Информационные процессы, Том 10, № 3, 2010, стр. 224–236.

Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем, блокировкой полумарковского потока заявок и выбиванием всех заявок из системы[1]

В.В.Чаплыгин

Институт проблем информатики, Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 01.09.2010

Аннотация—Рассматривается многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем, обслуживанием фазового типа на каждом из приборов и полумарковским потоком заявок. Поступление заявок в систему может быть заблокировано на некоторых интервалах времени. Первая заявка, поступающая в систему после того, как поступление будет разблокировано, выбивает все заявки из системы. Разработан метод расчета стационарного распределения числа заявок в системе и получены математические соотношения для среднего времени пребывания заявки в системе.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Эта статья является продолжением серии работ автора, посвященных методам расчета стационарных характеристик для многолинейной системы массового обслуживания (СМО) с конечным накопителем, обслуживанием фазового типа на каждом из приборов и полумарковским потоком заявок, который может быть заблокирован на некоторых временных интервалах. В настоящей работе рассматривается случай, когда первая заявка, которая поступает в неполную систему на интервале времени с разблокированным потоком, выбивает все заявки: и заявки с приборов, и заявки из накопителя. Ранее в работах [1, 2] были получены математические соотношения для основных стационарных характеристик СМО, которая аналогична рассматриваемой ниже СМО, но в случае, когда выбиваются только заявки из накопителя (конечной и бесконечной емкости). Работа [3] была посвящена СМО с блокировкой входящего потока и без выбивания заявок.

Перейдем к подробному описанию СМО.

В системе имеется n работающих независимо друг от друга идентичных приборов, которые обслуживают поступающие на них однотипные заявки. Каждый из приборов может находиться на одной из J, $1 \le J < \infty$, фаз обслуживания. Время обслуживания заявки на каждом приборе распределено по закону фазового типа с параметрами $\boldsymbol{h}$ и H, где $\boldsymbol{h}$ — вектор-строка размерности J, а H — квадратная матрица порядка J. Функция распределения времени обслуживания заявки записывается в виде (ниже через $\mathbf{1}$ будем обозначать вектор-столбец из единиц, через $\mathbf{0}$ — нулевую вектор-строку, через 0 — нулевую матрицу (наряду со скалярным нулем), а через E — единичную матрицу, размерность и порядок которых определяются нижним индексом или из контекста)

$$H_{PH}(x) = 1 - \boldsymbol{h}\, e^{Hx}\mathbf{1}.$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-07-00152 и № 09-07-12032)

Если в систему поступает заявка, но все n приборов заняты, то эта заявка поступает в накопитель емкостью r. Будем считать, что $r \geq 2$; если $r = 0, 1$, то часть полученных формул потребует упрощения. Если накопитель полон, то заявка, не обслуживаясь, покидает систему (теряется). Заявки из накопителя обслуживаются в порядке их поступления в систему. Обозначим $R = n + r$.

Опишем поступающий в систему поток заявок.

Рассмотрим полумарковским процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, I\}$, $1 \leq I < \infty$. В каждый момент изменения состояния полумарковского процесса генерируется новая заявка, которая готова поступить в систему на обслуживание. Вероятность того, что полумарковский процесс за время меньше x перейдет из состояния i сразу в состояние j, $i, j = \overline{1, I}$, равна $A_{ij}(x)$. Будем рассматривать стационарный режим функционирования полумарковского процесса генерации заявок. Среднее время между изменениями состояний полумарковского процесса в стационарном режиме можно записать в виде

$$a = \boldsymbol{\pi}_a \int\limits_0^\infty x \, dA(x) \, \mathbf{1}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\pi}_a$ — вектор-строка стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова полумарковского процесса, $A(x)$ — матрица из элементов $A_{ij}(x)$. Более подробное описание полумарковского потока, а также некоторые естественные дополнительные предположения относительно его параметров, которые будем предполагать выполненными, можно найти в работе [5].

Заявка, которая генерируется описанным выше полумарковским процессом, может попасть в систему на обслуживание (если она не полна), только в определенные интервалы времени, которые будем называть интервалами с открытым доступом в систему. Интервалы времени с открытым доступом чередуются с интервалами времени с закрытым доступом в систему. Если момент генерации заявки выпадает на интервал с закрытым доступом, то заявка теряется (в этом случае иногда будем говорить, что входящий поток заявок заблокирован). Блокировка потока заявок, поступающих в систему, происходит с интенсивностью α, разблокировка потока (открытие доступа для новых заявок в систему) — с интенсивностью β. Генерация заявок полумарковским потоком не зависит от того, заблокировано поступление заявок в систему или нет. Заявки, находящиеся в системе в момент блокировки, систему не покидают, а продолжают обслуживаться (заявки на приборах) или ожидать обслуживания (заявки в накопителе) до момента поступления первой заявки после разблокировки потока. Первая заявка, поступившая в период времени, когда поток разблокирован, и заставшая в системе менее $(n + r)$ заявок, выбивает все заявки из системы (из накопителя и с приборов), а сама занимает один из пустых приборов. Заявка, которая была сгенерирована в период времени, когда входящий поток разблокирован, но заставшая полный накопитель, не выбивает заявки из накопителя и сама покидает систему, не обслужившись.

Основной задачей, которая решается в этой работе, является отыскание следующих стационарных характеристик для этой системы:

— распределение числа заявок в системе,

— вероятность того, что заявка, попав в систему, будет обслужена;

— вероятность того, что заявка будет выбита из системы другой заявкой;

— среднее время пребывания выбитой заявки в системе;

— среднее время пребывания обслуженной заявки в системе.

2. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ

Процесс обслуживания одинаковыми приборами с PH-распределением времени обслуживания на каждом из приборов может быть представлен в виде марковского процесса специальной структуры [4,5]. Кратко опишем структуру этого процесса (далее — марковского процесса обслуживания).

Если в системе находится k, $0 \le k \le n+r$, заявок, то процесс обслуживания может находиться в одном из l_k, $l_k < \infty$, состояний (фаз обслуживания), причем интенсивность смены фаз марковского процесса определяется элементами матриц Λ_k, $k=\overline{0,n+r}$, если ни одна заявка не обслужилась, и элементами матриц N_k, $k=\overline{1,n+r}$, если заявка обслужилась. Предполагается, что $l_k = l$ при $k=\overline{n,n+r}$, $\Lambda_k=\Lambda$ при $k=\overline{n,n+r}$, а $N_k = N$ при $k=\overline{n+1,n+r}$. Матрицу $\Lambda+N$ будем предполагать неразложимой, а матрицу N — ненулевой.

Если в системе находится k, $k=\overline{0,n-1}$, заявок, то при поступлении новой заявки в систему марковский процесс обслуживания переходит на фазу, которая определяется элементами матриц Ω_k.

Рассмотрим вложенную цепь Маркова, определяемую моментами смены фаз полумарковского процесса генерации заявок, для которой множество $\mathcal{X}$ состояний имеет вид

$$\mathcal{X} = \{(k,m,i,j),\ k=\overline{0,R},\ m=0,1,\ i=\overline{1,I},\ j=\overline{1,l_k}\}.$$

В этой записи индекс k обозначает количество находящихся в системе заявок, индекс m определяет состояние блокировки потока заявок в систему (0 — поток заблокирован, 1 — поток разблокирован), индекс i обозначает фазу процесса генерации заявок, индекс j — фазу марковского процесса обслуживания.

Матрица P переходных вероятностей для этой вложенной цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ P_{R-1,0} & P_{R-1,1} & P_{R-1,2} & P_{R-1,3} & \dots & P_{R-1,R-1} & P_{R-1,R} \\ P_{R0} & P_{R1} & P_{R2} & P_{R3} & \dots & P_{R,R-1} & P_{RR} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Сначала выпишем выражения для блочных матриц $P_{i,j}$ с указанием того, какому изменению состояния системы (какой смене состояний цепи Маркова) они соответствуют, а лишь затем (чтобы не нарушать целостность описания структуры матрицы P переходных вероятностей) приведем соотношения для матриц экспоненциальных моментов, которые являются ненулевыми блоками матриц $P_{i,j}$.

Опишем переходы соответствующие увеличению числа заявок в системе. Если система непустая, то увеличение числа заявок может произойти только внутри текущего интервала с открытым доступом заявок в систему. Если в системе заявки отсутствуют, то первая заявка, которая будет сгенерирована на ближайшем интервале с открытым доступом, попадет в систему (на один из приборов). Указанным переходам соответствуют матрицы

$$P_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{0,0}^{01} \\ 0 & A_{0,0}^{11} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$P_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{i,i}^{1} \end{pmatrix}, \quad i=\overline{1,n-1}, \tag{4}$$

$$P_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_0^1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{n, R-1}. \tag{5}$$

Переходы, при которых в системе не останется ни одной заявки, определяются матрицами

$$P_{i,0} = \begin{pmatrix} A_{i,0}^{00} & 0 \\ A_{i,0}^{10} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, R}. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим переходы в состояние, когда в системе останется только одна заявка. Матрицы-блоки для этого случая будут иметь вид

$$P_{i,1} = \begin{pmatrix} A_{i,1}^{00} & A_{i,0}^{01} + \sum\limits_{j=1}^{i+1} A_{ij}^{01} \\ A_{i,1}^{10} & A_{i,0}^{11} + \sum\limits_{j=1}^{i+1} \tilde{A}_{i,j}^{1} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{7}$$

$$P_{i,1} = \begin{pmatrix} A_{i,1}^{00} & A_{i,0}^{01} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} A_{ij}^{01} + \sum\limits_{j=n}^{i+1} A_{j-n}^{01} \\ A_{i,1}^{10} & A_{i,0}^{11} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \tilde{A}_{i,j}^{1} + \sum\limits_{j=n}^{i+1} \tilde{A}_{j-n}^{11} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{n, R-1}, \tag{8}$$

$$P_{R,1} = \begin{pmatrix} A_{i,1}^{00} & A_{i,0}^{01} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} A_{ij}^{01} + \sum\limits_{j=n}^{R} A_{j-n}^{01} \\ A_{i,1}^{10} & A_{i,0}^{11} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \tilde{A}_{i,j}^{1} + \sum\limits_{j=n}^{R} \tilde{A}_{j-n}^{11} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Случай, при котором в полностью занятой системе число заявок не изменяется при смене фаз процесса генерации, описывается матрицей

$$P_{R,R} = \begin{pmatrix} A_0^{00} & A_0^{01} \\ A_0^{10} & \tilde{A}_1^1 + A_0^{11} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Остальные переходы описываются матрицами

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i-j}^{00} & 0 \\ A_{i-j}^{10} & \tilde{A}_{i-j+1}^1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{n+1, R}, \quad j = \overline{n+1, \min\{i, R-1\}}, \tag{11}$$

$$P_{i,n} = \begin{pmatrix} A_{i-n}^{00} & 0 \\ A_{i-n}^{10} & A_{i,n-1}^1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{n, R}, \tag{12}$$

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i,j}^{00} & 0 \\ A_{i,j}^{10} & A_{i,j-1}^1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{2, R}, \quad j = \overline{2, \min\{i, n-1\}}. \tag{13}$$

Матрицы экспоненциальных моментов — составляющие матриц $P_{i,j}$ — вычисляются по формулам

$$A_k^{ij} = \int\limits_0^\infty q_{ij}(x)\, dA(x) \otimes F_k(x), \quad k \geq 0, \quad i,j = 0,1, \tag{14}$$

$$\tilde{A}_k^{11} = \int\limits_0^\infty \tilde{q}_{11}(x)\, dA(x) \otimes F_k(x), \quad k \geq 0, \tag{15}$$

$$\tilde{A}_k^{1} = \int\limits_0^\infty \tilde{q}_{1}(x)\, dA(x) \otimes F_k(x), \quad k \geq 0, \tag{16}$$

$$A_{kw}^{i1} = \int\limits_0^\infty q_{i1}(x) dA(x) \otimes (F_{k,w}(x)\, \Omega_w), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geq w, \quad i = 0,1, \tag{17}$$

$$\tilde{A}_{kw}^{i1} = \int\limits_0^\infty q_{i1}(x) dA(x) \otimes F_{k,w}(x), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geq w, \quad i = 0,1, \tag{18}$$

$$A_{kw}^{1} = \int\limits_0^\infty \tilde{q}_{1}(x) dA(x) \otimes (F_{k,w}(x)\, \Omega_w), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geq w, \quad i = 0,1, \tag{19}$$

$$\tilde{A}_{kw}^{1} = \int\limits_0^\infty \tilde{q}_{11}(x) dA(x) \otimes (F_{k,w}(x)\, \Omega_w), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geq w, \quad i = 0,1, \tag{20}$$

$$A_{kw}^{i0} = \int\limits_0^\infty q_{i0}(x) dA(x) \otimes F_{k,w}(x), \quad w = \overline{0,n}, \quad k \geq w, \quad i = 0,1. \tag{21}$$

В соотношениях (14)–(21) использованы следующие обозначения.

Функции $q_{ij}(x)$, $i,j = 0,1$, являются вероятностями того, что через время x поступление заявок будет заблокировано, если $j = 0$, и поступление заявок будет разблокировано, если $j = 1$, при условии, что в начальный момент времени поступление заявок заблокировано, если $i = 0$, и разблокировано, если $i = 1$. Функция $\tilde{q}_1(x)$ есть вероятность того, что за время x состояние блокировки входящего потока заявок ни разу не поменяется при условии, что в начальный момент времени поток заявок был разблокирован, а функция $\tilde{q}_{11}(x)$ — вероятность того, что за время x состояние блокировки поменяется хотя бы раз, но к моменту x останется разблокированным при условии, что в начальный момент времени поток заявок был разблокирован.

Можно показать [3], что

$$q_{00}(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x},$$

$$q_{01}(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x},$$

$$q_{10}(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x},$$

$$q_{11}(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)x}.$$

$$\tilde{q}_1(x) = e^{-\alpha x},$$

$$\tilde{q}_{11}(x) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)x} - e^{-\alpha x}.$$

Матрицы $F_k(x)$ и $F_{kw}(x)$ имеют следующий смысл.

Элементы матриц $F_k(x)$ представляют собой (с учетом соответствующей смены фаз марковского процесса обслуживания) условные вероятности того, что за время x обслужится k заявок при условии, что в начальный момент в системе было не менее $k+n$, а элементы матриц $F_{kw}(x)$ — условные вероятности того, что за время x обслужится $k-w$ заявок при условии, что в начальный момент в системе было ровно k заявок.

Для матриц $F_k(x)$ и $F_{kw}(x)$ справедливы рекуррентные соотношения (см., например, [5])

$$F_0(x) = e^{\Lambda x}, \tag{22}$$

$$F_k(x) = \int\limits_0^x F_{k-1}(y)\, N\, F_0(x-y)\, dy, \quad k \geq 1, \tag{23}$$

$$F_{kk}(x) = e^{\Lambda_k x}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

$$F_{kw}(x) = \int\limits_0^x F_{k,w+1}(y)\, N_{w+1}\, F_{ww}(x-y)\, dy, \quad k \geq 0, \quad w = \overline{0, \min\{k, n-1\}}$$

С алгоритмическими методами численного расчета матриц $F_k(x)$, $F_{kw}(x)$ и матриц экспоненциальных моментов подробно можно познакомиться в работах [4, 5, 6].

Обозначим через p_{ik}^m, $m = 0, 1$, $i = l_k(u-1)+v$, $u = \overline{1, I}$, $v = \overline{1, l_k}$, $k = \overline{0, R}$, стационарную вероятность того, что сразу после смены фаз полумарковского процесса в системе находится k заявок, фаза полумарковского процесса генерации заявок находится на фазе u и марковский процесс обслуживания находится на фазе v и если $m = 0$, то поток заявок заблокирован, а если $m = 1$, то поток заявок разблокирован. Заметим, что в этом обозначении использована сквозная нумерация фаз процесса генерации заявок и фаз обслуживания, которая позволяет использовать для их обозначения единственный индекс. Положим $\boldsymbol{p}_k^m = (p_{1k}^m, \ldots, p_{Il_k,k}^m)$, $\boldsymbol{p}_k = (\boldsymbol{p}_k^0, \boldsymbol{p}_k^1)$, $m = 0, 1$, $k = \overline{0, R}$, $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_R)$.

Для вектора $\boldsymbol{p}$ справедлива система уравнений равновесия (СУР)

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}P, \tag{24}$$

где матрица P переходных вероятностей имеет вид (2).

Можно показать, что матрица P, образованная из заданных по формулам (3)–(13) матриц $P_{i,j}$, является неразложимой и непериодической. Методы решения СУР с матрицей такого вида изложены в работах [6, 7].

Обратимся теперь к отысканию вероятности потери заявки.

Обозначим через q_{ik}^m, $m = 0, 1$, $i = l_k(u-1) + v$, $u = \overline{1, I}$, $v = \overline{1, l_k}$, $k = \overline{0, R}$, стационарную вероятность того, что непосредственно до момента смены фаз процесса генерации заявок в системе было k других заявок, полумарковский процесс генерации заявок находился на фазе u, марковский процесс обслуживания — на фазе v и если $m = 0$, то поступление заявок в систему было заблокировано, а если $m = 1$, то поступление заявок в систему было разблокировано. Положим $\boldsymbol{q}_k^m = (q_{1k}^m, \ldots, q_{Il_k,k}^m)$, $\boldsymbol{q}_k = (\boldsymbol{q}_k^0, \boldsymbol{q}_k^1)$, $m = 0, 1$, $k = \overline{0, R}$.

Для векторов $\boldsymbol{q}_k$, $k = \overline{0, R}$, можно записать следующие соотношения:

$$\boldsymbol{q}_k = \sum_{j=k}^{R} \boldsymbol{p}_j \tilde{P}_{j,k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{q}_k = \sum_{j=k}^{R} \boldsymbol{p}_j \tilde{P}_{j-k}, \quad k = \overline{n, R}, \tag{26}$$

где

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ij}^{00} & \tilde{A}_{ij}^{01} \\ A_{ij}^{10} & \tilde{A}_{ij}^{11} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, R}, \quad j = \overline{0, \min\{i, n-1\}},$$

$$\tilde{P}_k = \begin{pmatrix} A_k^{00} & A_k^{01} \\ A_k^{10} & A_k^{11} \end{pmatrix}, \quad k \geq 0,$$

а матрицы A_k^{ij}, A_{kw}^{i0}, $\tilde{A}_{kw}^{i1}$ определяются, в свою очередь, соотношениями (14), (18), (21).

Отыскав векторы $\boldsymbol{q}_k$, $k = \overline{0, R}$, можно вычислить вероятность π_1 потери новой заявки, а именно вероятность того, что заявка в момент генерации не встанет на прибор и не попадет в накопитель, а сразу покинет систему. Заявка в момент поступления теряется, если входящий в систему поток заблокирован или если в накопителе отсутствуют свободные места. Поэтому

$$\pi_1 = \sum_{i=0}^{R-1} \boldsymbol{q}_k^0 \mathbf{1} + \boldsymbol{q}_R \mathbf{1}. \tag{27}$$

Найдем вероятность ψ_1 того, что заявка будет обслужена при условии, что она попала в систему (на приборы или в накопитель). Заявка, попавшая в систему, должна успеть обслужиться до тех пор, пока в систему после очередного момента разблокировки входящего потока не придет заявка, выбивающая другие заявки. Здесь следует напомнить еще раз, что если система полна, то первая заявка, которая генерируется после очередного момента разблокировки (на периоде, когда доступ в ситему открыт), других заявок не выбивает, а теряется.

Для отыскания вероятности ψ_1 можно применить метод, использованный в работе [1], в которой рассматривалась система с выбиванием заявок только из накопителя. Однако для системы с выбиванием всех заявок построения окажутся несколько более сложными, поскольку необходимо учитывать возможность потери заявки, находящейся на приборе.

Введем следующие обозначения:

$\hat{p}_{i0}^m(j)$, $i = J(u-1)+v$, $u = \overline{1,I}$, $v = \overline{1,J}$, $j \geq 0$, — стационарная вероятность того, что произвольная заявка после j-го момента смены фаз полумарковского процесса, начиная с момента своего поступления в систему, окажется на одном из приборов, причем полумарковский процесс генерации заявок будет находиться на фазе u, обслуживающий эту заявку прибор — на фазе v и поступление заявок в систему будет заблокировано (разблокировано), если $m = 0$ ($m = 1$);

$\hat{p}_{ik}^m(j)$, $i = l(u-1)+v$, $u = \overline{1,I}$, $v = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,r}$, $j \geq 0$, — стационарная вероятность того, что произвольная заявка после j-го момента смены фаз полумарковского процесса, начиная с момента своего поступления в систему, окажется в накопителе на k-м месте, причем полумарковский процесс генерации заявок будет находиться на фазе u, марковский процесс обслуживания — на фазе v и поступление заявок в систему будет заблокировано (разблокировано), если $m = 0$ ($m = 1$);

$\hat{\boldsymbol{p}}_0(j) = (\hat{p}_{1k}^0(j), \ldots, \hat{p}_{IJ,k}^0(j), \hat{p}_{1k}^1(j), \ldots, \hat{p}_{IJ,k}^1(j))$, $j \geq 0$;

$\hat{\boldsymbol{p}}_k(j) = (\hat{p}_{0k}^0(j), \ldots, \hat{p}_{Il,k}^0(j), \hat{p}_{0k}^1(j), \ldots, \hat{p}_{Il,k}^1(j))$, $k = \overline{1,r}$, $j \geq 0$;

$\hat{\boldsymbol{p}}(j) = (\hat{\boldsymbol{p}}_0(j), \hat{\boldsymbol{p}}_1(j), \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_r(j))$, $j \geq 0$.

Заметим, что вектор $\hat{\boldsymbol{p}}(0)$ представляет собой записанный в специальном виде вектор стационарных вероятностей того, что новая заявка попадет на прибор или в накопитель.

Пусть в некоторый момент времени заявка оказалась в накопителе на k-м месте. Эта заявка через время x окажется на приборе (предполагается, что за время x фаза процесса генерации не изменится) с вероятностью (матрицей вероятностей)

$$U_k(x) = \int_0^x F_{k-1}(y) N \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{h} e^{H(x-y)} dy, \quad k \geq 1.$$

Это соотношение для матриц $U_k(x)$ почти повторяет формулу (23) для матриц $F_k(x)$, $k \geq 1$. Отличие состоит в том, что в момент обслуживания k-й заявки нас не интересует, на каких фазах обслуживаются другие заявки на приборах (поэтому мы суммируем вероятности пребывания на этих фазах умножением на вектор-столбец из единиц), а фаза, с которой начнет обслуживаться наша заявка, разыгрывается в этот момент согласно компонентам вектор-строки $\boldsymbol{h}$.

Введем следующие матрицы:

$$C_k^i = \int_0^\infty q_{i0}(x)\, dA(x) \otimes U_k(x), \quad k = \overline{1,r}, \quad i = 0, 1,$$

$$\tilde{C}_k = \int_0^\infty \tilde{q}_1(x)\, dA(x) \otimes U_k(x), \quad k = \overline{1,r}.$$

Элемент $(C_k^i)_{uv}$ матрицы C_k^i представляет собой вероятность того, что в момент очередной смены фазы полумарковского процесса генерации заявка будет обслуживаться на приборе (фазы процесса генерации и процесса обслуживания фазового типа на этом приборе имеют сквозную нумерацию и определяются в этом обозначении индексом v, $v = \overline{1, IJ}$) и поток заявок в систему будет заблокирован, при условии, что в предыдущий момент смены фаз полумарковского процесса генерации эта заявка находилась в накопителе на k-м месте (фаза процесса генерации и марковского процесса обслуживания в этот момент определяется индексом u, $u = \overline{1, Il}$) и поток заявок в систему был заблокирован (разблокирован), если $i = 0$ $(i = 1)$.

Матрица $\tilde{C}_k$ имеет аналогичный смысл, что и матрица C_k^i, с тем лишь условием, что доступ в систему между моментами генерации заявок все время остается открытым.

Рассмотрим блочную матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{P}_{n+1} & \hat{P}_{n+1,n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{P}_{n+2} & \hat{P}_{n+2,n+1} & \hat{P}_{n+2,n+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \hat{P}_{R-1} & \hat{P}_{R-1,n+1} & \hat{P}_{R-1,n+2} & \dots & \hat{P}_{R-1,R-1} & 0 \\ \hat{P}_R & \hat{P}_{R,n+1} & \hat{P}_{R,n+2} & \dots & \hat{P}_{R,R-1} & \hat{P}_{RR} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где блоки матрицы $\hat{P}$ определяются соотношениями

$$\hat{P}_n = \begin{pmatrix} \int\limits_0^\infty q_{00}(x)\, dA(x) \otimes e^{Hx} & 0 \\ \int\limits_0^\infty q_{10}(x)\, dA(x) \otimes e^{Hx} & \int\limits_0^\infty \tilde{q}_1(x)\, dA(x) \otimes e^{Hx} \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_k = \begin{pmatrix} C_{k-n}^0 & 0 \\ C_{k-n}^1 & \tilde{C}_{k-n} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{n+1, R},$$

$$\hat{P}_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i-j}^{00} & 0 \\ A_{i-j}^{10} & \tilde{A}_{i-j}^1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{n+1, R}, \quad j = \overline{n+1, \min\{i, R-1\}},$$

$$\hat{P}_{R,R} = \begin{pmatrix} A_0^{00} & A_0^{01} \\ A_0^{10} & \tilde{A}_1^1 + A_0^{11} \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось выше, составляющие компоненты вектора $\hat{\boldsymbol{p}}(0)$ определяют, с какой вероятностью новая сгенерированная заявка попадет на прибор или на одно из мест в накопителе: вероятность того, что заявка сразу попадет на прибор, определяется вектором $\hat{\boldsymbol{p}}_0(0)$, а вероятность того, что заявка попадет на k-е, $k = \overline{1, r}$, место в накопителе, определяется вектором $\hat{\boldsymbol{p}}_k(0)$.

Если новая заявка попадает на один из приборов сразу при поступлении в систему, то фаза, на которой ее начнет обслуживать прибор, определяется вектором $\boldsymbol{h}$. Ненулевую часть вектора $\hat{\boldsymbol{p}}_0(0)$ можно получить, умножив вектор $\boldsymbol{h}$ на вероятность того, что новая заявка попадет сразу на один из приборов. Таким образом, вектор $\hat{\boldsymbol{p}}_0(0)$ находится из соотношения

$$\hat{\boldsymbol{p}}_0(0) = \left(\boldsymbol{0}_{IJ}, \Big(\sum_{k=1}^n \boldsymbol{p}_k^1 (E_I \otimes \boldsymbol{1}_{l_k}) \Big) \otimes \boldsymbol{h} \right).$$

Векторы $\hat{\boldsymbol{p}}_k(0)$, $k = \overline{1, r}$, определяются из соотношений

$$\hat{\boldsymbol{p}}_k(0) = (\mathbf{0}_{Il}, \boldsymbol{p}^1_{n+k}),\ k = \overline{1, r-1}, \tag{29}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_r(0) = (\mathbf{0}_{Il}, \boldsymbol{q}^1_{n+r-1}), \tag{30}$$

где векторы $\boldsymbol{p}^1_{n+k}$ являются составляющими векторов $\boldsymbol{p}_{n+k}$, которые определяются из СУР (24) для вложенной цепи Маркова, а вектор $\boldsymbol{q}^1_{n+r-1}$ — из формулы (26).

Вероятность того, что поступившая в систему заявка останется в ней и после j-й, $j \geq 1$, смены фаз процесса генерации, равна

$$\hat{\boldsymbol{p}}(j) = \hat{\boldsymbol{p}}(0)\hat{P}^j, \quad j \geq 1.$$

Заметим, что матрица $\hat{P}$ является неотрицательной и сумма элементов в каждой строке строго меньше единицы. Поэтому максимальное по модулю собственное значение этой матрицы также меньше единицы, что гарантирует существование матрицы $(E - \hat{P})^{-1}$.

Пусть заявка после j-й смены фазы процесса генерации находится на k-м месте в накопителе (фазы процессов генерации и обслуживания, а также состояние блокировки процесса генерации определяются соответствующими координатами вектора $\hat{\boldsymbol{p}}_k(j)$, $k = \overline{1, r}$, $j \geq 0$). Вероятность того, что эта заявка попадет на прибор и успеет обслужиться до $(j+1)$-го момента смены фаз процесса генерации, равна

$$\hat{\boldsymbol{p}}_k(j)\boldsymbol{p}^*_k,$$

где

$$\boldsymbol{p}^*_k = \begin{pmatrix} \int\limits_0^\infty dA(x)\mathbf{1}_I \otimes \int\limits_0^x F_{k-1}(y)N\mathbf{1}_l \cdot H_{PH}(x-y)dy \\ \int\limits_0^\infty dA(x)\mathbf{1}_I \otimes \int\limits_0^x F_{k-1}(y)N\mathbf{1}_l \cdot H_{PH}(x-y)dy \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда заявка после j-й смены фазы процесса генерации с момента ее поступления в систему находится на одном из приборов. Выражение для вероятности того, что эта заявка успеет обслужиться до смены фаз процесса генерации, можно записать в виде

$$\hat{\boldsymbol{p}}_0(j)\boldsymbol{p}^*_0,$$

где

$$\boldsymbol{p}^*_0 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^\infty dA(x)\mathbf{1}_I \otimes (\mathbf{1}_J - e^{Hx}\mathbf{1}_J) \\ \int\limits_0^\infty dA(x)\mathbf{1}_I \otimes (\mathbf{1}_J - e^{Hx}\mathbf{1}_J) \end{pmatrix}.$$

Обозначая через $\boldsymbol{p}^*$ вектор-столбец $(\boldsymbol{p}^{*T}_0, \boldsymbol{p}^{*T}_1, \ldots, \boldsymbol{p}^{*T}_r)^T$, получаем, что вероятность того, что заявка, попав в систему, обслужится между j-м и $(j+1)$-м моментами смены фаз процесса генерации, равна

$$\hat{\boldsymbol{p}}(j)\boldsymbol{p}^* = \hat{\boldsymbol{p}}(0)\hat{P}^j\boldsymbol{p}^*.$$

Вероятность ψ_1 того, что заявка, попав в систему, не будет выбита другой заявкой и покинет систему обслуженной, равна

$$\psi_1 = \frac{1}{1-\pi_1}\sum_{j=0}^{\infty}\hat{\boldsymbol{p}}(j)\boldsymbol{p}^* = \frac{1}{1-\pi_1}\sum_{j=0}^{\infty}\hat{\boldsymbol{p}}(0)\hat{P}^j\boldsymbol{p}^* = \frac{1}{1-\pi_1}\hat{\boldsymbol{p}}(0)(E-\hat{P})^{-1}\boldsymbol{p}^*.$$

Вероятность того, что заявка будет выбита другой заявкой в $(j+1)$-й, $j \geq 0$, момент смены фаз процесса генерации, равна $\hat{\boldsymbol{p}}(j)\bar{\boldsymbol{p}}$. В этом произведении вектор-столбец $\bar{\boldsymbol{p}}$ представляет собой вектор вероятностей того, что в очередной момент смены фаз процесса генерации в систему поступит новая заявка, которая выбьет все заявки. Вектор $\bar{\boldsymbol{p}}$ можно представить в виде $\bar{\boldsymbol{p}} = (\bar{\boldsymbol{p}}_0^T, \ldots, \bar{\boldsymbol{p}}_r^T)^T$, где

$$\bar{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^\infty q_{01}(x)dA(x)\mathbf{1}_I \otimes e^{Hx}\mathbf{1}_J \\ \int\limits_0^\infty \tilde{q}_{11}(x)dA(x)\mathbf{1}_I \otimes e^{Hx}\mathbf{1}_J \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_k = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{k-1} A_j^{01}\mathbf{1} \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \tilde{A}_j^{11}\mathbf{1} \end{pmatrix}, \ k = \overline{1, r-1}, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_r = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k-1} A_j^{01}\mathbf{1} \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \tilde{A}_j^{11}\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Следует заметить, сумма векторов $\boldsymbol{p}_k^*$ и $\bar{\boldsymbol{p}}_k$ для каждого индекса k, $k = \overline{0, r}$, представляет собой вектор-столбец из единиц соответствующей размерности.

Выражение для стационарной вероятности ψ_2 того, что заявка будет выбита другой заявкой при условии, что она вообще попадет в систему, можно выписать в виде

$$\psi_2 = \frac{1}{1-\pi_1}\sum_{j=0}^{\infty}\hat{\boldsymbol{p}}(j)\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{1-\pi_1}\hat{\boldsymbol{p}}(0)(E-\hat{P})^{-1}\bar{\boldsymbol{p}}.$$

Очевидно, что вероятности ψ_1 и ψ_2 связывает соотношение $\psi_1 + \psi_2 = 1$.

Для среднего времени $\bar{v}$, потраченного выбитой заявкой на пребывание в системе, справедливо соотношение

$$\bar{v} = \frac{a}{1-\pi_1}\sum_{j=1}^{\infty} j\hat{\boldsymbol{p}}(j)\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{a}{1-\pi_1}\hat{\boldsymbol{p}}(0)\sum_{j=1}^{\infty} j\hat{P}^{j-1}\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{a}{1-\pi_1}\hat{\boldsymbol{p}}(0)(E-\hat{P})^{-2}\bar{\boldsymbol{p}},$$

где среднее время a между соседними сменами фаз процесса генерации заявок определяется формулой (1), матрица $\hat{P}$ — формулой (28), вектор $\hat{\boldsymbol{p}}(0)$ — формулами (29), (30), а вероятность π_1 — формулой (27).

Пусть после очередного момента смены фаз процесса генерации заявка находится на приборе, тогда среднее время, которое она проведет в системе до момента обслуживания (при условии, что она будет обслужена до следующего момента смены фаз процесса генерации) будет определяться вектором-столбцом $\boldsymbol{b}_0$. Если же заявка находится на k-м, $k = \overline{1, k}$, месте в накопителе после смены фаз полумарковского процесса генерации (процесс обслуживания может находиться на одной из l фаз), то среднее время, которое она (заявка) проведет до момента обслуживания, (с условием, что момент окончания обслуживания этой заявки должен произойти ранее очередного момента смены фаз процесса генерации), будет определяться вектором столбцом $\boldsymbol{b}_k$. Кроме этого положим $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_0^T, \boldsymbol{b}_1^T, \ldots, \boldsymbol{b}_r^T)^T$.

Для векторов $\boldsymbol{b}_k$, $k = \overline{0, r}$, справедливы соотношения

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^\infty (\mathbf{1}_I - A(x)\mathbf{1}_I) \otimes (x\boldsymbol{h}e^{Hx}\boldsymbol{h}^* dx)\mathbf{1}_J \\ \int\limits_0^\infty (\mathbf{1}_I - A(x)\mathbf{1}_I) \otimes (x\boldsymbol{h}e^{Hx}\boldsymbol{h}^* dx)\mathbf{1}_J \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_k = \begin{pmatrix} \int\limits_0^\infty (\mathbf{1}_I - A(x)\mathbf{1}_I) \otimes x\left(\int\limits_0^x F_k(y)\mathbf{1}_l \cdot \boldsymbol{h}e^{H(x-y)}\boldsymbol{h}^* dy\right)dx \\ \int\limits_0^\infty (\mathbf{1}_I - A(x)\mathbf{1}_I) \otimes x\left(\int\limits_0^x F_k(y)\mathbf{1}_l \cdot \boldsymbol{h}e^{H(x-y)}\boldsymbol{h}^* dy\right)dx \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, r},$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{h}^*$ вычисляется по формуле $\boldsymbol{h}^* = -H\mathbf{1}_J$, а матрицы $F_k(x)$, $k \geq 0$, — с помощью формул (22), (23). Размерность вектора $\boldsymbol{b}_0$ равна $2IJ$, размерность векторов $\boldsymbol{b}_k$ — $2Il$.

Выражение для среднего времени v пребывания заявки в системе при условии, что она не будет выбита, можно записать в виде

$$v = \frac{1}{1-\pi_1}\sum_{j=0}^\infty \hat{\boldsymbol{p}}(j)(aj\mathbf{1} + \boldsymbol{b}) = \frac{1}{1-\pi_1}\hat{\boldsymbol{p}}(0)(E - \hat{P})^{-1}\Big(a(E-\hat{P})^{-1}\mathbf{1} + \boldsymbol{b}\Big),$$

где вектор-столбец из единиц имеет размерность вектора $\boldsymbol{b}$.

Таким образом, в настоящей работе для СМО с прерывающимся блокировкой полумарковским входящим потоком заявок, конечным накопителем, обслуживанием фазового типа на каждом приборе и выбиванием заявок из системы найдены следующие характеристики:

— распределение числа заявок в системе,

— вероятность того, что заявка, попав в систему, будет обслужена;

— вероятность того, что заявка будет выбита из системы другой заявкой;

— среднее время, потраченное заявкой на пребывание в системе при условии, что она будет выбита;

— среднее время пребывания заявки в системе при условии, что она будет обслужена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем, блокировкой полумарковского потока заявок и выбиванием заявок из накопителя. *Информатика и ее применения*, 2008, том 2, выпуск 3, стр. 38-44.

2. Чаплыгин В. В. О многолинейной системе массового обслуживания с прерывающимся полумарковским потоком заявок и выбиванием заявок из накопителя неограниченной емкости. *Информационные процессы*, 2009, том 9, № 3, стр. 147-160.

3. Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем и блокировкой полумарковского потока заявок. *Информационные процессы*, 2008, том 8, № 1, стр. 1–9.

4. Печинкин А. В., Чаплыгин В. В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/n/r. *Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика»*, 2003, № 1, стр. 119–143.

5. Печинкин А. В., Чаплыгин В. В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания SM/MSP/n/r. *Автоматика и телемеханика*, 2004, № 9, стр. 85–100.

6. Бочаров П. П., Д'Апиче Ч., Печинкин А. В., Салерно С. Система массового обслуживания G/MSP/1/r. *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 2, стр. 127–143.

7. Bocharov P. P., D'Apice C., Pechinkin A. V., Salerno S. *Queueing Theory.* Utrecht, Boston: VSP, 2004.