Информационные процессы, Том 9, № 4, 2009, стр. 352–363

Система массового обслуживания M/M/n/r, функционирующая в синхронной случайной среде

Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 23.11.2009

Аннотация—Исследована многолинейная система массового обслуживания с простейшим потоком заявок, показательно распределенной длительностью обслуживания и накопителем конечной емкости. В случайные моменты времени одновременно скачкообразно изменяются параметры входящего потока, показательного закона времени обслуживания и число задействованных линий. Число возможных режимов функционирования системы, характеризующихся набором параметров (λ_i, μ_i, n_i), конечно. Длительность i-го режима показательно распределена с параметром ν_i. Выведен алгоритм в виде рекуррентных формул для расчёта стационарных вероятностей состояний системы и получены формулы для её стационарных характеристик. Рассмотрена упрощённая модель, позволяющая найти стационарные вероятности состояний системы в явном виде.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается многолинейная система массового обслуживания (СМО), в которой под действием случайной среды с течением времени в случайные моменты одновременно изменяются параметры λ, μ и n. Предположим, что число возможных режимов функционирования системы, отличающихся значениями этих параметров, конечно и равно l, а длительность i-го режима распределена по показательному закону с параметром ν_i, причем длительности режимов являются независимыми случайными величинами.

В i-ом режиме на вход СМО поступает простейший поток заявок с параметром λ_i, а длительности обслуживания заявок представляют собой независимые случайные величины, распределенные по показательному закону с параметром μ_i. Число линий, задействованных в i-ом режиме, обозначим через n_i. Для определенности предположим, что $n_1 = n$, а $n + r$ — это максимальное число заявок, которые могут одновременно находиться в системе (на обслуживании и в очереди). Следовательно, возможные пределы изменения числа линий таковы: $1 \le n_i \le n + r$.

Если число работающих линий в момент переключения СМО в i-ый режим не изменяется, то все обслуживаемые заявки продолжают обслуживаться на своих линиях, длина очереди не изменяется. Если число работающих линий увеличивается, то возникшие свободные линии заполняются заявками из очереди. Если же число задействованных линий уменьшается, то заявки, потерявшие свои линии, вынуждены ожидать дообслуживания в очереди.

Считаем заданными вероятности перехода из i-го режима в j-ый σ_{ij} $(i,\, j = \overline{1,\, l};\ i \ne j)$, причем $\sigma_{ij} > 0$ и

$$\sum_{\substack{j=1\\(j\ne i)}}^{l} \sigma_{ij} = 1 \qquad (\, i = \overline{1,\, l}\,).$$

Пусть ν_i ($i = \overline{1,\, l}$) — параметр показательного распределения длительности i-го режима. Обозначим через $\nu_{ij} = \sigma_{ij}\nu_i$ $(i,\, j = \overline{1,\, l};\ i \neq j)$ интенсивность простейшего потока, переводящего систему из i-го режима в j-ый. Тогда, очевидно, выполняются равенства

$$\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ij} = \nu_i \qquad (\, i = \overline{1,\, l}\,).$$

Описанная СМО более адекватно по сравнению с классическими марковскими системами отображает реальные процессы, связанные с изменяющейся во времени внешней случайной средой и реакцией самой системы на эти изменения. Очевидно, что интенсивность входного потока для многих СМО изменяется в зависимости от времени суток, года, погодных условий и т. п. Как результат стремления к повышению эффективности работы системы и качества обслуживания, с изменением интенсивности потока заявок могут синхронно изменяться параметр длительности обслуживания и число линий системы за счёт привлечения дополнительных ресурсов для постоянно работающих линий, а также возможного включения резервных линий (при их наличии).

Использование в предлагаемой модели простейших потоков позволяет применить для её исследования классические методы, разработанные для марковских систем, и получить результат несмотря на сложность рассматриваемой СМО.

Остановимся на некоторых работах, в которых исследовались СМО, функционирующие в случайной среде, наиболее близкие к рассматриваемой модели. В статье Эйзена и Тейнитера [1] впервые изучена система с ожиданием M/M/1, параметры которой $(\lambda,\, \mu)$ попеременно принимают значения $(\lambda_1,\, \mu_1)$ и $(\lambda_2,\, \mu_2)$, причём переход от одного режима к другому управляется однородным марковским процессом. Такая же СМО исследована в работах [2] и [3] соответственно с помощью техники матричной производящей функции и матричных аналитических функций. В [2] определён период занятости и условия равновесия, а в [3] оценены стационарные вероятности и длина очереди. В статье [4] изучены характеристики системы M/M/1, в которой параметры $(\lambda,\, \mu)$ изменяются вместе с состояниями основной цепи Маркова.

Много работ посвящено иссследованию СМО с переменной интенсивностью входного потока. В частности, А. Г. Таташев [5] исследовал одноканальную СМО с пуассоновским входным потоком, интенсивность которого зависит от значения, принимаемого суммарной остаточной длиной заявок, находящихся в системе. Достаточно хорошо изучены СМО с входными так называемыми МС-потоками [6–8]. В таких потоках интенсивность представляет собой марковскую цепь или полумарковский процесс с дискретным пространством состояний.

Более полный обзор работ, в которых изучалось поведение СМО в случайной внешней среде, можно найти, например, в диссертации [9, п. 2.3].

Во всех перечисленных работах изучены, как правило, одноканальные СМО с бесконечным накопителем, а вопрос случайного изменения числа задействованных линий не рассматривался.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Стохастическое поведение рассматриваемой СМО описывается двумерным марковским процессом $\{\,\xi(t),\ t \geq 0\,\}$, где $\xi(t) = \bigl(\xi_1(t),\, \xi_2(t)\bigr)$. Здесь $\xi_1(t)$ — число заявок в системе, а $\xi_2(t)$ — номер режима в момент времени t. Конечное множество состояний этого процесса включает состояния $(k,\, i)$ ($k = \overline{0,\, n+r}$; $i = \overline{1,\, l}$). Для определенности считаем, что в начальный момент времени процесс находится в состоянии (0, 1).

Пусть $p_{ki}(t) = P\{\,\xi_1(t) = k,\ \xi_2(t) = i\,\}$ — вероятность пребывания процесса $\{\,\xi(t),\ t \geq 0\,\}$ в состоянии $(k,\, i)$ в момент времени t.

Марковский процесс $\{\,\xi(t),\ t \geq 0\,\}$ является неприводимым, потому что все его состояния сообщаются. Поэтому, согласно [10, гл. 1] процесс $\{\,\xi(t),\ t \geq 0\,\}$ является эргодическим и существует его единственное стационарное распределение

$$p_{ki} = \lim_{t\to\infty} p_{ki}(t) \qquad (\,k=\overline{0,\,n+r};\ \ i=\overline{1,\,l}\,).$$

Выпишем систему уравнений равновесия (СУР), которой удовлятворяют стационарные вероятности p_{ki} (её получаем по мнемоническому правилу [10, гл. 3] с помощью диаграммы переходов состояний СМО), дополненную условием нормировки

$$\mu_i p_{1i} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji}\, p_{0j} - (\lambda_i+\nu_i)p_{0i} = 0 \qquad (\,i=\overline{1,\,l}\,); \tag{1}$$

$$\lambda_i p_{k-1,i} + (k+1)\mu_i p_{k+1,i} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji}\, p_{kj} - (\lambda_i + k\mu_i + \nu_i)p_{ki} = 0 \quad (\,k=\overline{1,\,n_i-1};\ \ i=\overline{1,\,l}\,); \tag{2}$$

$$\lambda_i p_{k-1,i} + n_i\mu_i p_{k+1,i} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji}\, p_{kj} - (\lambda_i + n_i\mu_i + \nu_i)p_{ki} = 0 \qquad (\,k=\overline{n_i,\,n+r};\ \ i=\overline{1,\,l}\,); \tag{3}$$

$$\lambda_i p_{n+r-1,i} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji}\, p_{n+r,j} - (n_i\mu_i+\nu_i)p_{n+r,i} = 0 \qquad (\,i=\overline{1,\,l}\,); \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n+r}\sum_{i=1}^{l} p_{ki} = 1. \tag{5}$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Получение решений СУР (1)–(5) в явном виде не представляется возможным, поэтому запишем рекуррентные соотношения для расчёта стационарных вероятностей p_{ki}. Введём обозначения: $\beta_i = \mu_i/\lambda_i$, $\delta_i = \nu_i/\lambda_i$, $\delta_{ji} = \nu_{ji}/\lambda_i$. Из уравнений (4) находим

$$p_{n+r-1,i} = (n_i\beta_i + \delta_i)p_{n+r,i} - \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \delta_{ji}\, p_{n+r,j} \qquad (\,i=\overline{1,\,l}\,). \tag{6}$$

Аналогично, из уравнений (3) и (2) соответственно получаем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} p_{n+r-k,i} &= (1+n_i\beta_i+\delta_i)p_{n+r-k+1,i} - n_i\beta_i\, p_{n+r-k+2,i} - \\ &\quad - \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \delta_{ji}\, p_{n+r-k+1,j} \qquad (\,k=\overline{2,\,n+r-n_i+1};\ \ i=\overline{1,\,l}\,); \end{aligned} \tag{7}$$

$$p_{n+r-k,i} = \bigl(1 + (n+r-k+1)\beta_i + \delta_i\bigr)p_{n+r-k+1,i} - (n+r-k+2)\beta_i\, p_{n+r-k+2,i} - \\ - \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \delta_{ji}\, p_{n+r-k+1,j} \qquad (\,k = \overline{n+r-n_i+2,\, n+r};\;\; i = \overline{1,\, l}\,). \tag{8}$$

После подстановки числовых значений параметров β_i, δ_i, δ_{ji} и последовательных вычислений по формулам (6)–(8) выразим p_{ki} $(\,k = \overline{0,\, n+r-1}\,)$ через $p_{n+r,j}$ $(\,j = \overline{1,\, l}\,)$

$$p_{ki} = \sum_{j=1}^{l} a_{ji}^{(k)} p_{n+r,j} \qquad (\,k = \overline{0,\, n+r-1};\;\; i = \overline{1,\, l}\,), \tag{9}$$

где $a_{ji}^{(k)}$ — коэффициенты, полученные непосредственными вычислениями.

Одно из уравнений (1), например для $i = l$, можно не учитывать. Оставшиеся уравнения (1) после подстановки в них выражений из (9) для p_{0i} и p_{1i} образуют систему вида

$$\mu_i \sum_{j=1}^{l} a_{ji}^{(1)} p_{n+r,j} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji} \sum_{k=1}^{l} a_{kj}^{(0)}\, p_{n+r,k} - (\lambda_i + \nu_i) \sum_{j=1}^{l} a_{ji}^{(0)} p_{n+r,j} = 0 \qquad (\,i = \overline{1,\, l-1}\,). \tag{10}$$

Уравнения (10) используем для получения соотношений

$$p_{n+r,i} = b_i\, p_{n+r,1} \qquad (\,i = \overline{2,\, l}\,), \tag{11}$$

где числа b_i определяем из системы линейных уравнений, следующей из (10),

$$\mu_i \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(1)} b_j + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji} \sum_{k=2}^{l} a_{kj}^{(0)}\, b_k - (\lambda_i + \nu_i) \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(0)} b_j = \\ = (\lambda_i + \nu_i) a_{1i}^{(0)} - \mu_i a_{1i}^{(1)} - \sum_{\substack{j=2\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji}\, a_{1j}^{(0)} \qquad (\,i = \overline{1,\, l-1}\,). \tag{12}$$

Подставляя правые части соотношений (11) в формулы (9), находим

$$p_{ki} = \Bigl(a_{1i}^{(k)} + \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(k)}\, b_j\Bigr) p_{n+r,1} \qquad (\,k = \overline{0,\, n+r-1};\;\; i = \overline{1,\, l}\,). \tag{13}$$

Стационарную вероятность $p_{n+r,1}$ определяем из условия нормировки (5), подстановка в которое правых частей равенств (13) даёт

$$p_{n+r,1} = \left(1 + \sum_{i=2}^{l} b_i + \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{n+r-1} \Bigl(a_{1i}^{(k)} + \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(k)}\, b_j\Bigr)\right)^{-1}. \tag{14}$$

Таким образом, использование рекуррентных соотношений (6)–(8), решений системы (12) и формул (11), (13), (14) позволяет вычислить все стационарные вероятности p_{ki} $(\,k = \overline{0,\, n+r};$ $i = \overline{1,\, l}\,)$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

Вероятность потери заявки π в стационарном режиме функционирования СМО определим как долю времени на большом промежутке времени, в течение которого система недоступна для приёма заявок

$$\pi = \sum_{i=1}^{l} p_{n+r,i}.$$

Введём обозначения: λ, λ_A, λ_D, λ_L — соответственно интенсивности потока заявок, поступающего на систему, принятого в систему, обслуженного системой и потерянного на входе системы; P_i — стационарная вероятность (среднее относительное время) пребывания системы в i-ом режиме; μ — интенсивность обслуживания.

В стационарном режиме имеют место равенства:

$$P_i = \sum_{k=0}^{n+r} p_{ki} \quad (\, i = \overline{1,\, l}\,); \qquad \lambda = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i P_i;$$
$$\lambda_A = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \sum_{k=0}^{n+r-1} p_{ki} = \lambda - \lambda_L = \lambda - \lambda\,\pi = \lambda(1-\pi);$$
$$\mu = \sum_{i=1}^{l} \mu_i \sum_{k=1}^{n+r} p_{ki}; \qquad \lambda_D = \mu\left(1 - \sum_{i=1}^{l} p_{0i}\right) = \mu \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{n+r} p_{ki}.$$

Учитывая, что $\lambda_A = \lambda_D$, отсюда получаем уравнение баланса

$$\lambda(1-\pi) = \mu \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{n+r} p_{ki},$$

отражающее равенство интенсивностей принятого в систему и обслуженного ей потоков заявок, которое можно использовать для контроля расчётов стационарного распределения вероятностей состояний системы, осуществляемых с помощью полученного выше алгоритма.

С помощью стационарных вероятностей p_{ki} можно вычислить стационарные значения среднего числа заявок в системе

$$N = \sum_{k=1}^{n+r} \sum_{i=1}^{l} k p_{ki},$$

среднюю длину очереди

$$Q = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{i=1 \\ (i:\, n_i+k \le n+r)}}^{l} k p_{n_i+k,i}$$

и полученное по формуле Литтла среднее время ожидания в очереди

$$w = Q/\lambda_A.$$

5. УПРОЩЁННАЯ МОДЕЛЬ

В модель, рассмотренную выше, внесём изменения, которые позволят получить решение СУР в явном виде.

Предположим, что $n_1 = n$, где n — конкретно заданное натуральное число и

$$\sigma_{j1} = 0 \quad (\, j = \overline{2,\, l}\,); \qquad \sigma_{ji} = 0 \quad (\, i,\, j = \overline{2,\, l};\;\; i \neq j\,). \tag{15}$$

Уточняя условия (15), допустим, что переходы из других режимов в первый режим возможны только в момент перехода процесса через состояние простоя $(\,0,\,1\,)$ по цепочке

$$(\,1,\, i\,) \xrightarrow{\mu_i} (\,0,\, 1\,) \xrightarrow{\lambda_1} (\,1,\, 1\,),$$

а прямые переключения между режимами с номерами $i = \overline{2,\, l}$ невозможны. Итак, задаются положительные вероятности $\sigma_{1j} > 0 \;\; (\, j = \overline{2,\, l}\,)$, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{j=2}^{l} \sigma_{1j} = 1.$$

Длительность первого режима показательно распределена с параметром ν_1. Поэтому интенсивность простейшего потока, переводящего систему из первого режима в j-ый определяется в виде $\nu_{1j} = \sigma_{1j}\nu_1 \;\; (\, j = \overline{2,\, l}\,)$, причём выполняется равенство

$$\sum_{j=2}^{l} \nu_{1j} = \nu_1,$$

следующее из условия нормировки. Простою системы соответствует лишь одно состояние $(\,0,\,1\,)$, в котором процесс $\{\,\xi(t),\;\, t \geq 0\,\}$ находится также в начальный момент времени.

Конечное множество состояний марковского процесса $\{\,\xi(t),\;\, t \geq 0\,\}$, кроме состояния $(\,0,\,1\,)$, включает состояния $(\,k,\, i\,)$ $(\,k = \overline{1,\, n+r};\;\; i = \overline{1,\, l}\,)$. Как и в предыдущей модели, марковский процесс $\{\,\xi(t),\;\, t \geq 0\,\}$ является неприводимым и, значит, эргодическим с единственным стационарным распределением p_{01}, p_{ki} $(\,k = \overline{1,\, n+r};\;\; i = \overline{1,\, l}\,)$.

Для определения стационарных вероятностей получаем следующую СУР

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{l} \mu_i\, p_{1i} - \lambda_1\, p_{01} = 0; \\ \lambda_1 p_{k-1,1} + (k+1)\mu_1 p_{k+1,1} - (\lambda_1 + k\mu_1 + \nu_1) p_{k1} = 0 \qquad (\, k = \overline{1,\, n-1}\,); \end{gathered} \tag{16}$$

$$\lambda_1 p_{k-1,1} + n\mu_1 p_{k+1,1} - (\lambda_1 + n\mu_1 + \nu_1) p_{k1} = 0 \qquad (\, k = \overline{n,\, n+r-1}\,); \tag{17}$$

$$\lambda_1 p_{n+r-1,1} - (n\mu_1 + \nu_1) p_{n+r,1} = 0; \tag{18}$$

$$\nu_{1i} p_{11} + 2\mu_i p_{2i} - (\lambda_i + \mu_i) p_{1i} = 0 \qquad (\, i = \overline{2,\, l}\,); \tag{19}$$

$$\lambda_i p_{k-1,i} + \nu_{1i} p_{k1} + (k+1)\mu_i p_{k+1,i} - (\lambda_i + k\mu_i) p_{ki} = 0 \qquad (\, k = \overline{2,\, n_i - 1};\;\; i = \overline{2,\, l}\,); \tag{20}$$

$$\lambda_i p_{k-1,i} + \nu_{1i} p_{k1} + n_i \mu_i p_{k+1,i} - (\lambda_i + n_i \mu_i) p_{ki} = 0 \qquad (\, k = \overline{n_i,\, n+r-1};\;\; i = \overline{2,\, l}\,); \tag{21}$$

$$\lambda_i p_{n+r-1,i} + \nu_{1i} p_{n+r,1} - n_i \mu_i p_{n+r,i} = 0 \qquad (\, i = \overline{2,\, l}\,); \tag{22}$$

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{n+r} \sum_{i=1}^{l} p_{ki} = 1. \tag{23}$$

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ УПРОЩЁННОЙ МОДЕЛИ

Решение СУР (16)–(23) осуществляем в такой последовательности. Сначала с помощью уравнений (17), (18) выражаем p_{k1} $(k = \overline{n-1,\, n+r-1})$ через $p_{n+r,1}$. Затем, используя уравнения (16), выражаем p_{k1} $(k = \overline{0,\, n-2})$ через p_{k1} $(k = \overline{n-1,\, n+r-1})$, а, значит, и через $p_{n+r,1}$. Далее, с помощью уравнеий (19)–(22), выражаем p_{ki} $(k = \overline{1,\, n+r};\ \ i = \overline{2,\, l})$ через p_{s1} $(s = \overline{1,\, n+r})$, а, значит, и через $p_{n+r,1}$, и, наконец, находим $p_{n+r,1}$ из условия нормировки (23).

Ниже, кроме параметров β_i, δ_i δ_{ji}, введённых в п. 3, будем использовать следующие обозначения:

$$\omega_n = 1 + n\beta_1 + \delta_1; \quad \gamma_{1i} = \nu_{1i}/\mu_i; \quad \tilde{p}_{ki} = p_{n+r,1}/p_{ki} \quad (k = \overline{0,\, n+r};\ \ i = \overline{1,\, l});$$
$$S_{kj} = \sum_{s=k}^{j} p_{s1}; \qquad \tilde{S}_{kj} = \sum_{s=k}^{j} \tilde{p}_{s1}.$$

Из уравнений (18) и (17) последовательно получаем

$$\tilde{p}_{n+r-1,1} = n\beta_1 + \delta_1 = \omega_n - 1 = \sum_{s=0}^{\frac{0}{2}} (-1)^s \left(\frac{(1-s)!}{(1-2s)!}\omega_n - \frac{(0-s)!}{(0-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{0-2s}; \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{n+r-2,1} &= \omega_n \tilde{p}_{n+r-1,1} - n\beta_1 = (\omega_n - 1)\omega_n - n\beta_1 = \\ &= \sum_{s=0}^{\frac{1-1}{2}} (-1)^s \left(\frac{(2-s)!}{(2-2s)!}\omega_n - \frac{(1-s)!}{(1-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{1-2s} + (-n\beta_1)^{\frac{2}{2}}; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\tilde{p}_{n+r-k,1} = \omega_n \tilde{p}_{n+r-k+1,1} - n\beta_1 \tilde{p}_{n+r-k+2,1} \qquad (k = \overline{1,\, r+1}).$$

Теорема. *Если k — нечётное число, то*

$$\tilde{p}_{n+r-k,1} = \sum_{s=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-s)!}{(k-2s)!}\omega_n - \frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s} \quad (k = \overline{1,\, r+1}). \tag{26}$$

Если же k — чётное, то

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{n+r-k,1} = \sum_{s=0}^{\frac{k-2}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-s)!}{(k-2s)!}\omega_n - \frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s} + \\ + (-n\beta_1)^{\frac{k}{2}} \qquad (k = \overline{2,\, r+1}). \end{aligned} \tag{27}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Для $k = 1$ и $k = 2$ справедливость равенств (26) и (27) следует из соотношений (24) и (25) соответственно.

Предполагая, что k — нечётное число и равенство (27) выполняется для $\tilde{p}_{n+r-(k-1),1}$, а соотношение (26) — для $\tilde{p}_{n+r-(k-2),1}$, докажем равенство (26) для произвольного нечётного k $(3 \le k \le r+1)$.

Имеем

$$\tilde{p}_{n+r-k,1} = \omega_n \tilde{p}_{n+r-k+1,1} - n\beta_1 \tilde{p}_{n+r-k+2,1} =$$
$$= \sum_{s=0}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!}\omega_n - \frac{(k-2-s)!}{(k-2-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s} + \omega_n (-n\beta_1)^{\frac{k-1}{2}} +$$
$$+ \sum_{s=0}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^{s+1} \left(\frac{(k-2-s)!}{(k-2-2s)!}\omega_n - \frac{(k-3-s)!}{(k-3-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^{s+1}}{s!} \omega_n^{k-3-2s}.$$

После несложных преобразований отсюда находим

$$\tilde{p}_{n+r-k,1} = (\omega_n - 1)\omega_n^{k-1} + \sum_{s=1}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!}\omega_n - \frac{(k-2-s)!}{(k-2-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s} +$$
$$+ \omega_n (-n\beta_1)^{\frac{k-1}{2}} + \sum_{s=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-1-s)!}{(k-2s)!}\omega_n - \frac{(k-2-s)!}{(k-1-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{(s-1)!} \omega_n^{k-1-2s}. \quad (28)$$

Учитывая, что выполняется равенство

$$\frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!s!} + \frac{(k-1-s)!}{(k-2s)!(s-1)!} = \frac{(k-s)!}{(k-2s)!s!}, \quad (29)$$

а также соотношение, получаемое из (29) после замены k на $k-1$, из (28) далее получим

$$\tilde{p}_{n+r-k,1} = \sum_{s=0}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-s)!}{(k-2s)!}\omega_n - \frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s} +$$
$$+ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{1!}\omega_n - \frac{\left(\frac{k-1}{2}-1\right)!}{0!} \right) \frac{(n\beta_1)^{\frac{k-1}{2}}}{\left(\frac{k-1}{2}-1\right)!} \omega_n^0 + \omega_n (-n\beta_1)^{\frac{k-1}{2}} =$$
$$= \sum_{s=0}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-s)!}{(k-2s)!}\omega_n - \frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s} +$$
$$+ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\left(\frac{k-1}{2}+1\right)!}{1!}\omega_n - \frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}{0!} \right) \frac{(n\beta_1)^{\frac{k-1}{2}}}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!} \omega_n^0 =$$
$$= \sum_{s=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-s)!}{(k-2s)!}\omega_n - \frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s}.$$

Итак, соотношения (26) доказаны.

Пусть теперь k — чётное число. Тогда, предположив, что равенство (27) выполняется для $\tilde{p}_{n+r-(k-2),1}$, и пользуясь уже доказанным соотношением (26) для $\tilde{p}_{n+r-(k-1),1}$, находим

$$\tilde{p}_{n+r-k,1} = \omega_n \tilde{p}_{n+r-k+1,1} - n\beta_1 \tilde{p}_{n+r-k+2,1} =$$
$$= \sum_{s=0}^{\frac{k-2}{2}} (-1)^s \left(\frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!}\omega_n - \frac{(k-2-s)!}{(k-2-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^s}{s!} \omega_n^{k-1-2s} +$$
$$+ \sum_{s=0}^{\frac{k-4}{2}} (-1)^{s+1} \left(\frac{(k-2-s)!}{(k-2-2s)!}\omega_n - \frac{(k-3-s)!}{(k-3-2s)!} \right) \frac{(n\beta_1)^{s+1}}{s!} \omega_n^{k-1-2(2s+1)} + (-n\beta_1)^{\frac{k}{2}}.$$

Отсюда имеем

$$\tilde{p}_{n+r-k,1} = (\omega_n - 1)\omega_n^{k-1} + \sum_{s=1}^{\frac{k-2}{2}}(-1)^s\left(\frac{(k-1-s)!}{(k-1-2s)!}\omega_n - \frac{(k-2-s)!}{(k-2-2s)!}\right)\frac{(n\beta_1)^s}{s!}\omega_n^{k-1-2s} + \\ + (-n\beta_1)^{\frac{k}{2}} + \sum_{s=1}^{\frac{k-2}{2}}(-1)^s\left(\frac{(k-1-s)!}{(k-2s)!}\omega_n - \frac{(k-2-s)!}{(k-1-2s)!}\right)\frac{(n\beta_1)^s}{(s-1)!}\omega_n^{k-1-2s}. \tag{30}$$

Снова учитывая равенство (29) и получаемое из него при замене k на $k-1$, из (30) аналогично, как в случае нечётного k, получим соотношение (27). Итак, равенства (27) доказаны. Тем самым теорема доказана.

Перепишем формулы (26), (27) в более удобном для вычислений виде. Итак, если $n+r-k$ — нечётное число, то

$$\tilde{p}_{k1} = \sum_{s=0}^{\frac{n+r-k-1}{2}}(-1)^s\left(\frac{(n+r-k-s)!}{(n+r-k-2s)!}\omega_n - \frac{(n+r-k-1-s)!}{(n+r-k-1-2s)!}\right)\frac{(n\beta_1)^s}{s!}\omega_n^{n+r-k-1-2s} \\ (\,k = \overline{n-1,\, n+r-1}\,); \tag{31}$$

если же $n+r-k$ — чётное, то

$$\tilde{p}_{k1} = \sum_{s=0}^{\frac{n+r-k-2}{2}}(-1)^s\left(\frac{(n+r-k-s)!}{(n+r-k-2s)!}\omega_n - \frac{(n+r-k-1-s)!}{(n+r-k-1-2s)!}\right)\frac{(n\beta_1)^s}{s!}\omega_n^{n+r-k-1-2s} + \\ + (-n\beta_1)^{\frac{n+r-k}{2}} \qquad (\,k = \overline{n-1,\, n+r-1}\,). \tag{32}$$

Таким образом, нами получены соотношения

$$p_{k1} = \tilde{p}_{k1}p_{n+r,1} \qquad (\,k = \overline{n-1,\, n+r-1}\,), \tag{33}$$

выражающие в явном виде p_{k1} $(\,k = \overline{n-1,\, n+r-1}\,)$ через $p_{n+r,1}$.

Если $n_1 = n = 1$, то формулы (33) дают возможность выразить все вероятности p_{k1} $(\,k = \overline{0,\, r}\,)$, соответствующие первому режиму, через $p_{r+1,1}$. Для $n \geq 2$, используя уравнения (16) (кроме первого), p_{k1} $(\,k = \overline{0,\, n-2}\,)$ определяем с помощью рекуррентных соотношений

$$\tilde{p}_{k1} = \omega_{k+1}\tilde{p}_{k+1,1} - (k+2)\beta_1\tilde{p}_{k+2,1} \qquad (\,k = \overline{0,\, n-2}\,), \tag{34}$$

$$p_{k1} = \tilde{p}_{k1}p_{n+r,1} \qquad (\,k = \overline{0,\, n-2}\,); \tag{35}$$

Формулами (34) слудет пользоваться в обратном порядке, начиная с $k = n-2$ и заканчивая значением $k = 0$. Для каждого конкретного $n \geq 2$ соотношения (35) могут быть получены в явном виде.

Например, если $n = 2$, то

$$p_{k1} = \tilde{p}_{k1}p_{2+r,1} \qquad (\,k = \overline{1,\, 1+r}\,),$$

где $\tilde{p}_{k1}$ определяем по формулам (31), (32), подставив в них $n = 2$, а из (34) и (35) находим

$$\tilde{p}_{01} = \omega_1\tilde{p}_{11} - 2\beta_1\tilde{p}_{21}; \qquad p_{01} = \tilde{p}_{01}p_{2+r,1}.$$

Следующая наша цель — получение соотношений для p_{ki} $(k = \overline{1,\, n+r};$ $i = \overline{2,\, l}\,)$ вида

$$p_{ki} = \tilde{p}_{ki} p_{n+r,1} \qquad (\, k = \overline{1,\, n+r};\;\; i = \overline{2,\, l}\,). \tag{36}$$

Для каждого $i = \overline{2,\, l}$ просуммируем уравнения (19)–(22) по $k = \overline{1,\, n+r}$ и запишем полученные соотношения; затем просуммируем уравнения (20)–(22) по $k = \overline{2,\, n+r}$; затем — по $k = \overline{3,\, n+r}$ и так далее, заканчивая одним уравнением (22). Результатом таких преобразований является система рекуррентных соотношений, справедливая для всех $i = \overline{2,\, l}$:

$$\mu_i p_{1i} = \nu_{1i} S_{1,n+r}; \tag{37}$$

$$k\mu_i p_{ki} - \lambda_i p_{k-1,i} = \nu_{1i} S_{k,n+r} \qquad (\, k = \overline{2,\, n_i}\,); \tag{38}$$

$$n_i\mu_i p_{ki} - \lambda_i p_{k-1,i} = \nu_{1i} S_{k,n+r} \qquad (\, k = \overline{n_i+1,\, n+r}\,). \tag{39}$$

Последовательно используя соотношения (37) и (38), для всех $i = \overline{2,\, l}$ получаем

$$\begin{aligned}
&p_{1i} = \gamma_{1i} S_{1,n+r}; \quad p_{2i} = \frac{1}{2\beta_i} p_{1i} + \frac{\gamma_{1i}}{2} S_{2,n+r} = \frac{\gamma_{1i}}{2!}\bigl(0!\beta_i^{-1} S_{1,n+r} + 1!\beta_i^0 S_{2,n+r}\bigr);\\
&p_{3i} = \frac{1}{3\beta_i} p_{2i} + \frac{\gamma_{1i}}{3} S_{3,n+r} = \frac{\gamma_{1i}}{3!}\bigl(0!\beta_i^{-2} S_{1,n+r} + 1!\beta_i^{-1} S_{2,n+r} + 2!\beta_i^0 S_{3,n+r}\bigr);\\
&p_{ki} = \frac{1}{k\beta_i} p_{k-1,i} + \frac{\gamma_{1i}}{k} S_{k,n+r} = \frac{\gamma_{1i}}{k!}\bigl(0!\beta_i^{1-k} S_{1,n+r} + 1!\beta_i^{2-k} S_{2,n+r} + \cdots + (k-1)!\beta_i^0 S_{k,n+r}\bigr) =\\
&\qquad\qquad = \frac{\gamma_{1i}}{k!}\sum_{j=0}^{k-1} j!\beta_i^{j+1-k} S_{j+1,n+r} \qquad (\, k = \overline{1,\, n_i}\,).
\end{aligned}$$

После замены порядка суммирования окончательно имеем

$$p_{ki} = \frac{\gamma_{1i}}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(k-1-j)!\beta_i^{-j} S_{k-j,n+r} \qquad (\, k = \overline{1,\, n_i};\;\; i = \overline{2,\, l}\,). \tag{40}$$

Учитывая, что

$$p_{n_i,i} = \frac{\gamma_{1i}}{n_i!}\bigl(0!\beta_i^{1-n_i} S_{1,n+r} + 1!\beta_i^{2-n_i} S_{2,n+r} + \cdots + (n_i-1)!\beta_i^0 S_{n_i,n+r}\bigr),$$

из (39) последовательно находим

$$\begin{aligned}
p_{n_i+1,i} &= \frac{1}{n_i\beta_i} p_{n_i i} + \frac{\gamma_{1i}}{n_i} S_{n_i+1,n+r} =\\
&= \frac{\gamma_{1i}}{n_i! n_i}\bigl(0!\beta_i^{-n_i} S_{1,n+r} + 1!\beta_i^{1-n_i} S_{2,n+r} + \cdots + n_i! n_i^0 \beta_i^0 S_{n_i+1,n+r}\bigr);\\
p_{n_i+2,i} &= \frac{1}{n_i\beta_i} p_{n_i+1,i} + \frac{\gamma_{1i}}{n_i} S_{n_i+2,n+r} =\\
&= \frac{\gamma_{1i}}{n_i! n_i^2}\bigl(0!\beta_i^{-n_i-1} S_{1,n+r} + 1!\beta_i^{-n_i} S_{2,n+r} + \cdots + n_i! n_i^0 \beta_i^{-1} S_{n_i+1,n+r} + n_i! n_i \beta_i^0 S_{n_i+2,n+r}\bigr).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
p_{ki} = \frac{\gamma_{1i}}{n_i! n_i^{k-n_i}} \Bigg(& \sum_{j=0}^{k-n_i-1} n_i! n_i^{k-j-n_i-1} \beta_i^{-j} S_{k-j,n+r} + \\
& + \sum_{j=k-n_i}^{k-1} (k-1-j)! \beta_i^{-j} S_{k-j,n+r} \Bigg) \qquad (k = \overline{n_i+1,\, n+r};\;\; i = \overline{2,\, l}\,).
\end{aligned} \tag{41}
$$

Если для конкретного n известен явный вид соотношений (35), то после выделения в суммах $S_{k,n+r}$ слагаемого $p_{n+r,1}$ из (40) и (41) получим явные выражения $\tilde{p}_{ki}$ для формул (36)

$$
\tilde{p}_{ki} = \frac{\gamma_{1i}}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (k-1-j)! \beta_i^{-j} \big(1 + \tilde{S}_{k-j,n+r-1}\big) \qquad (k = \overline{1,\, n_i};\;\; i = \overline{2,\, l}\,);
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_{ki} = \frac{\gamma_{1i}}{n_i! n_i^{k-n_i}} \Bigg(& \sum_{j=0}^{k-n_i-1} n_i! n_i^{k-j-n_i-1} \beta_i^{-j} + \\
& + \sum_{j=k-n_i}^{k-1} (k-1-j)! \beta_i^{-j} \Bigg) \big(1 + \tilde{S}_{k-j,n+r-1}\big) \qquad (k = \overline{n_i+1,\, n+r-1};\;\; i = \overline{2,\, l}\,);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_{n+r,i} = \frac{\gamma_{1i}}{n_i! n_i^{n+r-n_i}} \Bigg(\Bigg(& \sum_{j=1}^{n+r-n_i-1} n_i! n_i^{n+r-j-n_i-1} \beta_i^{-j} + \\
& + \sum_{j=n+r-n_i}^{n+r-1} (n+r-1-j)! \beta_i^{-j} \Bigg) \big(1 + \tilde{S}_{n+r-j,n+r-1}\big) + n_i! n_i^{n+r-n_i-1} \Bigg) \qquad (i = \overline{2,\, l}\,).
\end{aligned}
$$

Вероятность $p_{n+r,1}$ определяем из условия нормировки (23), подстановка в которое правых частей равенств (33), (35) и (36) даёт

$$
p_{n+r,1} = \left(1 + \tilde{p}_{01} + \sum_{k=1}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{l} \tilde{p}_{ki} + \sum_{i=2}^{l} \tilde{p}_{n+r,i}\right)^{-1}.
$$

Итак, стационарные вероятности p_{ki} найдены в явном виде. Стационарные характеристики СМО можно вычислить по формулам, приведённым в п. 4, если в них положить $p_{0i} = 0$ $(i = \overline{2,\, l}\,)$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена СМО M/M/n/r со случайными во времени одновременными изменениями параметра входящего потока заявок, интенсивности обслуживания и числа задействованных линий. Длительности режимов показательно распределены. Основными результатами работы являются: 1) алгоритм в виде рекуррентных формул для вычисления стационарных вероятностей состояний системы; 2) явные формулы для стационарного распределения вероятностей СМО, соответствующей упрощённой модели. Упрощения состоят в выделении основоного режима, в котором число задействованных линий конкретно задано, непосредственные переходы между остальными $(i = \overline{2,\, l}\,)$ режимами невозможны, а переходы из этих режимов в основной могут осуществляться только через состояние простоя системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eisen M., Tainiter M. Stochastic variations in queueing processes. *Operations Research*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 922–927.

2. Yechiali U., Naor P. Queuing problems with heterogeneous arrivals and service. *Operations Research*, 1971, vol. 19, no. 3, pp. 722–734.

3. Purdue P. The M/M/1 queue in a markovian environment. *Operations Research*, 1974, vol. 22, no. 3, pp. 562–569.

4. Neuts M. F. The M/M/1 queue with randomly varying arrival and service rates. *Opsearch*, 1978, vol. 15, pp. 139–157.

5. Таташев А. Г. Система массового обслуживания с переменной интенсивностью входного потока. *Автоматика и телемеханика*, 1995, № 12, стр. 78–84.

6. Башарин Г. П., Кокотушкин В. А., Наумов В. А. *Метод эквивалентных замен в теории телетрафика.* Т. 2. М.: Электросвязь, 1980.

7. Горцев А. М., Назаров А. А., Трепугов А. Ф. *Управление и адаптация в системах массового обслуживания.* Томск.: Изд-во Томского ун-та, 1978.

8. Дудин А. Н., Клименок В. И. Расчёт характеристик однолинейной системы обслуживания, функционирующей в синхронной случайной среде. *Автоматика и телемеханика*, 1997, № 1, стр. 74–84.

9. Cordelio J. D. *Unreliable Retrial Queues in a Random Environment.* Dissertation, Ohio: Air Force Institute of Technology, 2007.

10. Бочаров П. П., Печинкин А. В. *Теория массового обслуживания.* М.: Изд-во РУДН, 1995.