Информационные процессы, Том 10, № 2, 201, стр. 181–196.

Свойства субоптимальных последовательных правил проверки непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами

Ф.И. Цитович

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 17.06.2010

Аннотация—В работе изучаются свойства субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, когда множество возможных распределений является непараметрическим. Предполагается, что хвосты распределений на бесконечности имеют экспоненциальную скорость убывания, однако, значение скорости точно не известно. Допустимыми считаются процедуры, обеспечивающие заданную верхнюю границу для максимальной вероятности ошибки. Функцией риска процедуры является максимальное среднее значение продолжительности наблюдений для всех распределений из правильной гипотезы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена продолжению исследований [4] по построению субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, когда множество возможных распределений является непараметрическим. В указанной работе рассматривалась следующая задача.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, на котором определен класс вероятностных мер $\mathcal{P} \ni \mathsf{P}$. Рассмотрим на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ случайную величины $\mathbf{x} : \Omega \to \mathbf{X} \subset \mathbf{R}$, значения которой являются результатами наблюдений. При этом на $\mathbf{X}$ предполагаем наличие σ-алгебры $\mathcal{B}$ и меры μ. Пусть $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$ — класс вероятностных мер на $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$, порожденных случайной величиной $\mathbf{x}$ и классом $\mathcal{P}$. Предположим, что меры, принадлежащие классу $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$, взаимно абсолютно непрерывны, а также абсолютно непрерывны относительно меры μ. Плотность меры $\mathsf{P}_{\mathbf{x}}$ относительно меры μ обозначим через $f(x)$.

В работе [4] рассматривалась задача проверки сложных непараметрических гипотез

$$\tilde{\mathcal{H}}_1^{\varepsilon} : f \in \mathcal{G}_1^{\varepsilon}, \quad \mathcal{H}_2^{\varepsilon} : f \in \mathcal{G}_2^{\varepsilon},$$

где ε может принимать значения от 0 до 1. Множества $\mathcal{G}_i^{\varepsilon}$ состоят из функций $g_{i,\,h_i}(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$g_i(x)(1-\varepsilon) \le g_{i,h_i}(x) \le g_i(x)(1+\varepsilon), \tag{1}$$

$$\int\limits_{\mathbf{X}} g_{i,\,h_i}(x)\, d\,\mu(x) = 1.$$

Здесь $g_i(x)$ — плотности, задающие простые гипотезы

$$\mathcal{H}_1^0 : f = g_1, \quad \mathcal{H}_2^0 : f = g_2. \tag{2}$$

Иначе, плотности из $\mathcal{H}_i$ можно представить в виде

$$g_{i,h_i}(x) = g_i(x)(1 + h_i(x)),$$

где $\sup\limits_{x\in\mathbf{X}} |h_i(x)| \le \varepsilon$.

Множества $\mathcal{G}_i$ можно трактовать как окрестности $g_i(x)$, состоящие из плотностей, относительное отклонение которых от $g_i(x)$ не превосходит малой величины ε. Рассматриваемые окрестности плотностей $g_1(x)$ и $g_2(x)$ могут быть применены, в ситуации, когда в серии наблюдений присутствует малая доля “выбросов”, т.е. наблюдений, вызванных механизмом формирования, отличным от исследуемого $g_i(x)$ (например, задаваемым некоторой плотностью $g^o(x)$). Предполагается, что отделить такие наблюдения от “правильных” не представляется возможным. Тогда для этой ситуации можно применить окрестности, задаваемые соотношениями (1) в случае, когда $g_{i,h_i}(x) = g_i(x)\left(1 - \delta + \delta\frac{g^o(x)}{g_i(x)}\right)$, где δ — доля выбросов в выборке.

Сделанные предположения о виде окрестностей являются естественными при ограниченном множестве $\mathbf{X}$. Однако при неограниченном $\mathbf{X}$ важной становится скорость убывания хвостов распределений. Как правило, в этом случае устанавливаются асимптотические результаты, точность которых не позволяет обеспечить выполнение условия (1). Более того, скорость убывания хвостов распределений зависит от многих факторов, и обеспечить одинаковую скорость убывания для всех распределений не представляется возможным. Это означает, что требование (1) об относительно малой погрешности в определении плотности распределений будет не выполнено: относительная погрешность может, вообще говоря, стремиться к бесконечности, т.е. функции $h_i(x)$ становятся неограниченными. В связи с этим возникает необходимость исследовать влияние неопределенности в скорости убывания хвостов допустимых распределений на свойства субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, предложенной в [4].

Непосредственное использование субоптимальной процедуры из [4] является невозможным, поэтому приводится ее модификация, учитывающая скорость убывания хвостов распределений из множеств $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Кроме того, необходимо исследовать влияние скорости убывания хвостов на свойства построенной процедуры, что позволяет получить более полное представление о влиянии выбросов наблюдений на точность статистических решений.

Материал излагается следующим образом. В разделе 2 приводится постановка задачи и вводятся необходимые обозначения. В следующем разделе приведено описание субоптимальной процедуры, основанной на стратегии из [2]. Субоптимальность понимается в том смысле, что отличие процедуры от оптимальной обусловлено погрешностью описания статистической модели задачи. Далее устанавливаются свойства предложенной субоптимальной процедуры, приводятся формулировки утверждений и доказательства. После чего приведены результаты численного моделирования и выводы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проведем описанные выше модификации в постановки задачи, рассматриваемой в [4], учитывающие предположение об экспоненциальной скорости убывания на хвостах распределений. Для простоты будем считать, что $\mathbf{X} = \mathbf{R}$, а μ — мера Лебега. Будем рассматривать гипотезы

$$\mathcal{H}_1 : f \in \mathcal{G}_1, \quad \mathcal{H}_2 : f \in \mathcal{G}_2, \tag{3}$$

где множества $\mathcal{G}_i$ состоят из плотностей $g_{i,\,h_i}(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$g_i(x)(1-\varepsilon) \le g_{i,h_i}(x) \le g_i(x)(1+\varepsilon), \quad a_i^- \le x \le a_i^+; \tag{4}$$

$$g_i(a_i^-)(1-\varepsilon)\, e^{\,k_{li}^+(x-a_i^-)} \le g_{i,\,h}(x) \le g_i(a_i^-)(1+\varepsilon)\, e^{\,k_{li}^-(x-a_i^-)}, \quad x < a_i^-; \tag{5}$$

$$g_i(a_i^+)(1-\varepsilon)\, e^{\,-k_{ri}^+(x-a_i^+)} \le g_{i,\,h}(x) \le g_i(a_i^+)(1+\varepsilon)\, e^{\,-k_{ri}^-(x-a_i^+)}, \quad x > a_i^+. \tag{6}$$

Гипотезы $\mathcal{H}_i$ зависят, вообще говоря, от ε, но для простоты обозначений эту зависимость будем опускать при их обозначении, а также множеств $\mathcal{G}_i$.

Условие (4) соответствует аналогичному условию в [4], но на ограниченном подмножестве множества $\mathbf{X}$; а (5) и (6) задают скорости убывания хвостов распределений на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Интервалы $A_i := [a_i^-, a_i^+]$ задают области, в которых сосредоточена большая часть значений наблюдений:

$$\sup_{f \in \mathcal{H}_i} \mathsf{P}(x < a_i^-) \leq p_i^-, \quad \sup_{f \in \mathcal{H}_i} \mathsf{P}(x > a_i^+) \leq p_i^+, \tag{7}$$

где p_i^- и p_i^+ некоторые малые числа.

В сделанных выше предположениях (5) и (6) на скорость убывания функции распределения на хвостах справедливы оценки для величин p_i^- и p_i^+:

$$p_i^- \leq \frac{g_i(a_i^-)(1+\varepsilon)}{k_{li}^-}, \quad p_i^+ \leq \frac{g_i(a_i^+)(1+\varepsilon)}{k_{ri}^-}. \tag{8}$$

Вне интервалов A_i границы изменения значений распределения наблюдений определяются их большими уклонениями и могут быть определены на основании предельных теорем о больших уклонениях. В настоящей работе рассматривается наиболее распространенный случай экспоненциально убывающих хвостов распределений. Параметры, задающие скорость убывания хвостов распределений, как правило, точно неизвестны, поскольку зависят от некоторых общих свойств рассматриваемых наблюдений в области больших уклонений, и могут быть определены лишь с некоторой точностью. Этот факт и отражает выбор границ k_{ri}^-, k_{ri}^+, k_{li}^- и k_{li}^+ интервалов изменения скорости убывания хвостов распределения, которые могут существенно различаться.

Как будет видно далее, необходимо различать три варианта взаимного расположения интервалов A_i (для оставшихся трех вариантов расположения интервалов все доказательства утверждений проводятся аналогично):

Вариант 1: интервалы частично перекрываются; для определенности будем считать, что интервал A_1 начинается левее интервала A_2.

Вариант 2: один интервал накрывает другой; для определенности будем считать, что $A_1 \supseteq A_2$.

Вариант 3: интервалы не пересекаются; для определенности будем считать, что интервал A_1 находится левее интервала A_2. рис. 1.

Заметим, что первый случай соответствует ситуации, когда распределения, задаваемые плотностями g_i, имеют различные средние $\mathsf{E}_{g_i}(x)$(нами рассматривается случай $\mathsf{E}_{g_1}(x) < \mathsf{E}_{g_2}(x)$); второй случай, когда наблюдения имеют примерно одинаковые средние, но различные дисперсии D_i в зависимости от того, какая гипотеза справедлива (нами рассматривается случай $D_1 < D_2$). Третий случай соответствует ситуации, когда распределения далеки друг от друга; в этом случае информационное уклонение Кульбака (10) $\mathsf{I}(g_1, g_2) \gg 1$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — наблюдения случайной величины $\mathbf{x}$, т.е. независимые одинаково распределенные случайные величины согласно закону P_x.

В данной работе, как и в [4], будем рассматривать только последовательные процедуры проверки гипотез $d = \langle \tau, \delta \rangle$, состоящие из момента остановки τ и решающего правила δ: если $\delta = i$, то принимаем гипотезу $\mathcal{H}_i$. Для определения допустимой процедуры используется понятие естественной фильтрации: $\left\{\mathcal{F}_n\right\}$, порождаемой наблюдениями, т.е. $\mathcal{F}_n = \sigma(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 1. Процедура $d = \langle \tau, \delta \rangle$ для задачи проверки гипотез (3) называется допустимой, если выполнены следующие условия:

1. τ — марковский момент остановки относительно фильтрации $\Big\{\mathcal{F}_n\Big\}$, т.е. $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $\Big\{\omega : \tau(\omega) \le n\Big\} \in \mathcal{F}_n$ и $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$.

2. Решающее правило $\delta(\cdot)$ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримым, т.е. $\delta = \delta(x_1, \ldots, x_\tau)$.

3. Стратегия d обеспечивает заданный уровень максимальной вероятности ошибки принятия неправильного решения для всех распределений из гипотезы, т.е. при всех $i \ne j$ выполнено неравенство

$$\sup_{f \in \mathcal{H}_j} \mathsf{P}\left(\delta(x_1, \ldots, x_\tau) = i\right) \le \alpha, \tag{9}$$

т.е. процедура является гарантийной.

Множество допустимых процедур для заданного уровня вероятности принятия ошибочного решения α обозначим через $\mathcal{D}(\alpha)$.

3. ОПИСАНИЕ СУБОПТИМАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ d_0

При описании субоптимальной последовательной процедуры d_0 будем следовать [4] с необходимыми изменениями. Пусть $z_{f,g}(x) := \ln \frac{f(x)}{g(x)}$. Через $\mathsf{I}\,(g_1, g_2)$ обозначим "расстояние" Кульбака–Лейбнера между распределениями, задаваемыми плотностями $g_1(x)$ и $g_2(x)$, т.е.

$$\mathsf{I}\,(g_1, g_2) = \mathsf{E}_f z_{f,g}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{g_1(x)}{g_2(x)} g_1(x)\, d\mu(x). \tag{10}$$

Для построения субоптимальной процедуры, основанной на отношении правдоподобия, необходимо определить правило выбора наиболее подходящего распределения $\tilde{g}_i$ из множества $\mathcal{G}_i$. Выбор распределения должен быть ориентирован на минимизацию потерь, связанных с неправильным выбором распределения. Если f — истинная плотность распределения, а $\tilde{f}$ — эталонная плотность распределения, то средние потери на каждом наблюдении при использовании отношения правдоподобия, основанного на использовании эталонного распределения вместо правильного, составят величину $\mathsf{I}\,(f, \tilde{f})$. Поэтому в качестве $\tilde{g}$ следует использовать

$$\arg \min_{\tilde{g} \in \mathcal{H}_i} \sup_{g \in \mathcal{H}_i} \mathsf{I}\,(g_i, \tilde{g}_i).$$

Решение задачи поиска $\tilde{g}_i$ является сложной; в качестве приближенного решения, обеспечивающего требуемую точность для построения субоптимальной процедуры, можно взять

$$g_i^*(x) = \begin{cases} g_i(a_i^-)(1 + c_i)e^{k_{li}^-(x - a_i^-)}, & \text{если } x < a_i^-; \\ g_i(x)(1 + c_i), & \text{если } a_i^- \le x \le a_i^+; \\ g_i(a_i^+)(1 + c_i)e^{-k_{ri}^-(x - a_i^+)}, & \text{если } x > a_i^+, \end{cases}$$

Значение постоянных c_i определяется из условия нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_i^*(x)\, d\mu(x) = 1.$$

При этом должно выполняться условие $|c_i| \le \varepsilon$.

Аналогично с [4] будем использовать в решающем правиле статистику следующего вида:

$$L_i(n) := \inf_{g \in A(g_i)} \sum_{i=1}^{n} z_{g_i^*, g}(x_i). \tag{11}$$

Здесь $A(g)$ — альтернативное множество для плотности g, т.е. $A(g) := \mathcal{G}_2$, если $g \in \mathcal{G}_1$, и $A(g) := \mathcal{G}_1$, если $g \in \mathcal{G}_2$.

Пусть τ_0 — минимальное значение n, для которого

$$\max_{i=1,2} L_i(n) \geq -\ln\alpha, \tag{12}$$

тогда принимаемое решение

$$\delta = i, \text{ если } L_i(\tau_0) \geq -\ln\alpha. \tag{13}$$

Отметим, что решение определено корректно, поскольку из определения $L_i(n)$ следует, что если $L_1(n) > 0$, то $L_2(n) < 0$, и наоборот.

Выбранная форма гипотез $\mathcal{H}_i$, как и в случае [4], позволят непосредственно вычислить значение функционала $L_i(n)$:

$$L_1(n) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{g_1^*(x_i)}{\sup\limits_{g \in \mathcal{H}_2} g(x_i),} \quad L_2(n) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{g_2^*(x_i)}{\sup\limits_{g \in \mathcal{H}_1} g(x_i)}. \tag{14}$$

В первом случае расположения интервалов A_1 и A_2 получим следующий вид формулы (14):

$$\begin{aligned} L_1(n) = n \ln\left(\frac{1+c_1}{1+\varepsilon}\right) &+ \sum_{i: x_i \leq a_1^-} \Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^-)}{g_2(a_2^-)}\right) + k_{l1}(x_i - a_1^-) - k_{l2}^-(x_i - a_2^-)\Big) + \\ &+ \sum_{i: a_1^- < x_i \leq a_2^-} \Big(\ln\left(\frac{g_1(x_i)}{g_2(a_2^-)}\right) - k_{l2}^-(x_i - a_2^-)\Big) + \sum_{i: a_2^- < x_i \leq a_1^+} \ln\left(\frac{g_1(x_i)}{g_2(x_i)}\right) + \\ &+ \sum_{i: a_1^+ < x_i \leq a_2^+} \Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^+)}{g_2(x_i)}\right) - k_{r1}^-(x_i - a_1^+)\Big) + \\ &+ \sum_{i: x_i > a_2^+} \Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^+)}\right) - k_{r1}^-(x_i - a_1^+) + k_{r1}^-(x_i - a_2^+)\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(n) = n \ln\left(\frac{1+c_2}{1+\varepsilon}\right) &+ \sum_{i: x_i \leq a_1^-} \Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^-)}{g_1(a_1^-)}\right) - k_{l1}(x_i - a_1^-) + k_{l2}^-(x_i - a_2^-)\Big) + \\ &+ \sum_{i: a_1^- < x_i \leq a_2^-} \Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^-)}{g_1(x_i)}\right) + k_{l2}^-(x_i - a_2^-)\Big) + \sum_{i: a_2^- < x_i \leq a_1^+} \ln\left(\frac{g_2(x_i)}{g_1(x_i)}\right) + \\ &+ \sum_{i: a_1^+ < x_i \leq a_2^+} \Big(\ln\left(\frac{g_2(x_i)}{g_1(a_1^+)}\right) + k_{r1}^-(x_i - a_1^+)\Big) + \\ &+ \sum_{i: x_i > a_2^+} \Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^+)}{g_1(a_1^+)}\right) + k_{r1}^-(x_i - a_1^+) - k_{r1}^-(x_i - a_2^+)\Big). \end{aligned}$$

Во втором случае расположения интервалов A_1 и A_2 получаем

$$L_1(n) = n\ln\left(\frac{1+c_1}{1+\varepsilon}\right) + \sum_{i:x_i\le a_2^-}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^-)}{g_2(a_2^-)}\right) + k_{l1}^-(x_i-a_1^-) - k_{l2}^-(x_i-a_2^-)\Big)+$$
$$+\sum_{i:a_2^-<x_i\le a_1^-}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^-)}{g_2(x_i)}\right) - k_{l1}^-(x_i-a_1^-)\Big)+\sum_{i:a_1^-<x_i\le a_1^+}\ln\left(\frac{g_1(x_i)}{g_2(x_i)}\right)+$$
$$+\sum_{i:a_1^+<x_i\le a_2^+}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^+)}{g_2(x_i)}\right) - k_{r1}^-(x_i-a_1^+)\Big)+$$
$$+\sum_{i:x_i>a_2^+}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^+)}\right) - k_{r1}^-(x_i-a_1^+) + k_{r2}^-(x_i-a_2^+)\Big).$$

$$L_2(n) = n\ln\left(\frac{1+c_2}{1+\varepsilon}\right) + \sum_{i:x_i\le a_2^-}\Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^-)}{g_1(a_1^-)}\right) - k_{l1}^-(x_i-a_1^-) + k_{l2}^-(x_i-a_2^-)\Big)+$$
$$+\sum_{i:a_2^-<x_i\le a_1^-}\Big(\ln\left(\frac{g_2(x_i)}{g_1(a_1^-)}\right) + k_{l1}^-(x_i-a_1^-)\Big)+\sum_{i:a_1^-<x_i\le a_1^+}\ln\left(\frac{g_2(x_i)}{g_1(x_i)}\right)+$$
$$+\sum_{i:a_1^+<x_i\le a_2^+}\Big(\ln\left(\frac{g_2(x_i)}{g_1(a_1^+)}\right) + k_{r1}^-(x_i-a_1^+)\Big)+$$
$$+\sum_{i:x_i>a_2^+}\Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^+)}{g_1(a_1^+)}\right) + k_{r1}^-(x_i-a_1^+) - k_{r2}^-(x_i-a_2^+)\Big).$$

В третьем случае расположения интервалов A_1 и A_2 будет

$$L_1(n) = n\ln\left(\frac{1+c_1}{1+\varepsilon}\right) + \sum_{i:x_i\le a_1^-}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^-)}{g_2(a_2^-)}\right) + k_{l1}^-(x_i-a_1^-) - k_{l2}^-(x_i-a_2^-)\Big)+$$
$$+\sum_{i:a_1^-<x_i\le a_1^+}\Big(\ln\left(\frac{g_1(x_i)}{g_2(a_2^-)}\right) - k_{l2}^-(x_i-a_2^-)\Big)+$$
$$+\sum_{i:a_1^+<x_i\le a_2^-}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^-)}\right) - k_{r1}^-(x_i-a_1^+) - k_{l2}^-(x_i-a_2^-)\Big)+$$
$$+\sum_{i:a_2^-<x_i\le a_2^+}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^+)}{g_2(x_i)}\right) - k_{r1}^-(x_i-a_1^+)\Big)+$$
$$+\sum_{i:x_i>a_2^+}\Big(\ln\left(\frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^+)}\right) - (k_{r1}^-(x_i-a_1^+) + (k_{r2}^-(x_i-a_2^+)\Big).$$

$$L_2(n) = n \ln\left(\frac{1+c_2}{1+\varepsilon}\right) + \sum_{i:x_i \le a_1^-} \Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^-)}{g_1(a_1^-)}\right) - k_{l1}^-(x_i - a_1^-) + k_{l2}^-(x_i - a_2^-)\Big) +$$

$$+ \sum_{i:a_1^- < x_i \le a_1^+} \Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^-)}{g_1(x_i)}\right) + k_{l2}^-(x_i - a_2^-)\Big) +$$

$$+ \sum_{i:a_1^+ < x_i \le a_2^-} \Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^-)}{g_1(a_1^+)}\right) + k_{r1}^-(x_i - a_1^+) + k_{l2}^-(x_i - a_2^-)\Big) +$$

$$+ \sum_{i:a_2^- < x_i \le a_2^+} \Big(\ln\left(\frac{g_2(x_i)}{g_1(a_1^+)}\right) + k_{r1}^-(x_i - a_1^+)\Big) +$$

$$+ \sum_{i:x_i > a_2^+} \Big(\ln\left(\frac{g_2(a_2^+)}{g_1(a_1^+)}\right) + (k_{r1}^-(x_i - a_1^+) - (k_{r2}^-(x_i - a_2^+)\Big).$$

Таким образом, вид статистик $L_1(n)$ и $L_2(n)$ существенно усложнился по сравнению с соответствующими статистиками для проверки простых гипотез и по сравнению с соответствующими статистиками из [4]. Новая статистика зависит не только от интервалов A_i, но и от нижних границ скорости убывания хвостов распределений. От верхних границ скорости убывания хвостов статистика не зависит.

4. СВОЙСТВА СУБОПТИМАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ d_0

Введенная в предыдущем пункте процедура d^0 является корректно определенной, т.е. принадлежит классу $\mathcal{D}(\alpha)$, на основании следующего утверждения.

Теорема 1. *Процедура d^0 является допустимой процедурой.*

Доказательство. Очевидно, что описанная процедура d^0 удовлетворяет требованиям 1-2 из определения допустимой процедуры. Докажем, что для нее также выполняется и требования 3, т.е. выполнено неравенство (9). Пусть для определенности $f \in \mathcal{H}_1$, тогда ошибочное решение как это следует из (13), будет в том случае, когда $L_2(\tau) \ge -\ln\alpha$. Рассмотрим переход от меры, порождающей плотность f, к мере, порождающей плотность g_2.

$$\mathsf{P}_{\mathbf{x}}(\delta = 2) = \mathsf{P}_{\mathbf{x}}(L_2(\tau) \ge -\ln\alpha) = \mathsf{E}_f\left(\mathcal{I}(L_2(\tau) \ge -\ln\alpha)\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(L_2(\tau) \ge -\ln\alpha)\, f(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(L_2(\tau) \ge -\ln\alpha)\, \frac{f(x)}{g_2^*(x)}\, g_2^*(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(L_2(\tau) \ge -\ln\alpha)\, e^{\,z_{f,\,g_2^*}(x)}\, g_2^*(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \mathsf{E}_{g_2^*}\Big(e^{\,z_{f,\,g_2^*}(x)}\,\mathcal{I}(L_2(\tau) \ge -\ln\alpha)\Big) = \mathsf{E}_{g_2^*}\Big(e^{\,-z_{g_2^*,\,f}(x)}\,\mathcal{I}(L_2(\tau) \ge -\ln\alpha)\Big).$$

Здесь $\mathcal{I}(A)$ — индикаторная функция события A.

Поскольку $L_2(n) = \inf\limits_{g\in A(g_2)} \sum\limits_{i=1}^{n} z_{g_2^*,g}(x_i)$ и по нашему предположению $f \in \mathcal{H}_1$, то справедливо следующее неравенство:

$$\mathsf{E}_{g_2^*}\left(e^{\,-z_{g_2^*,\,f}(x)}\,\mathcal{I}\left(L_2(\tau) \geq -\ln\alpha\right)\right) \leq \mathsf{E}_{g_2^*}\left(e^{\,-L_2(\tau)}\mathcal{I}\left(L_2(\tau) \geq -\ln\alpha\right)\right).$$

Из определения множества $\{L_2(\tau) \geq -\ln\alpha\}$ следует, что

$$\mathsf{E}_{g_2^*}\left(e^{\,-L_2(\tau)}\mathcal{I}\left(L_2(\tau) \geq -\ln\alpha\right)\right) \leq \mathsf{E}_{g_2^*}\left(\alpha\,\mathcal{I}\left(L_2(\tau) \geq -\ln\alpha\right)\right) \leq \alpha.$$

Таким образом мы получаем, что вероятность принятия ошибочного решения не превосходит заданный уровень α.

Доказательство требуемой оценки в случае, когда $f \in \mathcal{H}_2$, проводится аналогично.

Определение 2. Функцией риска процедуры $d = \langle\tau, \delta\rangle$ для задачи проверки гипотез (3) назовем максимальную среднюю продолжительность процедуры, т.е.

$$R_{\mathcal{H}_i}(d) = \sup_{f\in\mathcal{H}_i} \mathsf{E}_f\,\tau. \tag{15}$$

Следующая оценки снизу для функции риска справедлива для любой допустимой процедуры задачи (3).

Теорема 2. *(Нижняя граница) Пусть $d = \langle\tau, \delta\rangle$ — допустимая последовательная процедура для задачи проверки гипотез* (3)*. Тогда*

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{H}_1}(d) &\geq \frac{C(\alpha)}{\sup\limits_{p_1\in\,\mathcal{H}_1} I_2(p_1)}, \\ R_{\mathcal{H}_2}(d) &\geq \frac{C(\alpha)}{\sup\limits_{p_2\in\,\mathcal{H}_2} I_2(p_2)}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $C(\alpha) = (1-2\alpha)\ln\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ *и*

$$\begin{aligned} I_2(p_1) = &\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln\frac{p_1(x)}{\tilde{g}_2(x)(1+\varepsilon)}\right)p_1(x)d\mu(x) - \\ &-\int\limits_{-\infty}^{a_2^-} k_{l2}^-(x-a_2^-)p_1(x)d\mu(x) + \int\limits_{a_2^+}^{+\infty} k_{r2}^-(x-a_2^+)p_1(x)d\mu(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся классическим результатом Вальда для последовательного теста задачи проверки простых гипотез

$$\mathcal{H}_1^{p_1} : f = p_1, \quad \mathcal{H}_2^{p_2} : f = p_2, \tag{18}$$

где $p_1 \in \mathcal{H}_1$ и $p_2 \in \mathcal{H}_2$.

Теорема 3. (А.Вальд; [1], с. 197]) *Пусть* $d_{p_1,\,p_2} =< \tau_{p_1,\,p_2}, \delta_{p_1,\,p_2} >$ — *последовательный критерий задачи* (18), *удовлетворяющий следующим условиям*
1) $\mathsf{P}_{p_i}(\tau_{p_1,\,p_2} < \infty) = 1$;

2) $\mathsf{P}_{p_i}(\delta(x_1,\ldots,x_\tau) = 2) \le \alpha$, *если* $f{=}p_1$, *и, аналогично,* $\mathsf{P}_{p_i}(\delta(x_1,\ldots,x_\tau) = 1) \le \alpha$, *если* $f{=}p_2$. *Тогда*

$$\mathsf{E}_{p_1}\tau_{p_1,\,p_2} \ge \frac{(1-2\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}}{\mathsf{E}_{p_1}\,\ln\frac{p_1(x)}{p_2(x)}}, \qquad \mathsf{E}_{p_2}\tau_{p_1,\,p_2} \ge \frac{(1-2\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}}{\mathsf{E}_{p_2}\,\ln\frac{p_2(x)}{p_1(x)}}. \tag{19}$$

Поскольку процедура $d = \langle\tau,\delta\rangle$ является гарантийной, т.е. выполняется условие 4 определения допустимой процедуры, то она удовлетворяет условиям теоремы 3, значит для функции риска d выполняется (19):

$$\mathsf{E}_{p_1}\tau \ge \frac{(1-2\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}}{\mathsf{E}_{p_1}\,\ln\frac{p_1(x)}{p_2(x)}}, \qquad \mathsf{E}_{p_2}\tau \ge \frac{(1-2\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}}{\mathsf{E}_{p_2}\,\ln\frac{p_2(x)}{p_1(x)}}.$$

Поскольку это условие выполняется $\forall\ p_1 \in \mathcal{G}_1$ и $\forall\ p_2 \in \mathcal{G}_1$, то взяв точную верхнюю грань по всем $p_1 \in \mathcal{G}_1$ и $p_2 \in \mathcal{G}_2$ и, замечая, что левая часть первого неравенства не зависит от p_2, левая часть второго неравенства не зависит от p_1, получаем

$$\sup_{p_1(x)\in\mathcal{G}_1} \mathsf{E}_{p_1}\tau = \mathsf{R}_{\mathcal{H}_1}(d) \ge \frac{C(\alpha)}{\inf_{\substack{p_1(x)\in\mathcal{G}_1\\ p_2(x)\in\mathcal{G}_2}} \mathsf{E}_{p_1}\,\ln\frac{p_1(x)}{p_2(x)}}, \qquad \sup_{p_2(x)\in\mathcal{G}_2} \mathsf{E}_{p_2}\tau = \mathsf{R}_{\mathcal{H}_2}(d) \ge \frac{C(\alpha)}{\inf_{\substack{p_1(x)\in\mathcal{G}_1\\ p_2(x)\in\mathcal{G}_2}} \mathsf{E}_{p_2}\,\ln\frac{p_2(x)}{p_1(x)}}. \tag{20}$$

Используя вид гипотез $\mathcal{H}_i$ получаем оценки

$$\inf_{p_2(x)\in\mathcal{G}_2} \mathsf{E}_{p_1}\ln\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \ge \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln\frac{p_1(x)}{\tilde{g}_2(x)(1+\varepsilon)}\right)p_1(x)d\mu(x) - \\ - \int\limits_{-\infty}^{a_2^-} k_{l2}^-(x-a_2^-)p_1(x)d\mu(x) + \int\limits_{a_2^+}^{+\infty} k_{r2}^-(x-a_2^+)p_1(x)d\mu(x) =: I_2(p_1), \tag{21}$$

$$\inf_{p_1(x)\in\mathcal{G}_1} \mathsf{E}_{p_2} \ln\frac{p_2(x)}{p_1(x)} \geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln\frac{p_2(x)}{\tilde{g}_1(x)(1+\varepsilon)}\right) p_2(x)d\mu(x) - \\ - \int\limits_{-\infty}^{a_1^-} k_{l1}^-(x-a_1^-)p_2(x)d\mu(x) + \int\limits_{a_1^+}^{+\infty} k_{r1}^-(x-a_1^+)p_2(x)d\mu(x) =: I_2(p_2). \tag{22}$$

Объединяя (20)–(22) получаем необходимое неравенство (16).

Для процедуры d_0 справедлива оценка сверху для функции риска.

Теорема 4. *(Верхняя граница) Существует такая константа K_1, что*

$$R_{\mathcal{H}_1}(d_0) \leq \frac{-\ln\alpha + K_1}{\sup\limits_{p_1\in G_1} I_1(p_1)},$$

где

$$I_1(p_1) = \ln\left(\frac{1+c}{1+\varepsilon}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}\right) p_1(x)d\mu(x) +$$

$$+\int_{-\infty}^{a_1^-}\left((k_{l1}^- - k_{l2}^-)(x-a_1^-) + k_{l2}^-(a_2^- - a_1^-)\right) p_1(x)d\mu(x) - \int_{a_1^-}^{a_2^-} k_{l2}^-(x-a_2^-)p_1(x)d\mu(x) -$$

$$-\int_{a_1^+}^{a_2^+} k_{r1}^-(x-a_1^+)p_1(x)d\mu(x) - \int_{a_2^+}^{+\infty} \left((k_{r1}^- - k_{r2}^-)(x-a_1^+) + k_{r2}^-(a_2^+ - a_1^+)\right) p_1(x)d\mu(x)$$

и

$$\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i\,(a_i^-), & \text{если } x < a_i^-; \\ g_i\,(x), & \text{если } a_i^- \leq x \leq a_i^+; \\ g_i\,(a_i^+), & \text{если } x > a_i^+. \end{cases}$$

Доказательство. Из вида статистик $L_i(n)$ видно, что вычисление средней продолжительности процедуры принятия решения можно оценивать как и в случае проверки простых гипотез. Докажем утверждение для случая, когда справедлива гипотеза $\mathcal{H}_1$. Для случая, когда справедлива $\mathcal{H}_2$, доказательство аналогично. По определению момент остановки наблюдений

$$\tau_{d_0} = \min_{i=1,\,2} \tau_i,$$

где τ_i — первый момент достижения статистикой $L_i(n)$ уровня $-\ln\alpha$. Для произвольного $p_1 \in \mathcal{H}_1$, применяя тождество Вальда к случайным величинам $z_{g_1,g_2}(x)$, получаем

$$\mathsf{E}_{p_1} L_1(\tau_1) = \mathsf{E}_{p_1}\,\Delta L_1\;\mathsf{E}_{p_1}\,\tau_1. \tag{23}$$

Здесь $\Delta L_1(i)$ — приращения функционала $L_1(i)$:

$$\Delta L_1(i) := L_1(i) - L_1(i-1),\; L_1(0) := 0.$$

Рассмотрим случайную величину

$$\chi_1(x_1,\ldots,x_{\tau_1}) := L_1(\tau_1)(x_1,\ldots,x_{\tau_1}) + \ln\alpha, \tag{24}$$

называемую величиной перескока уровня $-\ln\alpha$ случайным процессом $L_1(n)$ (если рассматривать статистику $L_1(n)$ как случайный процесс с дискретным временем). Из определения случайной величины χ_1 следует, что

$$\mathsf{E}_{p_1} L_1(\tau_1) = -\ln\alpha + \mathsf{E}_{p_1}\chi_1.$$

Объединяя это равенство и (23) получаем, что

$$\mathsf{E}_{p_1} L_1(\tau_1) = \mathsf{E}_{p_1}\,\Delta L_1\;\mathsf{E}_{p_1}\,\tau_1 = -\ln\alpha + \mathsf{E}_{p_1}\chi_1,$$

т.е.

$$\mathsf{E}_{p_1}\tau_1 = \frac{-\ln\alpha + \mathsf{E}_{p_1}\chi_1}{\mathsf{E}_{p_1}\,\Delta L_1}. \tag{25}$$

Из экспоненциальной скорости убывания хвостов распределений следует, что выполнены условия регулярности из [3] и среднее значение величины перескока ограничено:

$$\mathsf{E}_{\,p_1}\chi_1 \le K_1, \tag{26}$$

K_1 — некоторая постоянная, зависящая только от распределений $g_1(x)$ и $g_2(x)$. Следовательно,

$$\mathsf{E}_{p_1}\tau_1 \le \frac{-\ln\alpha + K_1}{\mathsf{E}_{p_1}\,\Delta L_1}. \tag{27}$$

Из определения статистики $L_1(i)$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{p_1}\Delta L_1(i) = \ln\left(\frac{1+c}{1+\varepsilon}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{\tilde g_1(x)}{\tilde g_2(x)}\right) p_1(x)d\mu(x) + \\
+ \int_{-\infty}^{a_1^-} \left((k_{l1}^- - k_{l2}^-)(x-a_1^-) + k_{l2}^-(a_2^- - a_1^-)\right) p_1(x)d\mu(x) - \\
- \int_{a_1^-}^{a_2^-} k_{l2}^-(x-a_2^-)p_1(x)d\mu(x) - \int_{a_1^+}^{a_2^+} k_{r1}^-(x-a_1^+)p_1(x)d\mu(x) - \\
- \int_{a_2^+}^{+\infty} \left((k_{r1}^- - k_{r2}^-)(x-a_1^+) + k_{r2}^-(a_2^+ - a_1^+)\right) p_1(x)d\mu(x) =: I_1(p_1).
\end{aligned} \tag{28}$$

Объединяя (27) и (28) получаем, что

$$\mathsf{E}_{p_1}\tau_1 \le \frac{-\ln\alpha + K_1}{I_1(p_1)}. \tag{29}$$

Поскольку (29) выполняется для любого $p_1 \in \mathcal{H}_1$, то, переходя к точной верхней грани получаем требуемое неравенство.

Обозначим главный член функции риска при $\alpha \to 0$ через

$$J_{\mathcal{H}_i}(d) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{R_{\mathcal{H}_i}(d)}{-\ln\alpha}. \tag{30}$$

Предположим, что имеется допустимая процедура d^* решает задачу (3) для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, т.е. фактически семейство процедур, работающих для всех достаточно малых окрестностей G_i.

Определение 3. Назовем допустимую процедуру $d^* \in \mathcal{D}(\alpha)$ решения задачи проверки гипотез (3) субоптимальной, если

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ p_i^+\to 0,\ p_i^-\to 0}} J_{\mathcal{H}_i}(d^*) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ p_i^+\to 0,\ p_i^-\to 0}} \inf_{d\in\mathcal{D}(\alpha)} J_{\mathcal{H}_i}(d). \tag{31}$$

Смысл определения состоит в том, что при сжатии окрестностей заданных распределений g_1 и g_2 до нуля получаем асимптотически оптимальную процедуру при $\alpha \to 0$. В наших обозначениях сжатие окрестностей означает, что $\varepsilon \to 0$ и вероятности $p_i^+, p_i^-, i = 1, 2$, определяемые формулами (7), также стремятся к нулю.

Теорема 5. *Процедура d_0 является субоптимальной.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $f \in \mathcal{H}_1$. По теореме 2

$$J_{\mathcal{H}_i}(d^0) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{R_{\mathcal{H}_i}(d)}{-\ln\alpha} \geq \lim_{\alpha\to 0}\frac{(1-2\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}}{(-\ln\alpha)\sup\limits_{p_1\in\mathcal{H}_1} I_2(p_1)} = \frac{1}{\sup\limits_{p_1\in\mathcal{H}_1} I_2(p_1)}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ p_i^+\to 0,\ p_i^-\to 0}} J_{\mathcal{H}_i}(d^0) \geq \lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ p_i^+\to 0,\ p_i^-\to 0}} \frac{1}{\sup\limits_{p_1\in\mathcal{H}_1} I_2(p_1)} = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(\frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}\right)p_1(x)d\mu(x)} \tag{32}$$

По теореме 4

$$J_{\mathcal{H}_i}(d^0) \leq \lim_{\alpha\to 0}\frac{-\ln\alpha + K_1}{(-\ln\alpha)\sup\limits_{p_1\in H_1} I_1(p_1)} = \frac{1}{\sup\limits_{p_1\in H_1} I_1(p_1)}.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$,
$p_i^+ \to 0,\ p_i^- \to 0$, получаем

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ p_i^+\to 0,\ p_i^-\to 0}} J_{\mathcal{H}_i}(d^0) \leq \lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ p_i^+\to 0,\ p_i^-\to 0}} \frac{1}{\sup\limits_{p_1\in\mathcal{H}_1} I_1(p_1)} = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(\frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}\right)p_1(x)d\mu(x)}. \tag{33}$$

Объединяя (32) и (33) получаем, что процедура d^0 является субоптимальной.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При компьютерном моделировании использовалась последовательность псевдослучайных чисел, статистические свойства которых близки к свойствам равномерного распределения на отрезке [0, 1]. Получаемые значения $y_1, y_2, \ldots$ пропускались через фильтр для получения случайной величины равномерно распределенной на отрезке $[a^-;\ a^+]$ и имеющей экспоненциально убывающие хвосты на интервалах $(-\infty;\ a^-)$ и $(a^+;\ +\infty)$. Таким образом, функция распределения случайной величины $\mathbf{y}$ имела следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} p^- e^{k^-(x-a^-)}, & \text{если } x \in (-\infty;\ a^-); \\ p^- + \frac{(x-a^-)(1-p^+-p^-)}{a^+-a^-}, & \text{если } x \in [a^-;\ a^+]; \\ 1 - p^+\, e^{k^+(a^+-x)}, & \text{если } x \in (a^+;\ +\infty), \end{cases}$$

где

$$p^- = \frac{1}{k^-(a^+ - a^- + \frac{k^-+k^+}{k^-k^+})}, \quad p^+ = \frac{1}{k^+(a^+ - a^- + \frac{k^-+k^+}{k^-k^+})}$$

— вероятности попадания в хвост распределения. Поэтому плотности $g_1(x)$ и $g_2(x)$ имеют вид:

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_1^+-a_1^-+\frac{k_1^-+k_1^+}{k_1^-k_1^+}}\, e^{k_1^-(x-a_1^-)}, & \text{если } x \in (-\infty;\ a_1^-); \\ \frac{1}{a_1^+-a_1^-+\frac{k_1^-+k_1^+}{k_1^-k_1^+}}, & \text{если } x \in [a_1^-;\ a_1^+]; \\ \frac{1}{a_1^+-a_1^-+\frac{k_1^-+k_1^+}{k_1^-k_1^+}}\, e^{k_1^+(a_1^+-x)}, & \text{если } x \in (a_1^+;\ +\infty), \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_2^+-a_2^-+\frac{k_2^-+k_2^+}{k_2^-k_2^+}}\, e^{k_2^-(x-a_2^-)}, & \text{если } x \in (-\infty;\ a_2^-); \\ \frac{1}{a_2^+-a_2^-+\frac{k_2^-+k_2^+}{k_2^-k_2^+}}, & \text{если } x \in [a_2^-;\ a_2^+]; \\ \frac{1}{a_2^+-a_2^-+\frac{k_2^-+k_2^+}{k_2^-k_2^+}}\, e^{k_2^+(a_2^+-x)}, & \text{если } x \in (a_2^+;\ +\infty). \end{cases}$$

Для моделирования флуктуаций плотности распределения наблюдений, задаваемых условиями (4), использовался следующий прием. В качестве наблюдений рассматривались величины $x_1, x_2, \ldots$, полученные из $y_1, y_2, \ldots$ по следующей формуле:

$$x_i = \begin{cases} y_i, & \text{если } y_i \le a^-; \\ y_i(1+z), & \text{если } a^- \le y_i \le \dfrac{a^+ + a^-}{2}; \\ 1-(1-y_i)(1-z), & \text{если } \dfrac{a^+ + a^-}{2} \le y_i \le a^+; \\ y_i, & \text{если } y_i \le a^+, \end{cases}$$

где $z \le \varepsilon$. Это означает, что на отрезке $[a^-;\ \dfrac{a^+ + a^-}{2}(1+z)]$ плотность в $1+z$ раз меньше, чем у $g_i(x)$, а на интервале $(\dfrac{a^+ + a^-}{2}(1+z); a^+]$ — в $1+z$ раз больше, чем у $g_i(x)$.

При численном моделировании субоптимальная процедура сравнивалась с классической последовательной процедурой проверки простых гипотез (2). В рамках данной процедуры вычисляются значения функционалов

$$L_1^0(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_1(x_i)}{g_2(x_i)}; \quad L_2^0(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_2(x_i)}{g_1(x_i)}.$$

Поскольку значение скорости убывания хвостов, вообще говоря, не известно, то при вычислении этих функционалов предполагалось, что скорость хвостов $k_0 = k_1^- = k_1^+ = k_2^- = k_2^+$ может отличаться от их реальных значений, используемых при моделировании.

Пусть τ_0^0— минимальное значение n, для которого $\max_{i=1,2} L_i^0(n) \geq -\ln\alpha$, тогда принимаемое решение $\delta = i,$ если $L_i^0(\tau_0^0) \geq -\ln\alpha$.

Моделирование производилось при выполнении следующих условий $k = k_{l1}^- = k_{r1}^- = k_{l2}^- = k_{r2}^-$, $k_f = k_1^- = k_1^+ = k_2^- = k_2^+$, $\alpha = 0.005,$ $\varepsilon = 0.01$. Число итераций моделирования $n = 10000$.

Таблица 1. Результаты моделирования для случая 1 при $A_1 = [0; 2], A_2 = [1; 3]$

k	k_0	k_f	N_1	P_1	N_2	P_2
10	10	10	3.53	0.0003	3.52	0.0004
10	100	100	3.79	0.0000	2.30	0.0000
10	20	10	3.59	0.0003	2.80	**0.0075**
10	100	10	3.63	0.0004	2.15	**0.0554**
10	10	5	3.36	0.0199	4.44	0.0187

В первой строке табл. 1 приведены результаты численного моделирования, когда нижняя граница скорости убывания хвостов совпадает с реальной и параметр k_0 выбран правильно. В этом случае оба правила принятия решений дают примерно одинаковый результат, что говорит о том, что субоптимальная процедура несущественно удлиняет время наблюдений. Качество принимаемого решения в обоих случаях удовлетворяет условию, что вероятность ошибки не превосходит $\alpha = 0.005$.

Во второй строке приведены результаты численного моделирования, когда нижняя граница скорости убывания хвостов существенно отличается от реальной, а параметр k_0 выбран правильно. Качество принимаемого решения в обоих случаях удовлетворяет условию, что вероятность ошибки не превосходит $\alpha = 0.005$. В этом случае субоптимальная процедура требует существенно большего числа наблюдений, чем процедура проверки простых гипотез.

В следующих двух строках приведены результаты численного моделирования, когда нижняя граница скорости убывания хвостов не отличается от реальной, а параметр k_0 выбран неправильно. В этих случаях процедура проверки простых гипотез не обеспечивает заданные параметры качества принимаемого решения. Выделенные значения в таблице показывают, что в первом случае порог превышен в полтора раза, а во втором — более чем в 11 раз. Это обстоятельство и иллюстрирует тот факт, что выбросы в результатах наблюдений приводят к тому, что решающие правила не гарантируют заданную точность решения.

В последней строке таблицы приведены результаты численного моделирования, когда нижняя граница скорости убывания хвостов и параметр k_0 выбраны неправильно. В этом случае оба правила принятия решений дают примерно одинаковый результат, но качество принимаемого решения в обоих случаях не удовлетворяет условию, что вероятность ошибки решения не превосходит уровень 0.005.

Таблица 2. Результаты моделирования для случая 2 при $A_2 = [1; 2], A_1 = [0; 3]$

k	k_0	k_f	N_1	P_1	N_2	P_2
10	10	10	7.15	0.0009	7.09	0.0009
10	20	10	7.34	0.0012	8.29	**0.0363**
10	10	5	10.06	0.1458	12.82	0.1417
10	100	100	6.02	0.0000	5.13	0.0005

Из результатов, приведенных в табл. 2, видно, что качественно результаты здесь такие же, как и в предыдущем случае.

В последней строке таблицы приведены результаты численного моделирования, когда нижняя граница скорости убывания хвостов существенно отличается от истинной, а параметр k_0 выбраны правильно. В этом случае время принятия решения при использовании субоптимальной процедуры не намного больше, чем у процедуру проверки простых гипотез. Это связано с тем, что информационное расстояние между гипотезами слабо зависит от скорости убывания хвостов.

Таблица 3. Результаты моделирования для случая 3 при $A_1 = [0; 5], A_2 = [6; 11]$

k	k_0	k_f	N_1	P_1	N_2	P_2
1	1	1	2.19	0.0015	2.18	0.0015
1	2	2	2.18	0.0000	1.35	0.0006
1	2	1	2.28	0.0017	1.14	**0.0135**
1	1	0.5	2.30	0.0371	2.43	0.0312

Из результатов, приведенных в табл. 3, видно, что качественно результаты здесь такие же, как и в первом случае.

Таким образом, мы видим, что наличие неточность постановке задачи приводит к тому, что классическая асимптотически оптимальная процедура задачи проверки гипотез (2) перестает быть гарантийным решающим правилом, если скорость убывания хвостов распределений определена неправильно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что решающее правило зависит только от верхних границ для скорости убывания хвоста распределения.

Принципиальным отличием полученных результатов от результатов [4] является то, что получающаяся граница для функции риска субоптимальной процедуры в пределе отличается от соответствующей границы для простых гипотез. Это связано с тем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}\right) g_1(x)d\mu(x) \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right) g_1(x)d\mu(x)$$

даже при малых ε. Неравенство объясняется тем, что верхняя оценка для хвоста распределения может существенно отличаться от реального значения, а это будет приводить к потерям скорости роста отношения правдоподобия для тех наблюдениях, которые попадают в интервал A_1, но не попадают в A_2 при справедливости гипотезы $\mathcal{H}_1$. Поэтому может оказаться, что переход к более простой модели распределений может быть оправдан. Например, в третьем случае может оказаться целесообразным переход к рассмотрению дискретных величин, принимающих только два значения: попадание или не попадание в интервал, соответствующий наиболее вероятным значениям $\mathbf{x}$, если справедлива первая гипотеза. В этом случае все будет определяться тем, насколько точно удастся получить оценки для вероятностей значений этих дискретных случайных величин. Поскольку это более простые характеристики, чем скорость убывания хвостов распределений, то их оценки могут оказаться более точными, чем получаемые по формулам (8), и переход к более простой модели с дискретными распределениями будет оправдан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wald A. *Sequential Analysis.* N.-Y.: Wiley, 1947.

2. Малютов М.Б., Цитович И.И. Асимптотически последовательная проверка гипотез. *Проблемы передачи информации*, 2000, том 36, вып. 4, стр. 98-112.

3. Цитович И.И. О величине перескока уровня субмартингалом. *Модели и методы исследований в информационных системах.* М.: Наука, 1988, стр. 91–105.

4. Цитович Ф.И. Некоторые субоптимальные последовательные правила проверки гипотез. *Сборник трудов 30-й конференции молодых учёных и специалистов ИППИ РАН: Информационные технологии и системы ИТиС'07.* М.: ИППИ, 2007, стр. 110–115.