*Информационные процессы, Том 10, № 3, 2010, стр. 245–246.*


## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

# О вещественных точках на многообразии четвёртой степени, ближайших к данной точке[1]

**А.В.Селиверстов, В.А.Любецкий**

*ИППИ РАН, Москва, Россия*
Поступила в редколлегию 17.09.2010

**Аннотация**—Обсуждаются условия, при которых на алгебраическом многообразии четвёртой степени вещественные точки, находящиеся на минимальном (или максимальном) расстоянии от фиксированной точки вещественного пространства с евклидовой метрикой, лежат на одной гиперплоскости или на объединении двух гиперплоскостей.

Задача вычисления расстояния от точки до невыпуклого множества в $\mathbb{R}^n$ является трудной для вычисления. Более того, если известны некоторые оптимальные точки, трудно решить, существуют ли другие такие точки. Поэтому полезно знать взаимное расположение оптимальных точек. Рассмотрим вещественное многообразие $X$ и точку $O \in \mathbb{R}^n$. Точки на $X$, расположенные на минимальном (или максимальном) расстоянии от точки $O$, являются точками касания $X$ и сферы с центром в $O$. Более того, каждая точка пересечения $X$ и сферы является точкой касания. Поэтому задача поиска оптимальных точек сводится к исследованию точек касания многообразия с гиперповерхностью. Поскольку вещественная сфера не пересекает бесконечно удалённую гиперплоскость, то задача существенно не изменится при проективном замыкании.

Рассмотрим однородные координаты $[x_0, \dots, x_n]$ в комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$. Гиперплоскость $x_0 = 0$ назовём бесконечно удалённой. Её дополнение отождествляется с аффинным пространством с декартовыми координатами $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$. Обозначим $S^{n-1}$ гиперповерхность в $\mathbb{CP}^n$, заданную формой $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. Следуя [1], считаем алгебраические многообразия и их подмногообразия неприводимыми по определению. Многообразие называется *вырожденным*, если оно лежит в некоторой гиперплоскости.

Комплексное сопряжение координат индуцирует инволюцию $\iota$ в $\mathbb{CP}^n$, $\iota^2 = id$. Если многообразие определено над полем вещественных чисел, то его вещественные точки неподвижны относительно $\iota$. В частности, вещественные точки гиперповерхности $S^{n-1}$ образуют вещественную сферу единичного радиуса с центром в начале координат аффинного пространства.

Обозначим $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число, превосходящее или равное $x$.

**Предложение 1.** *Пусть $X \subset \mathbb{CP}^n$ — проективная кривая степени $d$, не лежащая на гиперповерхности $S^{n-1}$. Если $X$ и $S^{n-1}$ касаются в каждой вещественной точке пересечения $X \cap S^{n-1}$, то вещественные точки $X \cap S^{n-1}$ лежат на объединении не более чем $\lceil d/n \rceil$ гиперплоскостей.*

**Доказательство.** Поскольку $X$ неприводимо, пересечение $X \cap S^{n-1}$ состоит из изолированных точек. По теореме Безу (теорема 7.7 гл. 1 в [1]) сумма кратностей точек пересечения $X \cap S^{n-1}$ не превосходит $2d$. Так как $X$ и $S^{n-1}$ касаются в каждой точке пересечения, $X \cap S^{n-1}$ содержит не более чем $d$ точек. Поскольку любые $n$ точек лежат на одной гиперплоскости, $d$ точек лежат на объединении не более чем $\lceil d/n \rceil$ гиперплоскостей.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект №3807) и Федерального агентства по образованию (Государственный контракт №П2370).

**Предложение 2.** *Пусть $X \subset \mathbb{CP}^n$ — проективное многообразие четвёртой степени размерности $m \geq 2$, определённое над полем вещественных чисел, причём $X$ не содержит невырожденных подмногообразий четвёртой степени. Если многообразие $X$ не лежит на гиперповерхности $S^{n-1}$ и касается $S^{n-1}$ в каждой комплексной точке из пересечения $X \cap S^{n-1}$, то вещественные точки из этого пересечения лежат на одной гиперплоскости или на объединении двух гиперплоскостей.*

**Доказательство.** Поскольку $X$ неприводимое и $\dim S^{n-1} = n-1$, то все компоненты пересечения $X \cap S^{n-1}$ имеют размерность $m-1$ в силу проективной теоремы о размерности (теорема 7.2 гл. 1 в [1]). По теореме Безу (теорема 7.7 гл. 1 в [1]) сумма степеней неприводимых компонент $X \cap S^{n-1}$ не превосходит четырёх, поскольку $X$ и $S^{n-1}$ касаются в каждой точке пересечения.

Поскольку сфера не содержит вещественных прямых, неприводимые компоненты $X \cap S^{n-1}$ степени один представляют собой пары линейных подпространств, переходящих друг в друга при инволюции $\iota$. При этом каждая пара линейных подпространств имеет не более одной вещественной точки. Следовательно, возможны два случая: либо пересечение неприводимо и имеет степень четыре, либо степень каждой из неприводимых компонент пересечения $X \cap S^{n-1}$ не превышает двух. В первом случае пересечение является вырожденным подмногообразием, то есть лежит в одной гиперплоскости. Во втором случае вещественные точки составляют либо квадрики, либо изолированные точки, общее количество которых не больше двух. Такие квадрики вырождены (следствие 18.12 в [2]). Каждая изолированная точка, очевидно, также принадлежит некоторой гиперплоскости. Всего не более двух гиперплоскостей.

*Замечание 1.* Если на пересечении $X \cap S^{n-1}$ мало вещественных точек, то касание в каждой вещественной точке не влечёт касание в каждой комплескной точке. Например, если $X$ — плоскость в $\mathbb{CP}^3$, которая касается $S^2$ в одной вещественной точке, то пересечение $X \cap S^{n-1}$ состоит из двух пересекающихся прямых. При этом в точках, лежащих только на одной из этих прямых, $X$ и $S^2$ пересекаются трансверсально.

*Замечание 2.* Каждое многообразие коразмерности не меньше двух вкладывается в конус той же степени [2].

Интересно найти достаточное условие, при котором проективное многообразие не содержит невырожденных подмногообразий той же степени. В частности, верно ли следующее: *если $X \subset \mathbb{CP}^n$ — гиперповерхность четвёртой степени, $Y \subset X$ — невырожденное подмногообразие четвёртой степени размерности $n-2$, то гиперповерхность $X$ бирационально изоморфна произведению $Y \times \mathbb{CP}^1$.*

Авторы благодарны Д.П. Ильютко за обсуждение результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хартсхорн Р. *Алгебраическая геометрия.* М.: Мир, 1981. (Hartshorne R. *Algebraic Geometry.* Springer, 1977.)

2. Харрис Дж. *Алгебраическая геометрия. Начальный курс.* М.: МЦНМО, 2005. (Harris J. *Algebraic Geometry: A First Course.* Springer, 1992.)