

Модели течения быстрой воды и перемещения грунта¹

Е.Н. Петрова, С.А. Пирогов, Е.Ф. Юрков

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 10.03.2010

Аннотация—Предложены математические модели течения воды (течение «быстрой» и «е-быстрой» воды), которые могут быть использованы для описания поверхностного стока. Исследуются свойства этих моделей, выводится уравнение движения границы «вода-суша». Предложена модель перемещения грунта с водой, которая используется для выяснения качественной картины развития эрозии почвы, вызванной поверхностным стоком. Приводятся примеры и результаты численного моделирования процессов поверхностного стока и развития эрозии. Настоящая работа является основой технологии оценивания степени эрозийной опасности в сетевой геоинформационной системе GeoТайм, <http://www.geo.iitp.ru/geotime/> (раздел “Ruza”).

1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом данной работы является моделирование движения жидкости по поверхности земли и процесса переноса смываемого водой грунта. Представляется маловероятным решать задачи о движении потоков, встречающихся в природе, основываясь на полных уравнениях механики сплошной среды. Дело в том, что подавляющее большинство таких потоков турбулентно. Общей теоретической формулы, связывающей турбулентные напряжения с локальными кинематическими характеристиками, не существует, т.е. фактически нет замкнутой системы уравнений, которая позволила бы во всей полноте описать турбулентное движение в руслах и на склонах.

В то же время, если продольный масштаб движения существенно больше характерной глубины потока, такие задачи можно решать на основе уравнений гидравлики, в которых турбулентное трение входит только интегрально, в виде трения о дно. При этом, однако, необходимо привлекать эмпирические формулы, связывающие средние по сечению характеристики потока с трением о дно. Это так называемый гидравлический подход [1], который заключается в следующем. Во-первых, рассматриваются только средние по глубине параметры потока; в качестве основных изучаемых величин выступают глубина потока и средняя горизонтальная скорость. Во-вторых, из уравнений механики сплошной среды на основании ряда гипотез выводится система уравнений, в которую входят только эти величины. Уравнения гидравлики являются, следовательно, более грубыми, чем полные уравнения гидромеханики и механики сплошной среды, и могут рассматриваться как некоторое приближение этих полных уравнений. Такой подход использовался для моделирования двумерных поверхностных течений в работах [2,3]. Заметим, однако, что необходимость выбора подходящих эмпирических зависимостей и, главное, конкретных значений параметров (которые очень сильно изменяются от участка к участку, в зависимости от условий среды) затрудняет практическое использование гидравлического подхода.

В настоящей статье предлагается упрощенный вариант уравнений гидравлики, в котором исключена скорость течения, и единственными переменными, зависящими от времени, являются высота уровня воды и количество переносимого материала. В первой части статьи исследуется течение жидкости, закон движения которой задаётся моделью потока, введённой ранее в работах [4,5]. Свойства течения изучаются в общем виде и раскрываются в примерах, допускающих непосредственное вычисление. В частности, изучаются свойства течения воды в об-

¹ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 07-07-00259 и № 09-07-12077-офи_м

ласти, граничащей с сушей: выводится уравнение движения границы, определяется скорость перемещения границы и скорость перемещения воды, примыкающей к суше (в общем случае эти две скорости не совпадают). С методической точки зрения модель потока рассматривается в двух вариантах, названных здесь течением «быстрой» и «ε-быстрой» воды. Первый вариант описывается более простым соотношением, но поток обладает особенностью на границе с сушей; второй, скорректированный вариант модели, сохраняя основные черты первого, снимает «экстравагантное» поведение потока на границе.

Во второй части статьи излагается модель переноса грунта потоком жидкости. Исходя из того, что перемещение грунта вызывается перемещением воды, предполагается, что перемещение грунта пропорционально перемещению воды. К числу особенностей этой модели относится то, что уравнение движения воды и грунта содержит рельеф, изменяемый со временем. Другая особенность состоит в том, что перемещение грунта замедляет скорость движения потока.

Исследуемая здесь модель использовалась как инструмент получения качественной картины поверхностного стока воды и развития процесса эрозии почвы на опытном участке территории московской области. Численное моделирование процессов производилось средствами программной системы Matlab и сетевой геоинформационной системы, предназначенной для решения геологических, геофизических и геоэкологических задач и позволяющей проводить моделирование пространственно-временных процессов [6,7].

2. ТЕЧЕНИЕ «БЫСТРОЙ ВОДЫ»

Будем рассматривать рельеф (твёрдую поверхность) как функцию $R=R(x,y)$, заданную на плоскости с координатами (x,y) . Обозначим через $W=W(x,y,t)$ высоту слоя воды, частично покрывающей рельеф в момент t . Сумма $H=R+W$ является либо рельефом (там, где нет воды), либо высотой водной поверхности относительно координатной плоскости. При создании модели течения используем упрощающие предположения, которые представляются допустимыми для поверхностного стока на территориях с небольшим уклоном. Пренебрегая вертикальным перемещением водных масс, опишем течение воды в каждый момент времени двумерным вектором потока $\mathbf{j}=\mathbf{j}(x,y,t)$. Величина потока равна количеству воды, протекающей через 1 м линии, перпендикулярной вектору \mathbf{j} за 1 с, и имеет, таким образом, размерность $\text{м}^3/(\text{м} \cdot \text{с}) = \text{м}^2/\text{с}$. Закон сохранения массы для несжимаемой жидкости требует, чтобы

$$\partial W/\partial t + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1)$$

где $\text{div} \mathbf{j} = \partial j_x/\partial x + \partial j_y/\partial y$ – дивергенция векторного поля \mathbf{j} , j_x, j_y – компоненты вектора \mathbf{j} . Уравнение баланса (1) означает, что уменьшения объёма воды на любой площадке компенсируется оттоком воды из этой площадки. Будем пользоваться, также, эквивалентной записью этого уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0 \quad (1a)$$

Будем считать, что поток направлен в сторону наибольшего уклона водной поверхности, а его интенсивность пропорциональна величине градиента этого уклона ∇H (в следующем выражении для простоты изложения опущен коэффициент пропорциональности, который, очевидно, должен иметь размерность потока):

$$\mathbf{j} = -\nabla H \cdot \text{sign}(W), \quad (2)$$

Другими словами,

$$\mathbf{j} = -\nabla H, \text{ если } W > 0, \quad (2a)$$

$$\mathbf{j} = 0, \text{ если } W = 0. \quad (2б)$$

Поток в форме (2) назовём потоком «быстрой воды». Этот термин объясняется свойством, которое будет выяснено позже. В математической физике совокупность уравнений (1) и (2a) известна как уравнение теплопроводности или диффузии. Условие (2б), определяющее характер движения воды на границе с сушей, существенно образом сказывается на характере решения.

Учитывая свойства непрерывности течения, покажем, что на границе Γ , разделяющей области $W>0$ и $W=0$ для нормальной компоненты потока j_n должно выполняться условие

$$j_n = 0 \text{ на } \Gamma \quad (3)$$

Действительно, считая R и W достаточно гладкими функциями, рассмотрим малый участок поверхности, частично покрытый водой. Профиль сечения такого участка вдоль оси x изображён

на рисунке 1 (рельеф справа, вода слева). Показан случай, когда вода, находившаяся в момент t на границе Γ , достигает за время Δt новой границы Γ' .

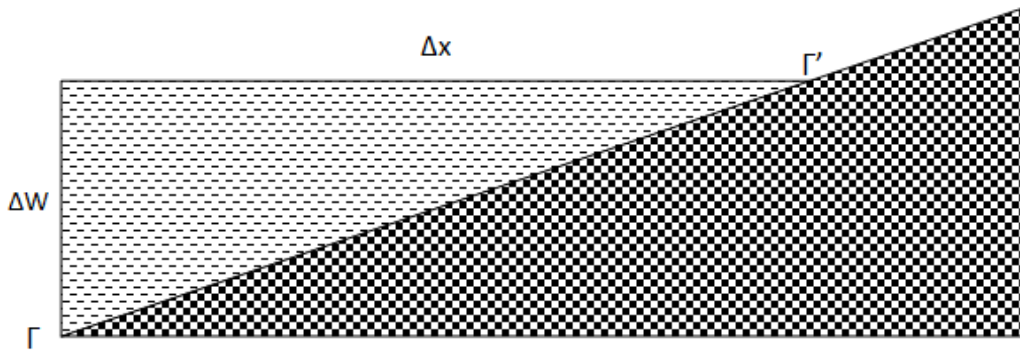


Рис. 1. Сечение малого участка поверхности на границе вода-суша

Изменение уровня воды ΔW за время Δt пропорционально Δt . Из рисунка видно, что площадь перетекшей за границу Γ воды за время Δt пропорциональна $\Delta W \Delta x$, т.е. порядка $(\Delta t)^2$. На рисунке верхний уровень воды горизонтален; вообще говоря, он мог бы быть и не горизонтальным, порядок пропорциональности остаётся тот же. Соответствующий объём воды, перетекшей через границу протяжённости Δl (она перпендикулярна плоскости рисунка), пропорционален $(\Delta t)^2 \Delta l$, а в расчёте на единичное время и длину объём перетекшей воды пропорционален Δt . Таким образом, нормальная компонента потока j_n , которая как раз равна пределу этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$, оказывается равной нулю, что и утверждает условие (3).

Систему уравнений (1), (2) и (3), мы называем моделью течения «быстрой воды». Отметим, что условие (3) для рассматриваемой модели эквивалентно условию

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{3a}$$

где n – направление внешней нормали к границе Γ . Это означает, что в сечении, перпендикулярном границе, поверхность воды вблизи её уреза должна быть горизонтальной, как и показано на рисунке.

2.1. Скорость течения воды и скорость движения границы

Хотя для нормальной компоненты потока и выполняется условие (3), но сам вектор потока \mathbf{j} не обязан обращаться в 0 на границе. Поэтому, если определить вектор скорости воды как $\mathbf{V}_{aq} = \mathbf{j}/W$, то \mathbf{V}_{aq} имеет особенность на Γ , т.е. стремится к бесконечности, что оправдывает название данной модели как течение «быстрой воды». Нормальная компонента вектора скорости \mathbf{V}_{aq} на границе Γ равна $V_{aq,n} = j_n/W$ и, учитывая (3), представляется неопределённостью вида $0/0$. Если раскрыть её по правилу Лопиталья, то получим, что нормальная компонента скорости течения воды на Γ равна

$$V_{aq,n} = \frac{\partial j_n / \partial n}{\partial W / \partial n}$$

Сама граница Γ является подвижной, и уравнение её движения вытекает из следующих соображений. На границе Γ выполняется условие $H(x,y,t) = R(x,y)$, дифференцируя которое по t с учётом движения границы Γ , получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V_n \frac{\partial H}{\partial n} = V_n \frac{\partial R}{\partial n}, \tag{4}$$

где V_n – скорость движения границы Γ в направлении её внешней нормали. Иначе,

$$V_n = \frac{\partial H / \partial t}{\partial R / \partial n - \partial H / \partial n} = - \frac{\partial H / \partial t}{\partial W / \partial n} = \frac{\text{div } \mathbf{j}}{\partial W / \partial n} \tag{5}$$

Из сказанного ясно, что нормальная скорость течения воды на границе $V_{aq,n}$, вообще говоря, не совпадает со скоростью движения границы V_n , что связано с наличием особенности \mathbf{V}_{aq}

на Γ . Если же V_{aq} не имеет особенностей на границе Γ , то $\mathbf{j}=0$ на Γ , т.е. вдоль границы \mathbf{j} не меняется. Поэтому $\text{div}\mathbf{j}=\partial j_n/\partial n$ и, следовательно, $V_n=V_{aq,n}$. Несколько простых примеров поясняют свойства модели течения «быстрой воды».

2.2. Пример 1

Вода течёт в направлении оси x , а граница Γ перемещается в направлении оси y . Положим для $t=0$

$$H = \begin{cases} y, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}, \quad R = y \text{ везде,}$$

$$W = H - R = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ |y|, & y < 0 \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$, где $j_x=x$, $j_y=0$. Таким образом, вода течёт параллельно оси x , а скорость движения границы Γ (которая как раз совпадает с осью x) равна

$$V_n = -\frac{\partial H/\partial t}{\partial W/\partial n} = \frac{\text{div}\mathbf{j}}{\partial W/\partial n} = \frac{\text{div}\mathbf{j}}{\partial W/\partial y} = -1$$

Таким образом, скорость движения границы направлена вдоль оси y (в отрицательном направлении, так как уровень воды падает). Это пример не удовлетворяет условиям течения «быстрой воды», так как уравнение (2а) здесь не выполнено.

2.3. Пример 2

Модифицируем предыдущий пример так, чтобы выполнялось уравнение (2а). Положим для $t=0$

$$H = \begin{cases} y + x^2, & y > 0 \\ x^2, & y < 0 \end{cases}, \quad R = y + x^2 \text{ всюду,}$$

$$W = H - R = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ |y|, & y < 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{j} = -\nabla H = (-2x, 0) \text{ при } y < 0$$

Снова вода течёт параллельно оси x , а $V_n = \frac{\text{div}\mathbf{j}}{\partial W/\partial y} = 2$, т.е. скорость движения границы Γ (которая совпадает с осью x) направлена вдоль оси y . Через время t будем иметь

$$W(t) = \begin{cases} 0, & y > 2t \\ |y - 2t|, & y < 2t \end{cases},$$

т.е. уровень воды поднимается со скоростью 2, поскольку $\partial H/\partial t + \text{div}\mathbf{j}=0$ по условию (1а).

2.4. Пример 3. Солитон быстрой воды

Приведём пример профиля H , движущегося в виде солитона, т.е. волны, сохраняющей свою форму и бегущей с постоянной скоростью. Считая, что $R=R(x)$, и $H=H(x,t)$, т.е. зависимость от координаты y отсутствует, положим

$$H = \begin{cases} x, & x > x_{кр} \\ x + \beta(1 - a(t)e^{x/\beta}), & x < x_{кр} \end{cases}, \quad R = x, \quad (6)$$

где $x_{кр}$ – положение границы Γ , зависящее от t , $\beta > 0$ произвольный параметр. Поскольку

$$\partial H / \partial t = -\beta a'(t) e^{x/\beta}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial^2 H / \partial x^2 = \frac{1}{\beta} a(t) e^{x/\beta},$$

то из (1а) следует, что $a'(t) = \frac{1}{\beta^2} a(t)$. Отсюда при $a(0) = 1$ имеем $a(t) = e^{t/\beta^2}$ и $H = x + \beta(1 - e^{(x/\beta+t/\beta^2)})$. Граница $x_{кр}$ находится из уравнения $H=R$, т.е. $e^{(x/\beta+t/\beta^2)}=1$ и $x_{кр}(t) = -t/\beta$. Таким образом,

$$W(x, t) = \beta \left(1 - e^{\frac{(x-x_{кр}(t))}{\beta}} \right) \text{ при } x < x_{кр}(t),$$

т.е. профиль воды бежит по оси x , не меняя своей формы, со скоростью $-1/\beta$ (влево). Профиль солитона с параметром $\beta=1$ в момент $t=-1$ ($x_{кр}(t)=1$) показан на рисунке 2.

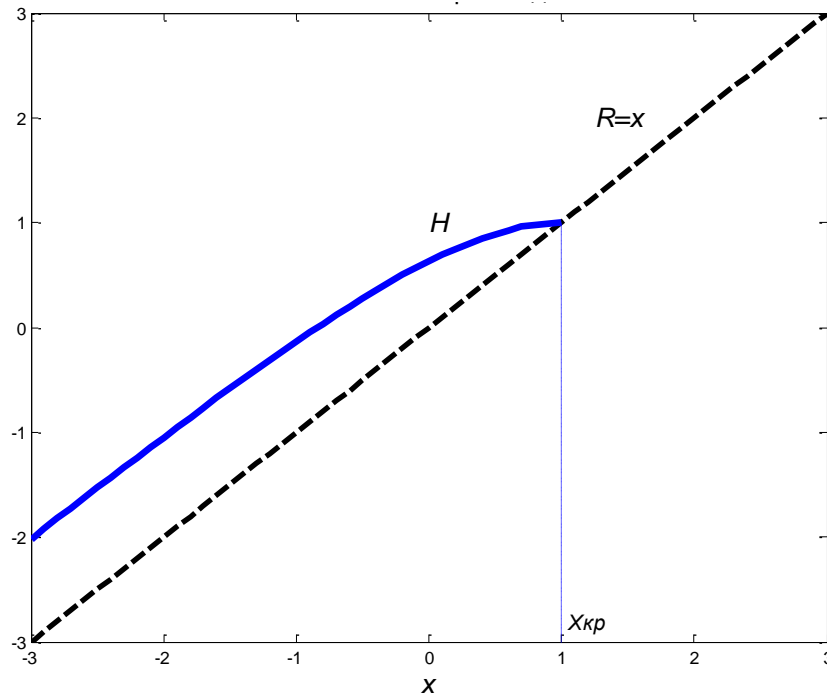


Рис. 2. Солитон быстрой воды

2.5. Замечание

а) Отсюда видно, что скорость движения границы для течения быстрой воды может быть сколь угодно велика, что вызывает затруднения как при физической интерпретации явления, так и при численном его моделировании. Поэтому ниже будет рассмотрена «регуляризованная» модель, названная течением «ε-быстрой воды». При $\epsilon \rightarrow 0$ эта модель переходит в течение быстрой воды.

б) Для построенного выше солитона условие $\partial H / \partial n = \partial H / \partial x = 0$ в точке $x_{кр}(t)$ автоматически выполняется, что также видно из рисунка.

3. ТЕЧЕНИЕ ε-БЫСТРОЙ ВОДЫ

Как было показано, поток быстрой воды обладает особенностью: скорость перемещения воды вблизи границы может быть как угодно велика, что не отвечает физическим представлениям о движении воды. Чтобы избежать этого эффекта, модифицируем поведение потока, заменив уравнение (2) на

$$\mathbf{j} = -\min \left(|\nabla H|, \frac{W}{\epsilon} \right) \frac{\nabla H}{|\nabla H|}, \quad (7)$$

или в развёрнутой записи

$$\mathbf{j} = -\nabla H, \text{ если } |\nabla H| \leq \frac{W}{\epsilon}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{W}{\varepsilon} \frac{\nabla H}{|\nabla H|}, \text{ если } |\nabla H| > \frac{W}{\varepsilon}, \quad (7б)$$

где $\varepsilon > 0$ - фиксированный малый параметр.

Поток в форме (7) назовём потоком « ε -быстрой воды», а систему, уравнений (1) и (7) назовём моделью течения « ε -быстрой воды». Таким образом, модификация течения «быстрой воды» происходит там, где «воды мало», т.е. $W < \varepsilon|\nabla H|$. В этой области поток по-прежнему направлен в сторону наибольшего уклона водной поверхности, а его интенсивность пропорциональна высоте слоя воды W . Теперь условие (3), входившее в определение модели течения быстрой воды, выполняется автоматически. Выполняется и более сильное условие $\mathbf{j}=0$ на границе Γ , ибо при малых W величина потока \mathbf{j} пропорциональна W . Такое поведение потока на границе представляется более адекватным физической картине поверхностного стока.

Поскольку на Γ имеем $W=0$, т.е. $H=R$, то по-прежнему скорость движения границы даётся выражением (5). Однако скорость течения $V_{aq}=\mathbf{j}/W$ уже не имеет особенности на Γ . Вблизи Γ она равна $-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\nabla H}{|\nabla H|}$. В частности, нормальная компонента скорости течения на Γ равна

$$V_{aq,n} = -\frac{1}{\varepsilon|\nabla H|} \frac{\partial H}{\partial n} \quad (8)$$

Теперь оказывается, что это выражение совпадает с нормальной скоростью (5) движения границы V_n . Действительно, вблизи границы из (7б) имеем

$$\mathbf{j} = -\frac{W}{\varepsilon} \frac{\nabla H}{|\nabla H|}, \text{ div } \mathbf{j} = -\frac{(\nabla W \cdot \nabla H)}{\varepsilon|\nabla H|} - \frac{W}{\varepsilon} \text{div} \left(\frac{\nabla H}{|\nabla H|} \right)$$

и при $W \rightarrow 0$ (т.е. на Γ)

$$V_n = \frac{\text{div } \mathbf{j}}{\partial W / \partial n} = -\frac{(\nabla W \cdot \nabla H)}{\varepsilon|\nabla H| \partial W / \partial n}$$

Поскольку граница Γ является изолинией уровня воды $W=0$, то вектор ∇W направлен по нормали к Γ и равен $\frac{\partial W}{\partial n} < 0$. Поэтому

$$V_n = -\frac{1}{\varepsilon|\nabla H|} \frac{\partial H}{\partial n}$$

и совпадает с выражением (8) для $V_{aq,n}$. Таким образом, скорость течения воды $V_{aq,n}$ и равная ей скорость движения границы V_n нигде не превосходят по абсолютной величине порогового значения $1/\varepsilon$. Поэтому мы и говорим о течении « ε -быстрой воды», имея ввиду малость значения ε .

3.1. Пример 4. Солитон ε -быстрой воды

Снова рассмотрим солитон (6), движение которого происходит теперь в условиях течения ε -быстрой воды. Так как при $x < x_{кр}(t)$ высота слоя воды

$$W = H - R = \beta(1 - a(t)e^{x/\beta}), \quad \nabla H = \partial H / \partial x = 1 - a(t)e^{x/\beta} = W/\beta,$$

то при $\beta \geq \varepsilon$ выполняется неравенство $W \geq \varepsilon|\nabla H|$, поток следует уравнению (7а), и мы возвращаемся к рассмотренному ранее примеру солитона для случая течения быстрой воды. В частности,

$$a(t) = e^{t/\beta^2} \text{ и } x_{кр}(t) = -t/\beta,$$

т.е. скорость движения границы равна $1/\beta \leq 1/\varepsilon$.

Если же $\beta < \varepsilon$, то $W < \varepsilon|\nabla H|$ и поток по (7б) равен

$$\mathbf{j} = -\frac{W}{\varepsilon} \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = -\frac{W}{\varepsilon} \quad (\text{ибо } \nabla H = \frac{\partial H}{\partial x} > 0)$$

Значит, $\text{div } \mathbf{j} = -\frac{1}{\varepsilon} \partial W / \partial x = \frac{1}{\varepsilon} a(t) e^{x/\beta}$, $\partial H / \partial t = -\beta a'(t) e^{x/\beta}$.

Из (1а) следует $a'(t) = \frac{1}{\varepsilon\beta} a(t)$ и при начальном условии $a(0)=1$ получаем

$$a(t) = e^{\frac{t}{\varepsilon\beta}}, \quad H = x + \beta \left(1 - e^{\frac{x}{\beta} + \frac{t}{\varepsilon\beta}} \right)$$

Теперь $x_{кр}(t) = -t/\varepsilon$ и профиль движется со скоростью $-1/\varepsilon$, максимально возможной по абсолютной величине для течения ε -быстрой воды.

3.2. Пример 5. Моделирование поверхностного стока

В приведённых выше примерах решения получены в явном виде путём несложных вычислений. В общем случае решение рассмотренной задачи эквивалентно решению нелинейного уравнения в частных производных и может быть найдено только численным методом. Алгоритм численного решения этой задачи, реализованный в программной среде Matlab и основанный на замене дифференциалов конечными разностями, описан в [4,5] (см. также близкий подход в [8]). В этом алгоритме параметр ε принимается равным шагу пространственной сетки.

Другим важным параметром численного алгоритма является шаг временной сетки, и выбрать совершенно произвольно его нельзя, так как малые значения этого параметра требуют значительных вычислительных ресурсов для нахождения решения, а большие его значения нарушают устойчивость алгоритма. Это объясняется связью данного параметра с коэффициентом пропорциональности перед градиентом в выражении (7), который как отмечалось, был опущен для простоты изложения. В алгоритме использовалось значение этого коэффициента, равное $1/4$, что, как показали исследования и численные эксперименты, является максимально допустимой величиной, обеспечивающей устойчивость результата моделирования.

Приведём результаты работы алгоритма при решении задачи моделирования поверхностного стока на участке территории Московской области (бассейн реки Рузы). Соответствующая карта рельефа (в приведённых выше формулах обозначенного как R) изображена на рисунке 3. Размеры участка: 15×15 км, начальный слой воды W , равномерно покрывающей рельеф, равен 4 дм.

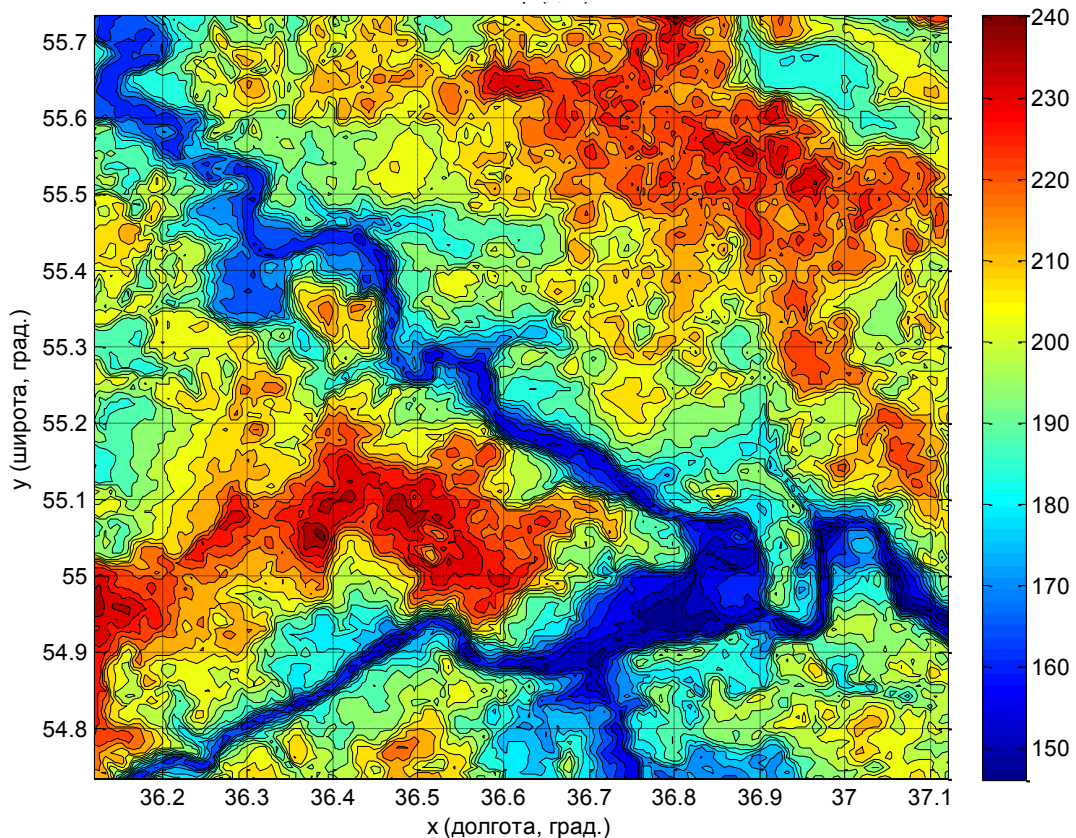


Рис. 3. Рельеф бассейна реки Рузы (шкала высот дана в дм)

Стадии поверхностного стока, т.е. значения функции H , полученные как решение уравнений модели течения ε -быстрой воды для двух моментов времени, показаны на рисунках 4 и 5. Величина ε , принимаемая равной шагу пространственной сетки, равнялась 100м. В качестве граничных условий были заданы достаточно высокие «стены» с тем, чтобы вода не переливалась за края территории, кроме того, река рассматривалась как обычный участок рельефа, поэтому не происходит выноса воды рекой. На рисунке 4 показана начальная стадия стока – вид-

ны лишь обнажающиеся вершины рельефа. На рисунке 5 показана завершающая стадия стока, о чём свидетельствует почти ровная поверхность стёкшей воды; небольшая часть воды заполняет низины и не может стечь.

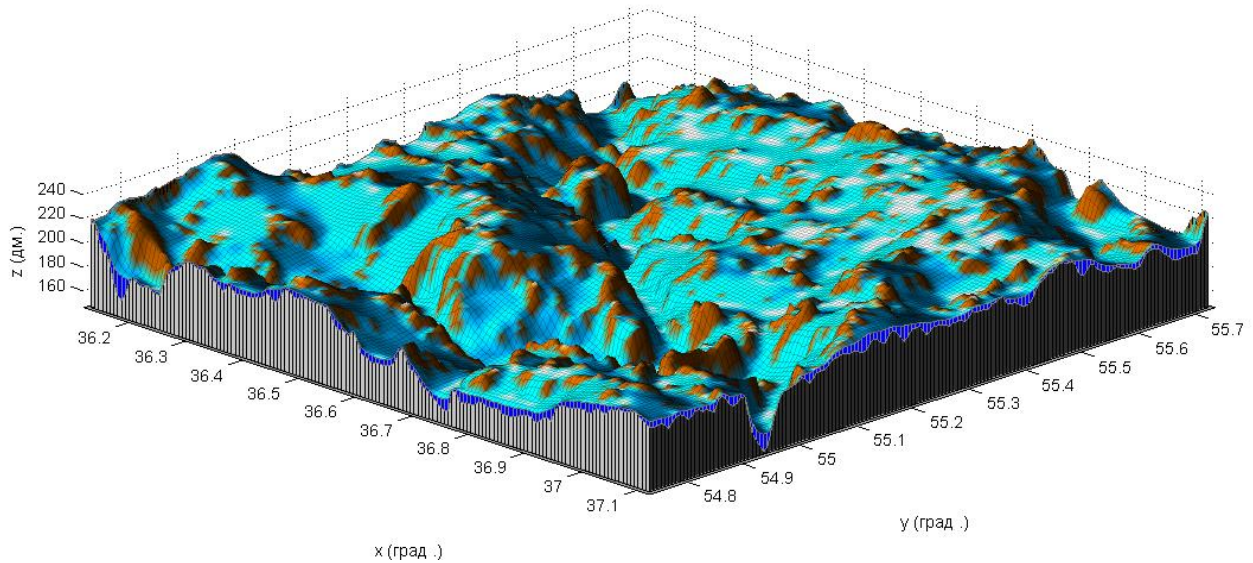


Рис. 4. Начальная стадия поверхностного стока

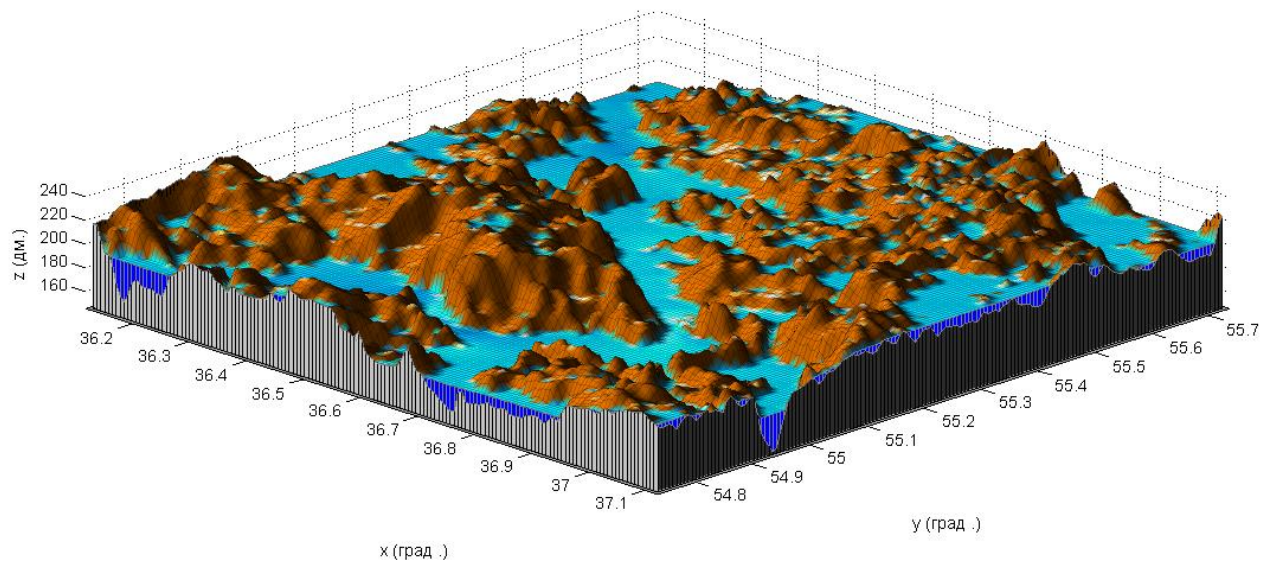


Рис 5. Завершающая стадия поверхностного стока

4. МОДЕЛЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУНТА С ВОДОЙ

Предположим, что перемещение воды вызывает перемещение грунта, являющегося частью рельефа. Перемещение грунта видоизменяет рельеф, так что в соотношении $H=R+W$ рельеф $R=R(x,y,t)$ зависит теперь и от времени. Изменение рельефа можно рассматривать как процесс эрозии почвы, происходящий в результате размыва или намыва грунта.

Так как грунт увлекается водой, то можно предположить, что законы перемещения грунта и воды аналогичны. Введя параметр перемещения грунта δ , $0 \leq \delta \leq 1$, и обозначая через \mathbf{j} полный поток вещества - воды и грунта (в отличие от предыдущих разделов, где \mathbf{j} означал поток воды), будем считать, что поток грунта и поток воды составляют некоторые доли от суммарного потока вещества:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_g &= \delta \mathbf{j} - \text{поток грунта,} \\ \mathbf{j}_w &= (1-\delta) \mathbf{j} - \text{поток воды,} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_w + \mathbf{j}_g \end{aligned}$$

Вообще говоря, параметр δ может зависеть и от свойств грунта и от скорости течения. Но мы будем рассматривать простейший случай, когда δ фиксировано. При $\delta=0$ возвращаемся к потоку быстрой или ε -быстрой воды.

При условии, что грунт (как и вода) несжимаем, справедливы уравнения баланса для грунта, воды и их суммы

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_g = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_w = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \delta \frac{\partial H}{\partial t} \quad (9)$$

Последнее уравнение в (9) означает, что $\frac{\partial}{\partial t}(R - \delta H) = 0$, т.е. величина

$$R - \delta H = (1 - \delta)R - \delta W$$

не меняется во времени. Как и ранее, из условия $\mathbf{j}=0$ при $W=0$ следует, что на границе области $W>0$ для нормальной компоненты суммарного потока должно выполняться условие $j_n=0$, а значит, и аналогичные условия для слагаемых: $(j_w)_n=0, (j_g)_n=0$.

Модели течения быстрой и ε -быстрой воды без существенных изменений переносятся на случай потока воды с грунтом. Отметим, однако, что модель перемещения грунта с параметром ε качественно отличается от модели перемещения грунта без параметра ε , так как поток \mathbf{j}_g согласно (7) будет явным образом зависеть от меняющегося рельефа R в силу $W=H-R$. В модели же перемещения грунта без параметра ε такой зависимости нет, так как согласно (2а) поток \mathbf{j}_g для $W>0$ будет зависеть только от H . Это различие иллюстрируется на следующих двух примерах.

4.1. Пример 6. Солитон в условиях быстрого потока вещества

Рассмотрим модель быстрого потока (2) с суммарным потоком $\mathbf{j}=\mathbf{j}_w+\mathbf{j}_g$ и солитон, для которого функции H, R и W при $t=0$ имеют вид

$$H(0) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ x + \beta(1 - e^{x/\beta}), & x < 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$R(0) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ x + \delta\beta(1 - e^{x/\beta}), & x < 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$W(0) = H - R = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ (1 - \delta)\beta(1 - e^{x/\beta}), & x < 0 \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция H в виде (6) и функция

$$R(t) = \begin{cases} x, & x > x_{кр}(t) \\ x + \delta\beta(1 - a(t)e^{x/\beta}), & x < x_{кр}(t) \end{cases}, \quad (12)$$

где $a(t) = e^{t/\beta^2}$, $x_{кр}(t) = -t/\beta$, удовлетворяют соотношениям (9). При этом в точке $x=x_{кр}(t)=-t/\beta$ выполняется условие $j_n=0$, так как для одномерного течения

$$j_n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -\nabla H = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1 - a(t)e^{x/\beta} = 0$$

Количество воды равно

$$W(t) = H(t) - R(t) = \begin{cases} 0, & x > x_{кр}(t) \\ (1 - \delta)\beta(1 - e^{\frac{x-x_{кр}(t)}{\beta}}), & x < x_{кр}(t) \end{cases},$$

т.е. как и в примере 3, вода по-прежнему бежит влево со скоростью $1/\beta$.

4.2. Пример 7. Солитон в условиях ε -быстрого потока вещества

Изменим условия предыдущего примера, считая, что суммарный поток имеет вид (7). Функции $H(t)$ и $R(t)$ будем искать в виде (6) и (12). Таким образом,

$$W = H - R = \begin{cases} 0, & x > x_{кр}(t) \\ (1 - \delta)\beta(1 - a(t)\exp\left(\frac{x}{\beta}\right)), & x < x_{кр}(t) \end{cases}$$

Поскольку

$$|\nabla H| = 1 - a(t)\exp\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{W(t)}{\beta(1-\delta)}$$

при $x < x_{\text{кр}}(t)$ (т.е. $a(t) \exp\left(\frac{x}{\beta}\right) < 1$), то следует различать два режима:

$$\beta(1-\delta) \geq \varepsilon \text{ и } \beta(1-\delta) < \varepsilon.$$

Если $\beta(1-\delta) \geq \varepsilon$, то $|\nabla H| \leq \frac{W(t)}{\varepsilon}$ и мы возвращаемся к потоку вида (2а), т.е. к предыдущему примеру, в котором волна воды (и грунта) бежит влево со скоростью $1/\beta$. Если же $\beta(1-\delta) < \varepsilon$, то

$$|\nabla H| > \frac{W(t)}{\varepsilon} \text{ и } \mathbf{j} = -\frac{W}{\varepsilon}.$$

Значит,

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1-\delta}{\varepsilon} a(t) e^{x/\beta}.$$

А так как

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\beta a'(t) e^{x/\beta},$$

то из уравнения баланса (см. (9), предпоследнее уравнение) имеем

$$a'(t) = \frac{1-\delta}{\beta\varepsilon} a(t).$$

Поэтому $a(t) = \exp\left(\frac{1-\delta}{\beta\varepsilon} t\right)$ при $a(0) = 1$.

Таким образом, $x_{\text{кр}}(t) = -\frac{1-\delta}{\varepsilon} t$. Мы видим, что фактор перемещения грунта изменяет скорость движения суммарного потока.

4.3. Пример 8. Моделирование развития эрозии

Приведём пример использования модели ε -быстрого потока вещества для выяснения качественной картины развития эрозии на территории, карта которой была изображена на рисунке 3. На рисунках 6 и 7 представлен процесс развития эрозии (с $\delta=0.2$) в виде разности между фактическим и изменённым, т.е. полученным в процессе моделирования, рельефом. На рисунке 6 показан начальный этап развития эрозии. Заметно, что в южной части карты эрозия выражена сильнее, чем в северной части, где она носит более мозаичный характер. На рисунке 7 показан результат длительного действия эрозионного процесса. На южном участке эрозия увеличилась, возникли обширные участки эрозии на северо-востоке. Из сравнения с картой рельефа (рисунок 3) видно, что по большей части эрозия приурочена к возвышенностям, смытый материал аккумулируется на относительно низких участках, в результате чего рельеф выравнивается.

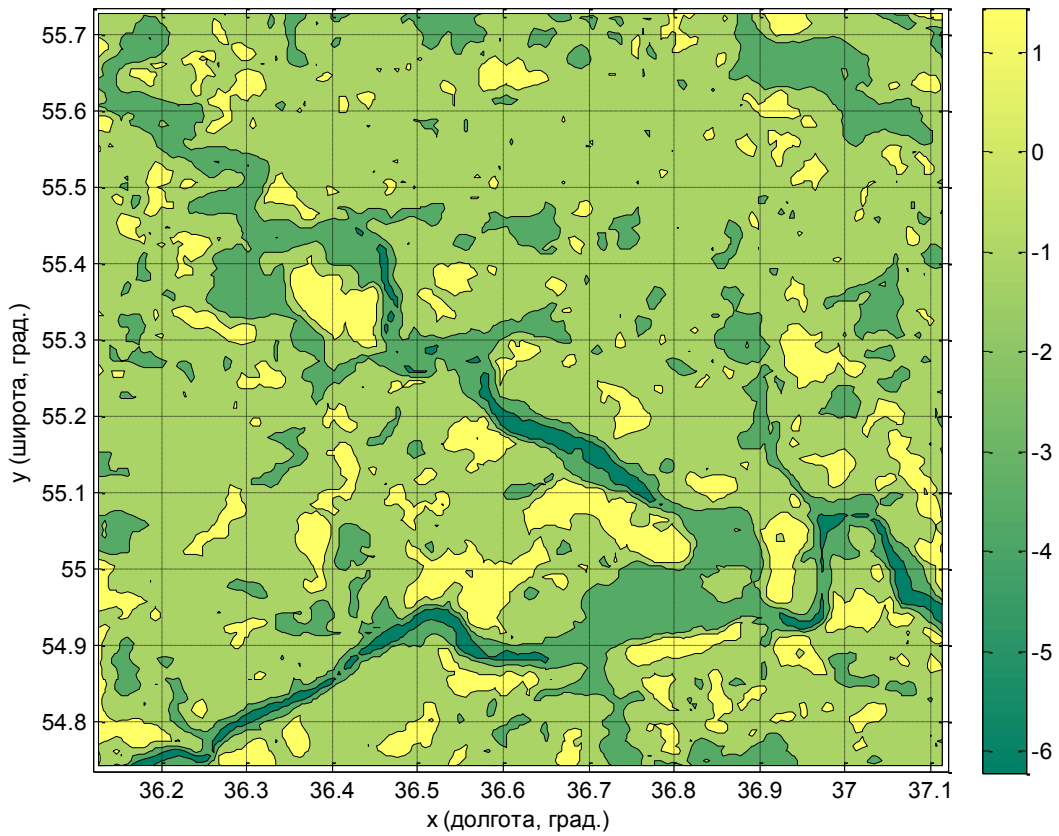


Рис. 6. Начальный этап развития эрозии. Показана разность между начальным и изменённым рельефом (шкала разностей дана в дм)

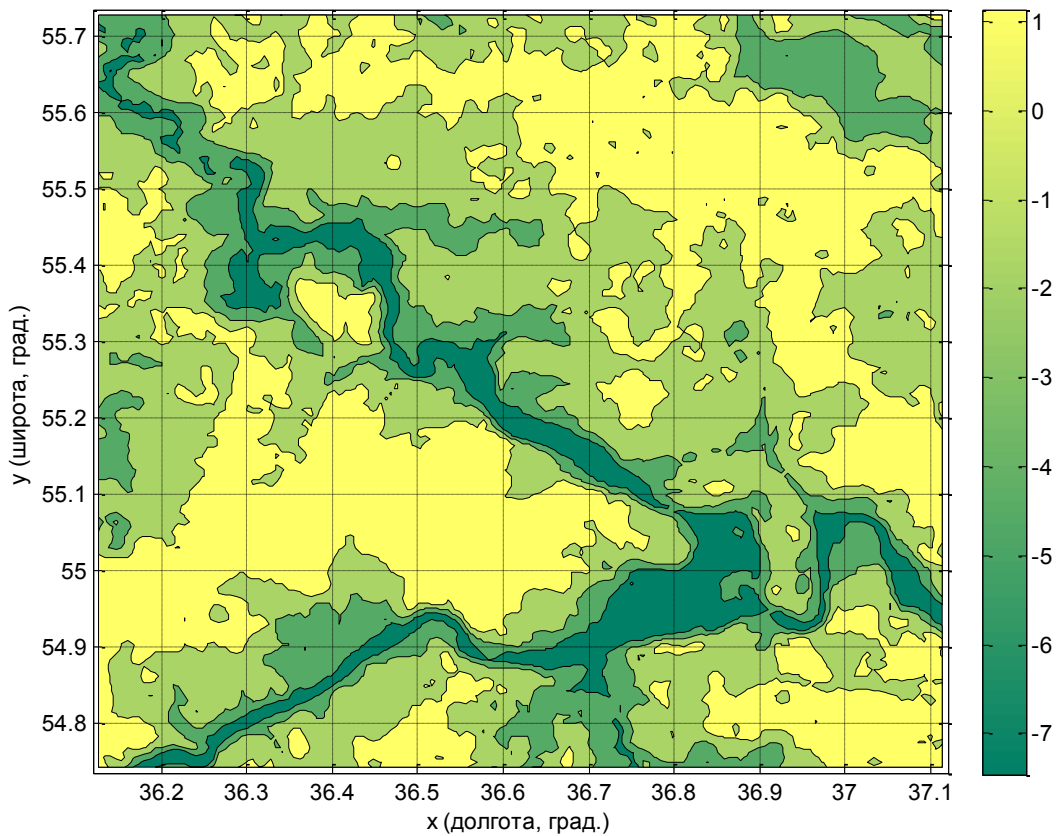


Рис. 7. Результат длительного действия эрозионного процесса. Показана разность между начальным и изменённым рельефом (шкала разностей дана в дм)

ВЫВОДЫ

Исследованы свойства двух моделей («быстрого» и «ε-быстрого») течения воды, дано уравнение движения границы «вода-суша». Предложена модель перемещения грунта, увлекаемого водным потоком, и исследованы её свойства. Изучение свойств моделей сопровождается примерами, допускающими непосредственное вычисление, а также иллюстрируется примерами, требующими компьютерного моделирования. Показано на примерах, что предложенные модели могут оказаться полезными для решения задач геоэкологии [9], связанных с процессами поверхностного стока и эрозии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эглит М.Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах. М., Изд-во МГУ, 1986, 96 с.
2. Кивва С.Л., Железняк М.И. Численное моделирование двумерного открытого потока. Труды международной конференции RDAMM-2001, Новосибирск, т. 6, ч. 2, спец. выпуск, с. 343-350.
3. Zhang, W. and Cundy, T.W. Modelling of Two-dimensional Overland Flow, Water Resources Research, 1989, vol. 25, no. 9, pp. 2019–2035.
4. Гитис В.Г., Петрова Е.Н., Пирогов С.А., Юрков Е.Ф. Математическое моделирование поверхностного стока и переноса загрязнений // Информационные процессы, том 7, № 2, 2007, стр. 168-182 (<http://www.jip.ru/2007/168-182-2007.pdf>).
5. Gitis V.G., Petrova E.N., Pirogov S.A. and Yurkov E.F., Mathematical Modeling of the Pollutants Overland Flow and Transport // Automation and Remote Control, vol. 68, № 9, 2007, pp. 1643-1653.
6. Гитис В.Г., Вайншток А.П., Дерендяев А.Б., Лихачева Э.А., Метриков П.А., Петрова Е.Н., Пирогов С.А., Юрков Е.Ф. Сетевая ГИС для анализа геоэкологической обстановки урбанизированной территории. // В кн.: «Геоэкология Москвы: методология и методы оценки состояния городской среды». М., МедиаПресс, 2006. с. 169-186.
7. Гитис В.Г., Ермаков Б.В. Основы пространственно-временного прогнозирования в геоинформатике. М., Физматлит, 2004, 256 с.
8. Метриков П.А. Геоинформационный анализ и пространственно-временное моделирование поверхностного стока и переноса загрязнений. // В сб. трудов конференции «Информационные технологии и системы», г. Звенигород, 18-21 сент. 2007. М., ИППИ РАН, 2007, с. 183-188
9. Лихачева Э.А., Тимофеев Д.А. Экологическая геоморфология (Словарь-справочник). М., Медиа-Пресс, 2004, 338 с.