + (\lambda z \pi_1(q - 1) - \mu \pi_1(q))z^q. \end{aligned}$$

Подставляя теперь выражения (13) и (14) для вероятностей  $\pi_0(q - 1)$ ,  $\pi_1(1)$ ,  $\pi_1(q - 1)$  и  $\pi_1(q)$  в последние равенства, получим выражения (8). Теорема доказана.

Далее введем следующие обозначения:

$p_1$  – вероятность того, что прибор находится в состоянии отказа и не может быть восстановлен (число заявок в системе  $N(t) < q$ ),

$p_2$  – вероятность того, что прибор находится в состоянии отказа и восстанавливается,

$p_3$  – вероятность того, что прибор находится в рабочем состоянии и  $N(t) < q$ , и

$p_4$  – вероятность того, что прибор находится в рабочем состоянии и  $N(t) \geq q$ .

Заметим, что  $p_i = P_i(1)$ ,  $i = 1, 2, 4$ , и  $p_3 = P_3(1) + \pi_1(0)$ .

Из теоремы 1 следует, что

$$p_1 = \frac{F(q) - \alpha\lambda}{F(q)} C_1, \quad p_2 = C_2, \quad p_3 = \frac{\lambda(\alpha + G(q))}{F(q)} C_1, \quad p_4 = \frac{H(q)}{F(q)} C_2,$$

где  $F(q) = -\lambda(\mu - \lambda)\Gamma(q - 1) + \mu(\alpha - \lambda + \mu)\Gamma(q)$ ,  $G(q) = -\lambda\Gamma(q - 1) + \mu\Gamma(q)$ ,

$$H(q) = -\lambda^2\Gamma(q - 1) + (\beta + \lambda)\mu\Gamma(q), \quad C_1 = 1 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha} C_2, \quad C_2 = \frac{\alpha\lambda}{\beta\mu}.$$

Среднее число заявок в системе для заданного порогового уровня  $q$  вычисляется по формуле

$$\bar{N}(q) = \bar{N}_1(q) + \bar{N}_2(q) + \bar{N}_3(q) + \bar{N}_4(q), \tag{15}$$

где  $\bar{N}_i(q) = \frac{d}{dz} P_i(z) \Big|_{z=1}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

С помощью теоремы 1, уравнение (15) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \bar{N}(q) &= -\frac{\alpha - \lambda + \mu}{\alpha} C_1 + \frac{\alpha + \beta + \mu - \lambda}{\alpha} \frac{C_2^2}{C_1} + \lambda\mu C_1 \frac{1}{F(q)} + \\ &+ \frac{-\lambda\alpha(\mu - \lambda) + \alpha\lambda\mu C_1 q - \lambda\mu(\alpha - \lambda + \mu)C_1}{\alpha\mu} \frac{G(q)}{F(q)} + \\ &+ \frac{\alpha C_1 C_2 q + (\alpha + \beta + \mu - \lambda)C_2^2}{\alpha C_1} \frac{H(q)}{F(q)} - \frac{\lambda^2(\mu - \lambda)}{\mu} \frac{\Gamma(q - 1)}{F(q)} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} q. \end{aligned}$$

Вычислим теперь распределение времени  $H$  обслуживания произвольной заявки с учетом возможных отказов и восстановлений, если число заявок в системе превышает порог  $q$ .

**Теорема 3.** ПЛС случайной величины  $H$  вычисляется по формуле

$$\tilde{H}(s) = \frac{\mu(s + \beta)}{s^2 + s(\alpha + \beta + \mu) + \mu\beta}. \quad (16)$$

**Доказательство.** Обозначим через  $H_k(t)$  функцию распределения времени, в течение которого заявка находится на приборе при условии, что случается ровно  $k \geq 0$  отказов и восстановлений. С вероятностью  $dH_k(t)$  обслуживание завершится в интервале времени  $(t, t + dt)$ . Для этой вероятности справедливы следующие соотношения:

$$dH_0(t) = e^{-(\alpha+\mu)t} \mu dt, \quad (17)$$

$$dH_k(t) = \int_0^t e^{-(\alpha+\mu)x} \alpha dx \int_x^t e^{-\beta(v-x)} \beta dv dH_{k-1}(t-v), \quad k \geq 1.$$

Применяя ПЛС к (17), получим выражения

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dH_0(t) = \frac{\mu}{s + \alpha + \mu}, \\ \tilde{H}_k(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dH_k(t) = \frac{\alpha}{s + \alpha + \mu} \frac{\beta}{s + \beta} \tilde{H}_{k-1}(s), \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, приводят к следующему равенству:

$$\tilde{H}_k(s) = \left( \frac{\alpha}{s + \alpha + \mu} \right)^k \left( \frac{\beta}{s + \beta} \right)^k \frac{\mu}{s + \alpha + \mu}, \quad k \geq 0. \quad (18)$$

ПЛС  $\tilde{H}(s)$  времени пребывания заявки на приборе, включая возможные отказы и восстановления, представляется в виде суммы условных преобразований, т.е.  $\tilde{H}(s) = \sum_{k=0}^\infty \tilde{H}_k(s)$ . Отсюда следует формула (18), и таким образом теорема доказана.

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРОГОВОГО УРОВНЯ

Обозначим через  $\bar{B}$  среднее время регенерации, представляющее собой период времени, который начинается с поступления заявки в пустую систему до момента следующего поступления заявки в пустую систему

$$\bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3 + \bar{B}_4 = \frac{F(q)}{\alpha\lambda^2 C_1}.$$

В правой части равенства представлена сумма средних времен  $\bar{B}_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , а именно: времени, когда прибор находится в состоянии отказа и не восстанавливается, в состоянии отказа и восстанавливается, в рабочем состоянии, если  $N(t) < q$  и в рабочем состоянии, если  $N(t) \geq q$ . Эти величины, очевидно, удовлетворяют соотношению  $\bar{B}_i = p_i \bar{B}$ , или

$$\bar{B}_1 = \frac{F(q) - \alpha\lambda}{\alpha\lambda^2}, \quad \bar{B}_2 = \frac{1}{\alpha\lambda^2} \frac{C_2}{C_1} F(q), \quad \bar{B}_3 = \frac{\alpha + G(q)}{\alpha\lambda}, \quad \bar{B}_4 = \frac{1}{\alpha\lambda^2} \frac{C_2}{C_1} H(q).$$

Поскольку  $\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}}$  не зависит от параметра управления  $q$ , стоимость за этот период времени можно опустить. Для вычисления оптимального значения порогового уровня  $q$ , введем следующий функционал потерь:

$$\begin{aligned} \bar{V}(q) &= c_h \bar{N}(q) + \frac{c_1 \bar{B}_1 + c_3 \bar{B}_3 + c_4 \bar{B}_4}{\bar{B}} + \frac{c_r}{\bar{Y}} = \\ &= c_h \bar{N}(q) + c_1 C_1 \left( 1 - \frac{\alpha\lambda}{F(q)} \right) + c_3 \frac{C_1 \lambda}{F(q)} (\alpha + G(q)) + c_4 \frac{C_2 H(q)}{F(q)} + c_r \frac{\alpha^2 \lambda^2 C_1}{\mu F(q)} (\gamma_1^q - \gamma_2^q), \end{aligned}$$

где структура штрафов представлена следующими величинами:  $c_h$  – стоимость за единицу времени хранения заявки,  $c_1$  – стоимость за единицу времени пребывания в состоянии отказа, если прибор не может быть восстановлен,  $c_3$  ( $c_4$ ) – стоимость за единицу времени функционирования системы, когда прибор находится в рабочем состоянии и  $N(t) < q$  ( $N(t) \geq q$ ),  $c_r$  – фиксированная стоимость за подключение ремонтного оборудования или программного обеспечения. Величина  $\bar{Y}$  обозначает средний период времени между двумя последовательными посещениями состояния  $(q, 0)$ , где начинается восстановление прибора. После преобразований получим

$$\bar{Y} = \frac{\mu \bar{B}}{\alpha(\gamma_1^q - \gamma_2^q)}.$$

Оптимальное значение порогового уровня  $q^*$  получим численно, решая уравнение  $\frac{d}{dq} \bar{V}(q) = 0$ . Если  $q^*$  не является целым числом, то берется ближайшее целое число. Так как значение  $q$  дискретно, то для вычисления оптимального значения можно также использовать простой метод перебора.

### 5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

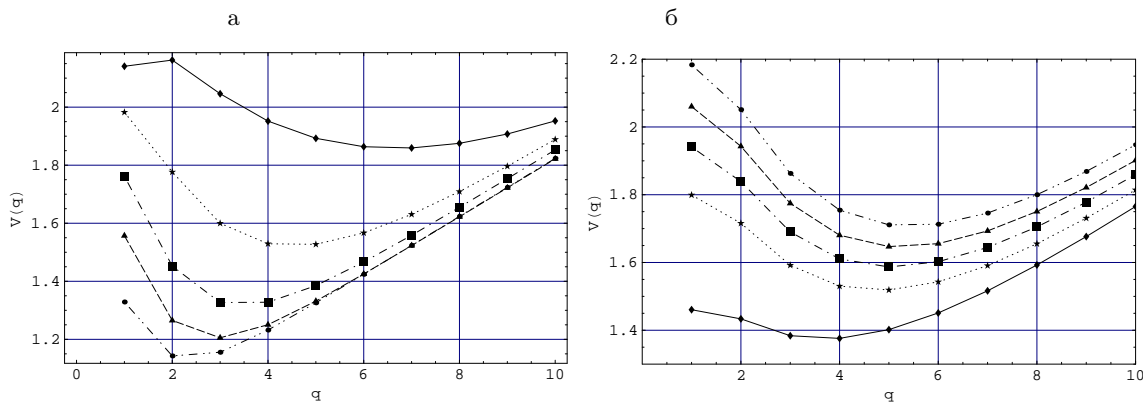
Зафиксируем значения стоимостей следующим образом:

$$c_1 = 1.0, c_3 = 2.5, c_4 = 1.0, c_h = 0.1, c_r = 0.5.$$

На Рис. 2 показана зависимость функционала потерь от значений интенсивностей  $\alpha$  и  $\beta$ . Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  принимают следующие значения:  $\lambda = 0.1, \mu = 0.5$ . Множества значений для изменяемых параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , а также соответствующие оптимальные пороговые уровни приведены ниже:

$$\alpha = \{0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 1.3\}, \beta = 0.5, q^* = \{7, 4, 3, 3, 2\} \text{ на Рис. 2(a),}$$

$$\beta = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 3.5\}, \alpha = 0.2, q^* = \{4, 5, 5, 5, 6\} \text{ на Рис. 2(b).}$$

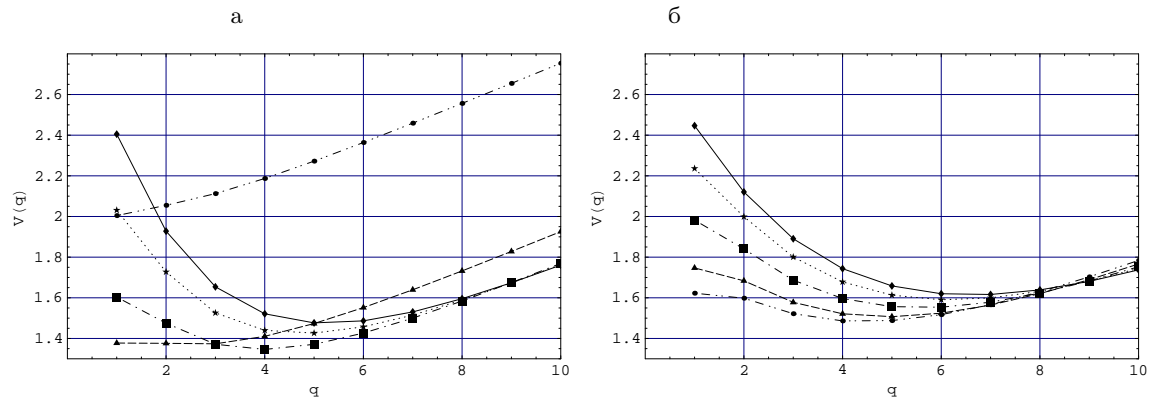


**Рис. 2.** Зависимость функционала потерь  $\bar{V}(q)$  от порогового уровня  $q$  и параметров  $\alpha$  (а) и  $\beta$  (б)

Как видно из рисунка, оптимальное значение порогового уровня  $q^*$  уменьшается при увеличении значения параметра  $\alpha$  и уменьшении значения параметра  $\beta$ . Самая нижняя кривая на Рис. 2(а) соответствует наибольшему значению параметра  $\alpha$ , а самая нижняя кривая на Рис. 2(б) соответствует наименьшему значению параметра  $\beta$ . На Рис. 3 показано влияние параметра  $\lambda$  на функционал потерь. Параметры  $\lambda, \mu$  и соответствующие оптимальные пороговые уровни  $q^*$  принимают следующие значения:

$$\lambda = \{0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.18\}, \mu = 0.5, q^* = \{5, 5, 4, 3, 1\} \text{ на Рис. 3(a),}$$

$$\lambda = \{0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.18\}, \mu = 0.9, q^* = \{7, 6, 6, 5, 4\} \text{ на Рис. 3(б).}$$



**Рис. 3.** Зависимость функционала потерь  $\bar{V}(q)$  от порогового уровня  $q$  и параметров  $\lambda$  при  $\mu = 0.5$  (а) и  $\lambda$  при  $\mu = 0.9$  (б)

Как видно из Рис. 3, оптимальное значение порогового уровня  $q^*$  уменьшается при увеличении значения параметра  $\lambda$  и уменьшении параметра  $\mu$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Efrosinin D. *Controlled queueing systems with heterogeneous servers. Dynamic optimization and monotonicity properties*. Saarbrücken: VDM Verlag, 2008.
2. Семенова О.В., Дудин А.Н. Система массового обслуживания  $M/M/N$  с управляемым режимом обслуживания и катастрофическими сбоями // *Автоматика и вычислительная техника*. 2007. №6. С. 72-80.
3. Wang K.-H. Optimal control of a removable and non-reliable server in an  $M/M/1$  queueing system with exponential startup time // *Mathematical Methods of Operations Research*. 2003. Vol. 58. P. 29-39.
4. Heyman D.P., Sobel M.J. *Stochastic Models in Operations Research*. Vol. II: Stochastic Optimization. New York: McGraw-Hill, 1984.
5. Pakes E. Some conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains // *Operations Research*. 1969. Vol. 17. P. 1058-1061.