Информационные процессы, Том 9, № 4, 2009, стр. 368–375

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

О МЕТОДЕ АНАЛИЗА СИСТЕМЫ M/G/1—EPS И МОМЕНТАХ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ

С.Ф.Яшков

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН
127994, Москва, ГСП–4, Б.Каретный пер., д.19, стр. 1.
E-mail:yashkov@iitp.ru
Получена 23.12.2009

Аннотация—Кратко описывается метод анализа системы с дисциплиной разделения процессора (EPS). Кроме того, выводятся рекуррентные формулы для вычисления моментов распределения случайной величины, описывающей время пребывания требования длины u.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Современная телекоммуникационная сеть – объект высокой сложности, теория построения которого находится на стадии становления. Системы обслуживания с разделением процессора стали основными моделями функционирования WEB-узлов компьютерных сетей, фактически заменив классическую модель M/G/1 с обслуживанием в порядке поступления FCFS. С математической точки зрения дисциплины разделения процессора на порядок сложнее хорошо изученной в теории очередей стандартной дисциплины FCFS и ее многочисленных вариантов.

Рассмотрим систему обслуживания M/G/1 с дисциплиной эгалитарного разделения процессора (EPS), при которой каждое из $n > 0$ из присутствующих в системе требований обслуживается одновременно с другими со скоростью $1/n$. На вход системы поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ, требуемые длительности обслуживания (длины) распределены произвольно с функцией распределения $B(x)$ (($B(0+) = 0,\ B(\infty) = 1$). Математическое ожидание этой функции распределения есть $\beta_1 < \infty$, а преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) задается как $\beta(s) = \int_{0-}^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} dB(x)$. Предполагается, что $\rho = \lambda\beta_1 < 1$.

Такая система отображает, в частности, перспективную версию протокола TCP/IP в WEB-узлах компьютерных сетей с коммутацией пакетов. Отметим, что системы обслуживания EPS служат моделями многих реальных информационно–вычислительных систем, общие ресурсы которых используются различными пользователями, задания которых обрабатываются одновременно. В последнее время интерес к этим нетривиальным математическим моделям теории очередей резко возрос, благодаря их многочисленным приложениям к анализу узлов компьютерных сетей, в частности, к исследованию WEB–серверов, обслуживающих пользователей в Интернете (в этом случае скорость обслуживания каждого из них обратно пропорциональна их количеству).

Дисциплина EPS введена Клейнроком [1] (1964) как предельный случай алгоритма диспетчеризации Round–Robin (RR) (круговой доступ) в вычислительных системах с разделением времени при размере кванта времени, стремящемся к нулю. Однако наиболее глубокие и значительные теоретические результаты исследования систем обслуживания EPS, включая решение считавшейся ранее неразрешимой задачи нахождения стационарного распределения времени пребывания требования в системе M/G/1—EPS, удалось получить только через два десятилетия. (См. [2,3], явившиеся толчком для дальнейших исследований.) Построенные затем основы математической теории систем обслуживания с разделением процессора изложены в монографической форме в [4], в которой идеология теории ветвящихся процессов была применена для исследования основных вариантов очередей с разделением процессора. Существуют также исчерпывающие обзоры новых математических методов исследования таких систем обслуживания [5, 6]. Последние несколько лет характеризуются большим количеством публикаций, посвященных различным модификациям системы с дисциплиной EPS.

Поступившее в систему EPS требование сразу начинает обслуживаться (очередь в традиционном ее понимании отсутствует) и обслуживается с переменной скоростью (понимаемой в кинематическом смысле) до тех пор, пока его остаточная длина не станет равной нулю. В процессе обслуживания за бесконечно малый промежуток времени Δ происходит уменьшение остаточной длины каждого из n требований на $\Delta/n + o(\Delta)$. В моменты поступлений новых требований или ухода обслуженных требований происходят скачки скорости обслуживания. Подчеркнем, что время пребывания в системе требования зависит не только от числа требований в процессоре в момент поступления этого требования, но также и от последующих поступлений, достаточно короткие из которых могут обогнать более длинные требования и выйти из системы раньше них. Именно это обстоятельство чрезвычайно усложняет анализ системы обслуживания EPS по сравнению, например, с классической системой обслуживания FCFS или многими другими вариантами дисциплины EPS.

В данной статье описана суть метода анализа системы M/G/1—EPS и получены новые результаты по моментам распределения стационарного времени пребывания $V(u)$ в этой системе требования длины u. (Прямое вычисление моментов было связано с большими вычислительными трудностями.)

2. МЕТОД АНАЛИЗА И МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ $V(u)$

2.1. Метод анализа

В теории очередей широко применяются такие методы исследования точно решаемых моделей как метод вложенных цепей Маркова, метод анализа на циклах занятости, метод введения дополнительных переменных, метод введения дополнительного события (раскраски требований) и т.д, см., например, [7–9]. Одной из основных характеристик системы EPS является распределение (условного) времени пребывания $V(u)$ в системе (помеченного) требования с заданным требуемым временем обслуживания (начальной длиной u). Для нахождения распределения случайной величины $V(u)$ в системе M/G/1—EPS упомянутые выше методы не срабатывали и пришлось ввести специальный метод анализа этой модели, суть которого описывается ниже. (Метод назван методом *декомпозиции на элементы задержки.*) При изучении стационарного времени пребывания некоторого (помеченного) требования предполагается, что оно поступает в систему в нулевой момент времени. Очевидно, что если помеченное требование поступает в пустую систему и нет последующих поступлений за интервал времени $[0, u]$, то $V(u) = u$. Но в общем $V(u) > u$, поскольку помеченное требование должно разделять ресурс процессора с другими требованиями. Обозначим через $\beta(u)$ плотность времени обслуживания, через $v(x|u)$ — плотность условного времени пребывания и через $v(x) = \int_0^x v(x|u)\beta(u)\,du$ — плотность безусловного времени пребывания. Отметим, что $v(x|u)$ имеет вероятностную массу при $x = u$, но $v(x)$ является непрерывной функцией.

Система M/G/1—EPS исследована в [2, 3] с помощью принципиально нового аналитического метода (использующего рассмотрение системы EPS как некоторого специального ветвящегося процесса, преобразованного посредством случайной замены времени). Прототип этого метода введен в [10]. В [3] было получено явное, хотя довольно сложное, выражение для $v(s, u) \triangleq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\, d\mathbb{P}(V(u) \le x)$. Обращение этого ПЛС привело к нахождению искомой плотности $v(x|u)$ в форме некоторого контурного интеграла (см. теорему 2.1), в котором, однако, подынтегральное выражение является нелинейной функцией некоторого другого контурного интеграла. В свою очередь этот другой контурный интеграл вычисляется в терминах другого преобразования Лапласа (ПЛ) от плотности $\beta(x)$ распределения времени обслуживания.

Для получения ПЛС $v(s,u)$ была осуществлена следующая (нетривиальная) декомпозиция случайной величины $V(u)$. Мы пометили некоторое (виртуальное) требование длины u и рассмотрели процесс накопления его достигнутого времени обслуживания. Предполагалось, что это помеченное требование приходит в систему EPS в момент $t = 0$ при условии, что оно встречает в этот момент $L = n \geq 0$ других требований (предков) в системе с остаточными длинами, находящимися в бесконечно малых окрестностях точек $x_1, \ldots, x_n$ (т.е. система EPS находится в состоянии $(n; x_1, \ldots, x_n)$, если $n > 0$ или система пуста, если $n = 0$). При этом условии время пребывания помеченного требования декомпозируется как:

$$V_n(u|(n; x_1, \ldots, x_n)) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i, u) + D(u). \tag{2.1}$$

Здесь $\Phi(x,u)$ есть сумма приращений достигнутого времени обслуживания (возраста) некоторого требования–предка начальной длины x и его прямых потомков (под которыми понимаются новые поступления) за интервал времени, в течение которого остаточная длина другого предка (скажем, помеченного требования) уменьшается на u. Эта случайная величина может также рассматриваться как некоторый марковский функционал соответствующего ветвящегося процесса, описывающий полное время жизни этого процесса (обрывающегося в момент окончания обслуживания помеченного требования). Однако проще интерпретировать случайную величину $\Phi(x,u)$ как длительность некоторого *обрывающегося* (под)периода занятости, открываемого предком с длиной x. Этот (под)период занятости обрывается в момент, когда приращение достигнутого обслуживания помеченного требования достигает уровня u. Вероятностная структура компонент этого подпериода занятости напоминает структуру компонент обычного периода занятости (см. сноску 1) с тем существенным отличием, что каждая последующая компонента зависит от момента обрыва и длины потомка, в связи с чем она “стохастически меньше” предыдущей (в смысле отношения порядка $\stackrel{1}{\leq}$ для функций распределения).

При $u \to \infty$ случайная величина $\Phi(x,u)$ сводится к стандартому периоду занятости $\Pi(x)$ с фиксированной длиной x требования, открывающего этот период занятости.[1]

Случайная величина $\Phi(x,u)$ не зависит от x при $x \geq u$. Для удобства введено специальное обозначение для этого случая в (2.1):

$$D(u) \stackrel{d}{=} \Phi(x,u) \quad \text{for} \quad x \geq u. \tag{2.2}$$

Компоненты стохастического равенства (2.1) (названные *элементами задержки* в [3], это объясняет название метода) не зависят друг от друга. Независимость этих случайных величин есть другой нетривиальный факт, который был элегантно доказан двумя способами: используя равновероятный случайный механизм для выбора прямых потомков помеченного требования из новых поступлений [3, pp.138–139], и используя *случайную замену времени* [4, §2.8].

Для нахождения распределений компонент декомпозиции (2.1), была составлена и решена некоторая система дифференциальных уравнений (с начальными и граничными условиями (о

[1] Если снять условие по x, то мы получим распределение периода занятости Π с ПЛС $\pi(s)$, а это ПЛС есть минимальное положительное решение функционального уравнения Кендалла–Такача

$$\pi(s) = \beta(s + \lambda - \lambda\pi(s)).$$

нетривиальных подходах к выводу этих уравнений см. [2–4, 6]). Пусть $\varphi(s,x,u) \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\Phi(x,u)}]$ и $\delta(s,u) \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sD(u)}]$. Тогда

$$\frac{\partial\varphi(s,x,u)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(s,x,u)}{\partial u} + \left[s + \lambda - \lambda\int_0^\infty \varphi(s,y,u)\,dB(y)\right]\varphi(s,x,u) = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\delta(s,u)}{\partial u} + \left[s + \lambda - \lambda\int_0^\infty \varphi(s,y,u)\,dB(y)\right]\delta(s,u) = 0, \tag{2.4}$$

$$\delta(s,0) = \varphi(s,0,u) = \varphi(s,x,0) = 1. \tag{2.5}$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sV(u)}|(n;x_1,\ldots,x_n)] = \delta(s,u)\prod_{i=1}^n \varphi(s,x_i,u), \quad \mathrm{Re}\ s > 0. \tag{2.6}$$

Отсюда приходим к следующему утверждению (см. теорему 2.1 ниже) после снятия условия по $(n;x_1,\ldots,x_n)$, т.е. после усреднения по стационарной плотности распределения марковского процесса числа требований с остаточными длинами, принадлежащими бесконечно малым окрестностям точек $x_1,\ldots,x_n$ (вид этой плотности приведен, к примеру, в [3, 4]).

Теорема 2.1. *При* $\rho < 1$

$$v(s,u) \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sV(u)}] = (1-\rho)\delta(s,u)\left[1 - \rho\int_0^\infty \varphi(s,x,u)\frac{(1-B(x))}{\beta_1}dx\right]^{-1}, \tag{2.7}$$

где

$$\varphi(s,x,u) = \begin{cases} \delta(s,u) & \text{при } x \geq u, \\ \delta(s,u)/\delta(s,u-x) & \text{при } x < u, \end{cases} \tag{2.8}$$

и

$$\delta(s,u) = \mathrm{e}^{-u(s+\lambda)}/\psi(s,u), \quad u \geq 0 \tag{2.9}$$

есть решения системы уравнений (2.3) *и* (2.4) *(с учетом* (2.5)*). Здесь* $\psi(s,u)$ *есть ПЛС (по* x*) некоторой функции* $\Psi(x,u)$ *двух переменных (обладающей вероятностной плотностью по переменной* x*), которая в свою очередь имеет ПЛ по* u *(аргумент* q*)*

$$\tilde{\psi}(s,q) = \frac{q + s + \lambda\beta(q+s+\lambda)}{(q+s+\lambda)(q+\lambda\beta(q+s+\lambda))} \quad (s \geq 0,\ q > -\lambda\pi(s)). \tag{2.10}$$

Равенство (2.7) является представлением случайной величины $V(u)$ в виде некоторой геометрической случайной суммы. Мы не касаемся различных тонкостей доказательства (все они описаны в цитированных работах). Стоит только подчеркнуть, что функция $\tilde{\psi}(s,q)$ в (2.10) дается в форме двумерного преобразования функции $\Psi(x,u)$)

$$\tilde{\psi}(s,q) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx-qu}d_x\Psi(x,u)du. \tag{2.11}$$

Другими словами, $\psi(s,u)$ есть оператор обращения преобразования Лапласа, а именно, $\psi(s,u) = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{\psi}(s,q))(s,u)$, т.е. контурный интеграл Бромвича

$$\psi(s,u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{+i\infty+0} \tilde{\psi}(s,q)\mathrm{e}^{qu}\ dq.$$

Замечание 2.1. В сущности, мы вывели выражение для $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sV(u)}]$ с помощью представления условного времени пребывания в виде некоторого функционала от ветвящегося процесса (наподобие процессов Крампа–Мода–Ягерса (Crump–Mode–Jagers). Используя структуру этого ветвящегося процесса, мы составили и решили в терминах систему дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, определяющую компоненты декомпозиции $V(u)$. Это привело к $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sV(u)}]$. Ряд опущенных важных деталей можно найти в [4, 6], где стационарные решения были распространены на транзиентные случаи (при любом положительном ρ).

2.2. Другая форма результата и моменты случайной величины $V(u)$

Решение, представленное теоремой 2.1, содержит контурные интегралы Бромвича. Это затрудняет использование результата (2.7) в приложениях. Следующее утверждение дает удобный вид (2.7) без контурных интегралов. Справедливо

Следствие 2.1. *Эквивалентной формой (2.7) (без контурных интегралов Бромвича) является*

$$\frac{1}{v(s,u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}\xi_n(u), \tag{2.12}$$

где

$$\xi_0(u) = 1, \quad \xi_n(u) = \frac{n}{(1-\rho)^n} u^{n-1} * W^{(n-1)*}(u), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.13}$$

Здесь $W^{(n-1)*}(u)$ есть $(n-1)$–кратная свертка стационарного распределения времени ожидания $W(u)$ в классической системе M/GI/1–FCFS ($W^{0*}(u) = \mathbf{1}(u)$, $W^{1*}(u) = W(u)$), ПЛС распределения $W(u)$ дается хорошо известной формулой Поллачека–Хинчина

$$w(q) = \frac{1-\rho}{1-\rho f(q)}, \tag{2.14}$$

где $f(q) = (1-\beta(q))/(q\beta_1)$ есть ПЛС распределения остаточной длительности обслуживания $F(x)$ по x (аргумент q) (плотность $F(x)$ обозначается через $f(x)$).

Доказательство. Перепишем (2.7) в следующем виде

$$v(s,u) = \frac{(1-\rho)\delta(s,u)}{1-\rho\delta(s,u)\left[\int_0^u \frac{dF(x)}{\delta(s,u-x)} + (1-F(u))\right]}, \quad \mathrm{Re}\, s \geq 0. \tag{2.15}$$

Напомним, что функция распределения $F(x)$ имеет ПЛС $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-sF}\right] = (1-\beta(s))/(s\beta_1)$. Для достижения нашей цели применим ПЛ по u от $1/\delta(s,u)$ u (аргумент q), которое находится из (2.10) как $\tilde{\psi}(s, q-s-\lambda)$, $\quad s \geq 0,\ q > s+\lambda-\lambda\pi(s)$. Теперь после простых преобразований получаем следующее разложение в степенной ряд ПЛ от функции $1/v(s,u)$, $\quad s \geq 0,\ u \geq 0$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qu}\frac{1}{v(s,u)}\,du &= \frac{1}{q}\left[1 + \frac{1}{1-\rho}\frac{s}{q}\frac{1}{1-\frac{1}{1-\rho}\frac{s}{q}w(q)}\right] \\ &= \frac{1}{q}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\rho}\frac{s}{q}\right)^n w(q)^{n-1}\right],\end{aligned} \tag{2.16}$$

где $w(q)$ дается (2.14). Отметим, что $\left|\frac{sw(q)}{(1-\rho)q}\right| < 1$ когда $q > s+\lambda-\lambda\pi(s)$, $\rho < 1$. Легко получить обратное преобразование (по аргументу q) каждого члена степенного ряда по s в (2.16). Результат дается (2.13), что приводит к (2.12), правая часть которого есть степенной ряд по s с коэффициентами $\xi_n(u)/n!$.

□

Подчеркнем, что идея разложения в ряд обратной величины ПЛС восходит к Хевисайду [11, Ch. 5]. Несколько в другом виде следствие 2.1 получено в [12] (1999).

Замечание 2.2. Формула для $W^{n*}(x)$ в (2.13) может быть представлена в следующем виде

$$W^{n*}(x) = (1-\rho)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n-1} \rho^k F^{k*}(x).$$

Это делается, к примеру, посредством обращения $w(q)^n$, где $w(q)$ дается равенством (2.14).

Замечание 2.3. Мы снова заметим, что побочным результатом анализа является формула Поллачека–Хинчина для функции распределения $W(x)$, ПЛС которой дается (2.14). Однако анализ системы EPS дает другую величину (соответствующую не вероятностной мере) $W^\circ(x) = W(x)/(1-\rho)$. Вид ПЛС $W^\circ(x)$ хорошо известен: $w^\circ(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n f^n(q)$. В отличие от $W(x)$, $W^\circ(x)$ корректно определено для всех $\rho > 0$ и $x > 0$. Можно показать, что $W^\circ(x) < \infty$ для всех $\rho > 0$, $x > 0$ и для любой $B(\cdot)$ (несмотря на то, что при $\rho \geq 1$, $W^\circ(x) \to \infty$ при $x \to \infty$).

Следствие 2.2. *Если* $v_n(u) = \mathsf{E}[V(u)^n]$, $n = 1, 2, \ldots$, *то справедлива следующая рекуррентная формула:*

$$v_n(u) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} v_{n-i}(u) \xi_i(u) (-1)^{i+1} \tag{2.17}$$

Доказательство. Поскольку $v(s,u)$ есть аналитическая функция по s (в частности, в окрестности $s = 0$), то можно использовать разложение в ряд Тейлора функции $v(s,u)$ при малых $s > 0$

$$v(s,u) = 1 - \frac{s}{1!} v_1(u) + \frac{s^2}{2!} v_2(u) - \frac{s^3}{3!} v_3(u) + \ldots \tag{2.18}$$

Произведение рядов (2.18) и (2.12) дает

$$-\frac{s}{1!}[v_1(u) - \xi_1(u)] + \frac{s^2}{2!}[v_2(u) - 2v_1(u)\xi_1(u) + \xi_2(u)]$$
$$- \frac{s^3}{3!}[v_3(u) - 3v_2(u)\xi_1(u) - 3v_1(u)\xi_2(u) - \xi_3(u)] + \ldots = 0$$

и это приводит к (2.17) после n–кратного дифференцирования по s и перехода к пределу при $s \to 0$.

□

Формула (2.13) показывает, что $\xi_1(u) = \mathbb{E}[V(u)] = \frac{u}{1-\rho}$.

Замечание 2.4. Следствие 2.2 важно для приложений, так как оно приводит к решению проблемы моментов.

Замечание 2.5. Стоит отметить, что случайная величина $D(u)$ в (2.1) представляет собой “основной” ингредиент времени пребывания: $D(u)$ имеет распределение времени пребывания требования длины u, поступающего в пустую систему. Когда система не пуста, то i–е требование (среди требований, разделяющих ресурс процессора), имеющее остаточную длину x_i, “добавляет” некоторую задержку $\Phi(x_i, u) = \Phi(x_i \wedge u, u)$ к длительностям пребывания новых требований.

Способом, аналогичным доказательству следствия 2.1, нетрудно получить

Следствие 2.3.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qu} \frac{1}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{sD(u)}]}\, du = \frac{1}{q\left(1 - \frac{s}{1-\rho}\frac{w(q)}{q}\right)}. \tag{2.19}$$

Следовательно,

$$\delta(s,u) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} s^n \gamma_{0,n}(u)\right]^{-1}, \tag{2.20}$$

где $\gamma_{0,0}(u) = 1$ *и*

$$\gamma_{0,n}(u) = \frac{1}{(1-\rho)^n}\frac{1}{n!}\int_0^u (u-x)^n\, dW^{n*}(x).$$

Доказательство. Опущено, поскольку выше дано аналогичное доказательство следствия 2.1. □

2.3. Эквивалентная форма равенства (2.8)

В некоторых случаях могут быть полезны эквивалентные формы уравнения (2.8). Например,

$$\varphi(s,x,u) = \mathrm{e}^{-(x\wedge u)(s+\lambda)+\lambda\int_0^{x\wedge u}\varphi_B(s,u-y)\,dy}, \; x \in [0,\infty), \tag{2.21}$$

где

$$\varphi_B(s,t) \stackrel{\triangle}{=} \int_0^\infty \varphi(s,x,t)\, dB(x) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_{t-x}^t (s+\lambda-\lambda\varphi_B(s,y))\,dy}\, dB(x) + (1-B(t))\mathrm{e}^{-\int_0^t (s+\lambda-\lambda\varphi_B(s,y))\,dy}. \tag{2.22}$$

Равенство (2.22) представляет собой функциональное уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi_B(s,\cdot)$. Функция $\varphi_B(s,t)$ есть ПЛС распределения некоторого нетривиального обрывающегося периода занятости (он обрывается в момент t) в системе M/G/1—EPS. Решение уравнения (2.22) было получено в терминах функции ψ $(\psi(s,t) \stackrel{\triangle}{=} \exp(-\lambda\int_0^t \varphi_B(s,y)\,dy))$ (более точно, в терминах ПЛ этой функции, см. (2.10)). Это показывает также, что изучение времени пребывания в системе M/G/1 требует более глубокого анализа по сравнению с тем, что ожидается при поверхностном уровне рассмотрения.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описаны особенности специального метода исследования системы M/G/1—EPS и выведены рекуррентные формулы для вычисления моментов времени пребывания требования заданной длины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kleinrock, L., Analysis of a Time–Shared Processor, *Naval Res. Logistics Quart.*, 1964, vol. 11, pp. 59–73.
2. Yashkov, S.F., Some Results of Analyzing a Probabilistic Model of Remote Processing Systems, *Autom. Contr. Comput. Sci.*, 1981, vol. 15, no. 4, pp. 1–8.
3. Yashkov, S.F., A Derivation of Response Time Distribution for an M/G/1 Processor-Sharing Queue, *Problems of Control and Info. Theory*, 1983, vol. 12, no. 2, pp. 133–148.
4. Yashkov, S.F., *Analiz ocheredei v EVM* (Analysis of Queues in Computers), Moscow: Radio i Svyaz', 1989.

5. Yashkov, S.F., Mathematical Problems in the Theory of Shared–Processor Systems, *J. of Soviet Mathematics*, 1992, vol. 58, no. 2, pp. 101–147.

6. Yashkov, S.F. and Yashkova, A.S., Processor Sharing: A Survey of the Mathematical Theory, *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, No. 9, pp. 1662–1731.

7. Kleinrock, L., *Queueing Systems*, vol. 1: *Theory*, New York: Wiley, 1975.

8. Jaiswal, N.K., *Priority Queues*, New York: Academic, 1968.

9. Dshalalow, J.H., An Antology of Classical Queueing Methods, in *Advances in Queueing: Theory, Methods, and Open Problems*, J. Dhalalow, Ed., Boca Raton: CRC Press, 1995. pp. 1–42.

10. Yashkov, S.F., Distribution of the Conditional Waiting Time in a System with Division of Time, *Eng. Cybernetics*, 1977, vol. 15, no. 5, pp. 44–52.

11. Heaviside, O., *Electromagnetic Theory,* London: Electrician Co., 1893, vol. 1; 1899, vol. 2; 1912, vol. 3.

12. Yashkov, S.F. and Yashkova, A.S., Processor Sharing Queue: Additional Results, *Proc. 3rd Int. Conf. on Distributed Comput. Commun. Networks (DCCN'99),* Tel-Aviv, 1999, Moscow: Inst. Problem Peredachi Inf., 1999, pp. 216–221.

Статью представил к публикации член редколлегии В.И.Венец