Информационные процессы, Том 9, № 4, 2009, стр. 364–367.

О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ В СИСТЕМЕ M/G/1—EPS

С.Ф.Яшков

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН
127994, Москва, ГСП–4, Б.Каретный пер., д.19.
E-mail:yashkov@iitp.ru

Получена 21.12.2009

Аннотация—В дополнение к существующим, выводится еще одна формула для нестационарного распределения числа требований в системе M/G/1 с эгалитарным разделением процессора.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1,2] решена проблема нахождения нестационарного распределения числа требований $L(t)$ в момент t в системе M/G/1 с эгалитарным разделением процессора (EPS). (При дисциплине EPS каждое из $n > 0$ требований, содержащихся в системе, обслуживается с (переменной) скоростью $1/n$.) До появления [1,2] эта задача считалась не поддающейся аналитическому решению, к которому удалось прийти только благодаря развитию метода "разложения на элементы задержки", введенного в [3]. При нулевом начальном условии решение имеет удивительно простой вид

$$g_0(z,s) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathsf{E}\left[z^{L(t)}\,|\,L(0)=0\right]\,dt = \frac{1}{s+\lambda(1-z)(1-\pi(s))}, \quad \mathrm{Re}\, s>0,\ |z|\geq 1. \tag{1.1}$$

Здесь $g_0(z,s)$ есть преобразование Лапласа по t (аргумент s) производящей функции (с аргументом z) числа требований $L(t)$ в момент t, $t\in[0,\infty)$, а $\pi(s)$ — минимальное положительное решение функционального уравнения Кендалла–Такача для преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) распределения периода занятости [4]

$$\pi(s) = \beta(s+\lambda-\lambda\pi(s)). \tag{1.2}$$

(В (1.2) $\beta(s)$ есть ПЛС распределения времени обслуживания, а λ – интенсивность входящего потока, см. начало следующего раздела.)

Позднее для вывода (1.1) (среди прочих результатов) в [5,6] был использован другой (более традиционный) метод введения дополнительных переменных. Дополнительными переменными служили достигнутые длительности обслуживания (возраст) каждого из $L(t) > 0$ требований, присутствующих в системе. В частности, в [5] приведено доказательство одного из основных результатов (формула (3.30)). (В качестве следствия этой формулы можно получить равенство (1.1).) Такие же дополнительные переменные использовались также в [7], в которой рассматривался нестационарный режим усложненной системы M/G/1—EPS с дополнительным пуассоновским процессом катастроф (см. также по этому поводу [6]). Однако более простой способ получения нестационарного распределения числа требований заключается в использовании дополнительных переменных, имеющих смысл остаточной длительности обслуживания каждого из $L(t) > 0$ требований (ср. с [2,3,8], а также с книгой [9]). Этому вопросу (применительно к системе M/G/1—EPS) и посвящена данная статья.

2. РЕЗУЛЬТАТ И ЕГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим систему обслуживания M/G/1 с дисциплиной эгалитарного разделения процессора (EPS), при которой каждое из $n > 0$ из присутствующих в системе требований обслуживается одновременно с другими со скоростью $1/n$. В моменты поступлений новых требований или ухода из системы полностью обслуженных требований происходят скачки скорости обслуживания. На вход системы поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ, требуемые длительности обслуживания (длины) распределены произвольно с функцией распределения $B(x)$ $((B(0+) = 0,\ B(\infty) = 1)$. Математическое ожидание этой функции распределения есть $\beta_1 < \infty$, а ПЛС имеет вид $\beta(s) = \int_{0-}^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}\, dB(x)$.

Пусть $R_i(t)$ при $1 \le i \le L(t)$ есть остаточное время обслуживания i-го из $L(t) \ge 1$ требований системы EPS в момент t. Тогда $X_0(t) = \{L(t), R_i(t),\ i = 1, \dots, L(t);\ t \ge 0\}$ будет кусочно-линейным марковским процессом с дискретным вмешательством случая. Пространство состояний процесса $X_0(t)$ состоит из множеств $\{\varnothing\}$,$\{x_1\}$,$\{x_1, x_2\}$ и т.д. Здесь $x_i \ge 0, 1 \le i \le n$, $n = 1, 2, \dots$. Нумерация требований предполагается случайной. Также дополнительно предполагается для простоты, что случайный вектор $\big(R_1(t), R_2(t), \dots, R_{L(t)}(t)\big)$ является абсолютно непрерывным. (Это означает, в частности, что функция распределения $B(\cdot)$ имеет плотность $\beta(\cdot)$.) При $L(t) = 0$ дополнительные переменные, естественно, отсутствуют.

Процесс $X_0(t)$ характеризуется функциями

$$P_n(t; x_1, \dots, x_n) dx_1\, dx_2 \dots, dx_n = \mathsf{P}\{L(t) = n;\ R_i(t) \in [x_i, x_i + dx_i), i = 1, 2, \dots, n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и $P_n(t) = \mathsf{P}\{L(t) = n\}$, $\quad n = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что

$$P_n(t) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_n(t; x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n.$$

Введем обозначение $p_n(s; x_1, \dots, x_n)$ для преобразования Лапласа (ПЛ) по t функции $P_n(t; x_1, \dots, x_n)$. Положим также $P_{00}(t) = \mathsf{P}\{L(t) = 0 | L(0) = 0\}$, а ПЛ по t этой функции будем обозначать в дальнейшем через $\tilde{p}_{00}(s)$.

Справедлива

Теорема 2.1. *При нулевом начальном условии ПЛ* $p_n(s; x_1, \dots, x_n)$ *имеет вид*

$$p_n(s; x_1, \dots, x_n) = \tilde{p}_{00}(s)(s + \lambda)^n \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{s + \lambda} B(x_i)\right), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{2.1}$$

Доказательство. В $[3, 2]$ выведена система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, описывающих эволюцию процесса $X_0(t)$ (при нулевых начальных условиях). Функция $P_n(t; x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет этой системе уравнений

$$\frac{\partial P_1(t; x)}{\partial t} - \frac{\partial P_1(t; x)}{\partial x} + \lambda[P_1(t; x) - P_{00}(t)\beta(x)] - \frac{1}{2}[P_2(t; 0, x) + P_2(t; x, 0)] = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial P_n(t;x_1,\ldots,x_n)}{\partial t}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_n(t;x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}+\lambda P_n(t;x_1,\ldots,x_n)-$$

$$-\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}P_{n-1}(t;x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\beta(x_i)-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}P_{n+1}(t;x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n)=0. \tag{2.3}$$

(В последнем уравнении $n = 2, 3, \ldots$.)

Опущенные детали вывода этой системы уравнений содержатся в [3, 2]. Однако в указанных работах уравнения решаются только для стационарного случая, а нестационарный режим изучается с помощью случайной замены времени – специального преобразования исследуемого случайного процесса, см. [2, 5]. (Именно случайная замена времени дала возможность впервые получить (1.1).) Далее мы действуем, в сущности, также как в [5, 6, 8] с очевидными отличиями (где это необходимо), обусловленными различным видом дополнительных переменных. Переписывая равенства (2.2), (2.3) в терминах ПЛ по t, приходим к уравнениям

$$-\frac{\partial p_1(s;x)}{\partial x}+(s+\lambda)p_1(s;x)-\lambda\tilde{p}_{00}(s)\beta(x)-\frac{1}{2}[p_2(s;0,x)+p_2(s;x,0]=0, \tag{2.4}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_n(s;x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}+(s+\lambda)p_n(s;x_1,\ldots,x_n)-$$

$$-\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}p_{n-1}(s;x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\beta(x_i)-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}p_{n+1}(s;x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n)=0. \tag{2.5}$$

Функция

$$p_n(s;x_1,\ldots,x_n)=C(s)(s+\lambda)^n\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda}{s+\lambda}B(x_i)\right),\quad n=1,2,\ldots. \tag{2.6}$$

удовлетворяет системе уравнений (2.4), (2.5) и является ее решением (мы не занимались обоснованием единственности решения). Подставляя (2.6) в (2.4) и принимая во внимание, что $\tilde{p}_{00}(s) = (s+\lambda-\lambda\pi(s))^{-1}$ (см., например, [2]) (здесь $\pi(s)$ есть минимальное положительное решение известного функционального уравнения Кендалла–Такача — см. (1.2)— для распределения периода занятости в системе M/G/1 с любой консервативной дисциплиной) получаем утверждение (2.1) теоремы 2.1.

□

Замечание 2.1. Преобразование Лапласа $\tilde{p}_{00}(s)$ вероятности нахождения системы в свободном от требований состоянии является решением функционального уравнения

$$\tilde{p}_{00}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathsf{P}_{00}(t)\,dt=\frac{1}{s+\lambda-\lambda\beta(1/\tilde{p}_{00}(s))}, \tag{2.7}$$

см. [5, Corollary 3.2]. Это уравнение тесно связано с известным функциональным уравнением Кендалла–Такача для периода занятости (1.2) [4].

К равенству (1.1) для нестационарного распределения числа требований $L(t)$ в момент t в системе M/G/1 с эгалитарным разделением процессора, полученному в терминах двойных преобразований, можно, в частности, прийти теперь, используя теорему 2.1 в качестве отправного пункта. Хорошо известные (геометрические) стационарные вероятности состояний системы M/G/1—EPS нетрудно получить при $t\to\infty$ и $\rho<1$ в качестве другого следствия теоремы с помощью классических тауберовых теорем.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом введения дополнительных переменных, имеющих смысл остаточных длительностей обслуживания, выведено выражение для совместной нестационарной плотности вероятности наличия в системе M/G/1—EPS $n > 0$ требований в момент t, остаточные длительности обслуживания которых принадлежат бесконечно малым окрестностям точек $x_1, \ldots, x_n$. Эти результаты дополняют известные из работ $[2, 5, 6, 7, 8]$ формулы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yashkov, S.F., The Non–Stationary Distribution of Numbers of Calls in the M/G/1 Processor-Sharing Queue, *Proc. 3rd Int. Symp. on Systems Analysis and Simulation*, Berlin: Akademie, 1988, vol. 2, reprinted in *Advances in Simulation,* Lukar, P.A. and Schmidt, B., Eds., Berlin: Springer, 1988, vol. 2, pp. 158–162.
2. Yashkov, S.F., *Analiz ocheredei v EVM* (Analysis of Queues in Computers), Moscow: Radio i Svyaz', 1989.
3. Yashkov, S.F., A Derivation of Response Time Distribution for an M/G/1 Processor-Sharing Queue, *Problems of Control and Info. Theory*, 1983, vol. 12, no. 2, pp. 133–148.
4. Takács, L. *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford: Oxford Univ. Press, 1962.
5. Yashkov, S.F. and Yashkova, A.S., Processor Sharing: A Survey of the Mathematical Theory, *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, No. 9, pp. 1662–1731.
6. Yashkov, S.F., A Note on Application of the Method of Supplementary Variables to the Analysis of a Processor Sharing System, *Autom. Remote Control*, 2008, vol. 69, No. 9, pp. 1622–1629.
7. Li, Q.-L. and Lin, C., The M/G/1 Processor Sharing Queue with Disasters, *Computers & Math. with Appl.*, 2006, vol. 51, nos. 6-7, pp. 987–998.
8. Tikhonenko, O.M., Analysis Queueing System with Non-Homogenious Requests and Processor Sharing Discipline, *Izv. Natsion. Akad. Nauk Belarusi, ser. Phys.-Math.*, 2002, no. 3, pp. 105–111.
9. Jaiswal, N.K., *Priority Queues*, New York: Academic, 1968.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И.Венец