Информационные процессы, Том 10, № 3, 2010, стр. 257–274

Решение задач оптимального синтеза для некоторых марковских моделей обслуживания

Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 29.08.2010

Аннотация—Для систем обслуживания M/M/1/r, M/M/n, а также системы M/M/1 с пороговым переключением режимов обслуживания в момент изменения числа заявок и такой же системы с пороговой блокировкой потока заявок определены условия монотонной зависимости стационарных характеристик (для системы M/M/1/r — вероятности потери заявки, средней длины очереди и среднего времени ожидания заявки в очереди, для остальных систем — среднего времени ожидания заявки в очереди) от параметров системы (объёма накопителя, коэффициента загрузки системы, числа линий, порога переключения режимов обслуживания). Свойство монотонности характеристик использовано для решения задач оптимального синтеза систем с заданными стационарными характеристиками. Полученные результаты проверены с помощью имитационных моделей, построенных с привлечением инструментальных средств GPSS World.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной целью исследования *систем массового обслуживания* (СМО) является повышение эффективности работы соответствующих реальных систем. Поэтому, кроме обычно рассматриваемых в классической теории массового обслуживания вопросов определения характеристик исследуемых систем, всё больше внимания в научной литературе приделяется задачам для управляемых СМО (см. обзор [1]), среди которых важное практическое значение имеют задачи минимизации некоторых экономических (стоимостных) функционалов [2–6] и задачи оптимального синтеза систем с заданными характеристиками [7, 8]. В задачах оптимального синтеза решаются вопросы выбора параметров системы с целью обеспечить наилучшее (по заданному критерию) качество её функционирования, причём этот выбор производится на стадии проектирования системы.

Чтобы раскрыть цель и содержание настоящей работы, рассмотрим для системы обслуживания M/M/1/r с конечным объёмом накопителя ($r < \infty$) следующую задачу оптимального синтеза: *для фиксированных значений параметров λ и μ выбрать такой максимально возможный объём накопителя r, чтобы среднее время ожидания w в стационарном режиме не превышало заданное число w_0*. Из логического анализа рассматриваемой СМО следует, что функция $w = w(r, \lambda, \mu)$ монотонно возрастает по переменной r. Если свойство монотонности удастся строго доказать, то алгоритм для определения наибольшего значения параметра r, которое гарантировало бы нужное значение среднего времени ожидания, будет иметь вид: $r_{opt} = \max\{\, r \in \mathbb{N} : \; w(r, \lambda, \mu) \le w_0 \,\}$. При решении задачи оптимального синтеза могут возникнуть определённые ограничения на значение w_0.

Цель данной работы — строго доказать монотонность стационарных характеристик некоторых систем обслуживания типа M/M и использовать это свойство для решения задач оптимального синтеза систем с заданными характеристиками. Кроме классических систем типа M/M/1/r и M/M/n, будут рассмотрены СМО с пороговым переключением режимов обслуживания в момент изменения числа заявок в системе и СМО с пороговой блокировкой потока заявок. Системы с переключением режимов обслуживания в момент начала обслуживания очередной заявки изучались, в частности, в работах [3, 9], СМО с блокировкой потока заявок — в [8–11], а системы с пороговым переключением режимов обслуживания в моменты изменения числа заявок — в статье [12]. Блокировка входного потока является одним из способов контроля функционирования различных СМО. Она выражается в ограничении доступа к ресурсам системы в определённые интервалы времени и часто встречается в инфотелекоммуникационных сетях [11].

2. МОНОТОННОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ M/M/1/r

Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с объёмом накопителя r. Пусть заявки в систему поступают по одной, а промежутки времени между моментами поступления заявок и длительности обслуживания одной заявки — независимые случайные величины, распределённые по показательным законам с параметрами λ и μ соответственно, $\alpha = \lambda/\mu$ — коэффициент загрузки системы.

Введём обозначения для стационарных характеристик системы: π — вероятность потери заявки, Q — средняя длина очереди, w — среднее время ожидания заявки в очереди.

Запишем формулы для стационарных характеристик π, Q и w:

$$\pi = \frac{\alpha^{r+1}}{\sum\limits_{k=0}^{r+1} \alpha^k}\,; \tag{1}$$

$$\pi = \frac{1}{r+2}\,, \quad \alpha = 1; \qquad \pi = \frac{\alpha^{r+1} - \alpha^{r+2}}{1 - \alpha^{r+2}}\,, \quad \alpha \neq 1; \tag{2}$$

$$Q = \frac{\alpha^2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} (k+1)\alpha^k}{\sum\limits_{k=0}^{r+1} \alpha^k}\,; \tag{3}$$

$$Q = \frac{r(r+1)}{2(r+2)}\,, \quad \alpha = 1; \qquad Q = \frac{\alpha^2\bigl(1 - \alpha^r(r(1-\alpha)+1)\bigr)}{(1-\alpha)(1-\alpha^{r+2})}\,, \quad \alpha \neq 1; \tag{4}$$

$$w = \frac{\alpha^2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} (k+1)\alpha^k}{\lambda \sum\limits_{k=0}^{r} \alpha^k}\,; \tag{5}$$

$$w = \frac{r}{2\lambda}\,, \quad \alpha = 1; \qquad w = \frac{\alpha^2\bigl(1 - \alpha^r(r(1-\alpha)+1)\bigr)}{\lambda(1-\alpha)(1-\alpha^{r+1})}\,, \quad \alpha \neq 1. \tag{6}$$

Характеристики π, Q и w являются функциями переменных r и α (w зависит также и от параметра λ). Для упрощения изложения здесь и ниже для других аналогичных зависимостей мы будем использовать обозначения $\pi(r)$, $Q(r)$ и $w(r)$, если значение параметра α фиксировано и, наоборот, $\pi(\alpha)$, $Q(\alpha)$ и $w(\alpha)$, если зафиксировано значение r. Ниже, когда будет идти речь о зависимостях $w(r)$, $w(\alpha)$, $w(n)$, $w(h)$ и о задачах оптимального синтеза для w, будем считать, не оговаривая этого дополнительно, что зафиксирован также и параметр λ.

Исследуем характер зависимостей $\pi(r)$, $Q(r)$, $w(r)$ и $\pi(\alpha)$, $Q(\alpha)$, $w(\alpha)$, определяемых соотношениями (1)–(6).

Теорема 1. *Для фиксированного положительного значения α функция $\pi(r)$ убывает, а функции $Q(r)$ и $w(r)$ возрастают для всех $r \geq 1$.*

Доказательство. Если $\alpha = 1$, то из первой формулы (2) видим, что $\pi(r)$ — убывающая функция, а для $\alpha \neq 1$ убывание $\pi(r)$ следует из того, что для всех положительных α производная

$$\pi'(r) = \frac{\alpha^{r+1}(1-\alpha)\ln\alpha}{(1-\alpha^{r+2})^2} < 0.$$

Для $\alpha = 1$ из (4) получаем

$$Q'(r) = \frac{r^2+4r+2}{2(r+2)^2} > 0,$$

поэтому возрастание $Q(r)$ при $\alpha = 1$ доказано. Возрастание $Q(r)$ для $\alpha \neq 1$ вытекает из следующих соотношений, полученных с помощью (4),

$$\begin{aligned} &Q(r+1) - Q(r) \\ &= \frac{\alpha^2\big(\big(1-\alpha^{r+1}-(r+1)(1-\alpha)\alpha^{r+1}\big)(1-\alpha^{r+2}) - \big(1-\alpha^r - r(1-\alpha)\alpha^r\big)(1-\alpha^{r+3})\big)}{(1-\alpha)(1-\alpha^{r+2})(1-\alpha^{r+3})} \\ &= \frac{\alpha^{r+2}(1-\alpha)^2\big((r+1)(1+\alpha) + \sum\limits_{k=2}^{r+1}(r+2-k)\alpha^k\big)}{(1-\alpha^{r+2})(1-\alpha^{r+3})} > 0. \end{aligned}$$

Для $\alpha = 1$ возрастание $w(r)$ следует из первой формулы (6). Возрастание $w(r)$ для $\alpha \neq 1$ вытекает из соотношений, полученных из (6),

$$\begin{aligned} &w(r+1) - w(r) \\ &= \frac{\alpha^2\big(\big(1-\alpha^{r+1}-(r+1)(1-\alpha)\alpha^{r+1}\big)(1-\alpha^{r+1}) - \big(1-\alpha^r - r(1-\alpha)\alpha^r\big)(1-\alpha^{r+2})\big)}{\lambda(1-\alpha)(1-\alpha^{r+1})(1-\alpha^{r+2})} \\ &= \frac{\alpha^{r+2}(1-\alpha)^2\big(r+1 + \sum\limits_{k=1}^{r}(r+1-k)\alpha^k\big)}{\lambda(1-\alpha^{r+1})(1-\alpha^{r+2})} > 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Для фиксированного значения $r \geq 1$ функции $\pi(\alpha)$, $Q(\alpha)$ и $w(\alpha)$ возрастают для всех положительных α.*

Доказательство. Используя равенство (1), находим производную

$$\pi'(\alpha) = \frac{\alpha^r}{\left(\sum\limits_{k=0}^{r+1}\alpha^k\right)^2} \cdot \sum_{k=0}^{r+1}(r+1-k)\alpha^k > 0,$$

поэтому возрастание $\pi(\alpha)$ доказано.

С помощью соотношения (3) получаем

$$Q'(\alpha) = \frac{Q_1(r,\alpha)}{\left(\sum\limits_{k=0}^{r+1} \alpha^k\right)^2},$$

где

$$Q_1(r,\alpha) = \sum_{k=0}^{r-1} (k+2)(k+1)\alpha^{k+1} \cdot \sum_{k=0}^{r+1} \alpha^k - \sum_{k=0}^{r-1} (k+1)\alpha^{k+2} \cdot \sum_{k=1}^{r+1} k\alpha^{k-1}.$$

Докажем методом математической индукции, что $Q_1(r,\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$ и $r \geq 1$. Действительно, для $r = 1$ имеем: $Q_1(1,\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha > 0$. Предположим, что $Q_1(\widetilde{r},\alpha) > 0$ для фиксированного целого $\widetilde{r} > 1$. Докажем, что $Q_1(\widetilde{r}+1,\alpha) > 0$. После несложных преобразований получаем

$$Q_1(\widetilde{r}+1,\alpha) = Q_1(\widetilde{r},\alpha) + \alpha^{\widetilde{r}+1}\left((\widetilde{r}+2)(\widetilde{r}+1) + \sum_{k=1}^{\widetilde{r}+1} (\widetilde{r}+2-k)^2\alpha^k\right) > 0.$$

Итак, $Q_1(r,\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$ и $r \geq 1$, а это значит, что $Q'(\alpha) > 0$, то есть возрастание $Q(\alpha)$ доказано.

Используя равенство (5), находим производную

$$w'(\alpha) = \frac{w_1(r,\alpha)}{\lambda\left(\sum\limits_{k=0}^{r} \alpha^k\right)^2},$$

где

$$w_1(r,\alpha) = \sum_{k=0}^{r-1} (k+2)(k+1)\alpha^{k+1} \cdot \sum_{k=0}^{r} \alpha^k - \sum_{k=0}^{r-1} (k+1)\alpha^{k+2} \cdot \sum_{k=1}^{r} k\alpha^{k-1}.$$

Докажем методом математической индукции, что $w_1(r,\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$ и $r \geq 1$. Для $r = 1$ имеем: $w_1(1,\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha > 0$. Предположим, что $w_1(\tilde{r},\alpha) > 0$ для фиксированного целого $\tilde{r} > 1$. Для $r = \tilde{r} + 1$ получаем

$$w_1(\widetilde{r}+1,\alpha) = w_1(\widetilde{r},\alpha) + \alpha^{\widetilde{r}+1} \sum_{k=0}^{\widetilde{r}+1} \big(k^2 - (2\widetilde{r}+1)k + (\widetilde{r}+1)(\widetilde{r}+2)\big)\alpha^k > 0.$$

Итак, $w_1(r,\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$ и $r \geq 1$, то есть возрастание $w(\alpha)$ доказано и тем самым теорема доказана. □

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДЛЯ СИСТЕМЫ M/M/1/r

Сформулируем задачу оптимального синтеза системы с заданной стационарной характеристикой π, которую коротко будем называть задачей ($r_{\min}$, π): *для фиксированного значения параметра α найти такое* **наименьшеее** *значение параметра r, чтобы вероятность потери заявки не превышала заданное число π_0.*

Для характеристик Q и w задачи ($r_{\max}$, Q) и ($r_{\max}$, w) соответственно формулируются так: *для фиксированного значения параметра α найти такое* **наибольшеее** *значение параметра r, чтобы средняя длина очереди не превышала заданное число Q_0 (среднее время ожидания в очереди не превышало заданное число w_0 соответственно).*

Теорема 3. *1) Если выполняются условия*

$$0 < \pi_0 \le \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} \tag{7}$$

для $\alpha \le 1$ *и*

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} < \pi_0 \le \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} \tag{8}$$

для $\alpha > 1$*, то единственное решение задачи* $(r_{\min}, \pi)$ *можно найти с помощью алгоритма*

$$r_{opt} = \min\{\, r \in \mathbb{N} : \ \pi(r) \le \pi_0 \,\}. \tag{9}$$

Если $\alpha = 1$*, то алгоритм (9) упрощается к виду*

$$r_{opt} = \min_{r\in\mathbb{N}} \left\{ r \ge \frac{1-2\pi_0}{\pi_0} \right\}. \tag{9_1}$$

2) Если выполняются условия

$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} \le Q_0 < \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \tag{10}$$

для $\alpha < 1$ *и*

$$Q_0 \ge \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} \tag{11}$$

для $\alpha \ge 1$*, то единственное решение задачи* $(r_{\max}, Q)$ *можно найти с помощью алгоритма*

$$r_{opt} = \max\{\, r \in \mathbb{N} : \ Q(r) \le Q_0 \,\}. \tag{12}$$

Если $\alpha = 1$*, то алгоритм (12) упрощается к виду*

$$r_{opt} = \max_{r\in\mathbb{N}} \{\, r \le 2Q_0 - 1 + \sqrt{(2Q_0-1)^2 + 16Q_0} \,\}. \tag{12_1}$$

3) Если выполнены условия

$$\frac{\alpha^2}{\lambda(1+\alpha)} \le w_0 < \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)} \tag{13}$$

для $\alpha < 1$ *и*

$$w_0 \ge \frac{\alpha^2}{\lambda(1+\alpha)} \tag{14}$$

для $\alpha \ge 1$*, то единственное решение задачи* $(r_{\max}, w)$ *можно найти с помощью алгоритма*

$$r_{opt} = \max\{\, r \in \mathbb{N} : \ w(r) \le w_0 \,\}. \tag{15}$$

Если $\alpha = 1$*, то алгоритм (15) упрощается к виду*

$$r_{opt} = \max_{r\in\mathbb{N}} \{\, r \le 2\lambda w_0 \,\}. \tag{15_1}$$

Доказательство. Формулы (9), (12) и (15) следуют из свойств монотонности функций $\pi(r)$, $Q(r)$ и $w(r)$, вытекающих из теоремы 1. Соотношения (9_1), (12_1) и (15_1) получены в результате решения неравенств из (9), (12) и (15) с учётом первых формул (2), (4) и (6).

Из равенств (1)–(6) выводим предельные соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\pi(r)=0,\quad \alpha\le 1;\qquad \lim_{r\to\infty}\pi(r)=\frac{\alpha-1}{\alpha},\quad \alpha>1;\qquad \pi(1)=\frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2};$$
$$\lim_{r\to\infty}Q(r)=\frac{\alpha^2}{1-\alpha},\quad \alpha<1;\qquad \lim_{r\to\infty}Q(r)=\infty,\quad \alpha\ge 1;\qquad Q(1)=\frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2};$$
$$\lim_{r\to\infty}w(r)=\frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)},\quad \alpha<1;\qquad \lim_{r\to\infty}w(r)=\infty,\quad \alpha\ge 1;\qquad w(1)=\frac{\alpha^2}{\lambda(1+\alpha)}.$$

С учётом этих соотношений и свойств монотонности функций $\pi(r)$, $Q(r)$ и $w(r)$ видим, что условия (7), (8), (10), (11), (13) и (14) обеспечивают существование и единственность решений задач $(r_{\min}, \pi)$, $(r_{\max}, Q)$ и $(r_{\max}, w)$, найденных по алгоритмам (9), (12) и (15) соответственно. Например, условие (10) выводим из соотношений

$$Q(1)\le Q(r)<Q(\infty),\qquad Q(1)\le Q_0<Q(\infty).$$

Существование решения задачи $(r_{\max}, Q)$ следует из совпадения пределов изменения $Q(r)$ и Q_0, а единственность — из монотонности $Q(r)$. Теорема доказана. □

Сформулируем задачу оптимального синтеза системы с заданной характеристикой K, которую будем называть задачей $(\alpha_{\max}, K)$: *для фиксированного значения объёма накопителя r найти такое* **наибольшее** *значение параметра α, чтобы значение характеристики K не превышало заданное число k_0*. Здесь мы будем рассматривать три отдельные задачи для $K=\pi$; Q и w, в которых $k_0=\pi_0$; Q_0 и w_0 соответственно.

Теорема 4. *1) Если $0<\pi_0<1$, то единственное решение задачи $(\alpha_{\max}, \pi)$ определяется в виде*

$$\alpha_{opt}=\alpha_\pi^*, \tag{16}$$

где α_π^* — единственный положительный корень уравнения $\pi(\alpha)=\pi_0$.

2) Если $0<Q_0<r$, то единственное решение задачи $(\alpha_{\max}, Q)$ определяется в виде

$$\alpha_{opt}=\alpha_Q^*, \tag{17}$$

где α_Q^* — единственный положительный корень уравнения $Q(\alpha)=Q_0$.

3) Для произвольного $w_0>0$ единственное решение задачи $(\alpha_{\max}, w)$ определяется в виде

$$\alpha_{opt}=\alpha_w^*, \tag{18}$$

где α_w^* — единственный положительный корень уравнения $w(\alpha)=w_0$.

Доказательство. Из равенств (2), (4) и (6) получаем предельные соотношения

$$\lim_{\alpha\to 0}\pi(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}Q(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}w(\alpha)=0;\quad \lim_{\alpha\to\infty}\pi(\alpha)=1;\quad \lim_{\alpha\to\infty}Q(\alpha)=r;\quad \lim_{\alpha\to\infty}w(\alpha)=\infty.$$

Учитывая эти соотношения и возрастание функций $\pi(\alpha)$, $Q(\alpha)$ и $w(\alpha)$, следующее из теоремы 2, делаем вывод, что условия $0<\pi_0<1$, $0<Q_0<r$ и $w_0>0$ обеспечивают существование и единственность решений задач $(\alpha_{\max}, \pi)$, $(\alpha_{\max}, Q)$ и $(\alpha_{\max}, w)$, найденных в виде (16), (17) и (18) соответственно, как единственных корней уравнений $\pi(\alpha)=\pi_0$, $Q(\alpha)=Q_0$ и $w(\alpha)=w_0$. Теорема доказана. □

4. СИСТЕМА M/M/n С ЗАДАННЫМ СРЕДНИМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ

Рассмотрим классическую n-линейную систему обслуживания с неограниченным объёмом накопителя. Если $\alpha = \lambda/\mu$ — коэффициент загрузки системы, и $\alpha < n$, то стационарное значение среднего времени ожидания существует и определяется по формуле

$$w = \frac{n\alpha^{n+1}}{\lambda(n-\alpha)\left(\alpha^{n+1} + n!(n-\alpha)\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}\right)}\,. \tag{19}$$

Исследуем характер зависимостей $w(n)$ и $w(\alpha)$.

Теорема 5. *1) Для фиксированного значения $\alpha \in (0, n_0)$, где $n_0 \geq 1$ — целое число, функция $w(n)$ убывает для всех $n \geq n_0$.*

2) Для фиксированного значения $n \geq 1$ функция $w(\alpha)$ возрастает для всех $\alpha \in (0, n)$.

Доказательство. 1) Для $n \geq n_0$ и фиксированного значения $\alpha \in (0, n_0)$ из (19) получаем соотношение

$$w(n+1) - w(n) = \frac{w_1(n,\alpha)}{\lambda\, w_2(n,\alpha)}\,,$$

где

$$\begin{aligned} w_1(n,\alpha) = &-\alpha^{n+1}\Biggl(n(n+1-\alpha)^2(n-\alpha)n!\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} \\ &+\alpha^{n+3} + n(n+1-\alpha)(n+1)!\Biggl(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\alpha^k}{k!} + (n-\alpha)\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\Biggr)\Biggr); \\ w_2(n,\alpha) = &(n-\alpha)(n+1-\alpha)\Biggl(n!(n-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \alpha^{n+1}\Biggr) \\ &\times\Biggl((n+1)!(n+1-\alpha)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\alpha^k}{k!} + \alpha^{n+2}\Biggr). \end{aligned}$$

Поскольку $w_1(n,\alpha) < 0$, а $w_2(n,\alpha) > 0$, то убывание $w(n)$ доказано.

2) Вычислив производную $w'(\alpha)$, после несложных преобразований находим

$$w'(\alpha) = \frac{n^2 w_3(n,\alpha)}{\lambda\, w_4(n,\alpha)}\,,$$

где

$$\begin{aligned} w_3(n,\alpha) &= (n-1)!(n-\alpha)\bigl((n+1-\alpha)(n-\alpha)+2\alpha\bigr)\alpha^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!} + \alpha^{2n}\bigl((n-\alpha)^2+n\bigr); \\ w_4(n,\alpha) &= (n-\alpha)^2\Biggl(n!(n-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \alpha^{n+1}\Biggr)^2. \end{aligned}$$

Итак, $w_3(n,\alpha) > 0$, $w_4(n,\alpha) > 0$ и $w'(\alpha) > 0$. Теорема доказана. $\Box$

Сформулируем задачу ($n_{\min}$, w) для среднего времени ожидания заявки в системе M/M/n: *для фиксированного значения коэффициента загрузки системы α найти такое* **наименьшее** *значение числа линий системы n ($n > \alpha$), чтобы стационарное значение среднего времени ожидания заявки в очереди не превышало заданное число w_0.*

Теорема 6. *Если* $n_0 - 1 \le \alpha < n_0$ (n_0 *— целое число,* $n_0 \ge 1$, $\alpha \ne 0$) *и выполняется условие*

$$0 < w_0 \le w(n_0) = \frac{n_0 \alpha^{n_0+1}}{\lambda(n_0-\alpha)\left(\alpha^{n_0+1} + (n_0)!(n_0-\alpha)\sum\limits_{k=0}^{n_0} \dfrac{\alpha^k}{k!}\right)}, \tag{20}$$

то единственное решение задачи ($n_{\min}$, w) *можно найти с помощью алгоритма*

$$n_{opt} = \min\{\, n \in \mathbb{N} : \; w(n) \le w_0 \,\}. \tag{21}$$

Доказательство. Из соотношений $\alpha \in [n_0 - 1; n_0)$, $n > \alpha$ для решения задачи ($n_{\min}$, w) получаем условие $n \ge n_0$. Тогда, учитывая убывание функции $w(n)$, вытекающее из теоремы 5, находим, что $w(n) \le w(n_0)$. Отсюда с учётом (20) и убывания $w(n)$ получаем соотношение (21). Теорема доказана. □

Задачу ($\alpha_{\max}$, w) для среднего времени ожидания w сформулируем следующим образом: *при фиксированном значении числа линий системы* n *найти такое* **наибольшее** *значение коэффициента загрузки системы* α, *при котором* $w(\alpha) \le w_0$.

Теорема 7. *Для любого конечного* $w_0 > 0$ *единственное решение задачи* ($\alpha_{\max}$, w) *определяется в виде*

$$\alpha_{opt} = \alpha^*, \tag{22}$$

где α^* *— единственный корень уравнения* $w(\alpha) = w_0$ *на промежутке* $(0, n)$.

Доказательство. Из (19) находим предельные соотношения:

$$\lim_{\alpha \to 0} w(\alpha) = 0, \qquad \lim_{\alpha \to n} w(\alpha) = \infty.$$

Отсюда, поскольку $\alpha < n$, и функция $w(\alpha)$ согласно теореме 5 возрастает, для значения $w(\alpha_{opt})$ получаем оценку $w(\alpha_{opt}) < \lim\limits_{\alpha \to n} w(\alpha) = \infty$. Пределы изменения $w(\alpha)$ и w_0 должны совпадать, поэтому никаких ограничений сверху для значений w_0, при которых найдётся единственный корень уравнения $w(\alpha) = w_0$, не существует. Следовательно, для любого конечного $w_0 > 0$ решение α_{opt} определяется в виде (22). Теорема доказана. □

5. СИСТЕМА M/M/1 С ПОРОГОВЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим систему обслуживания M/M/1 с неограниченным объёмом накопителя, заявки в которую поступают по одной, а промежутки времени между моментами поступления заявок — независимые случайные величины, распределённые по показательному закону с параметром λ.

Обслуживание заявок может осуществляться в двух режимах. Время обслуживания в каждом из них распределено по показательному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Обслуживание с интенсивностью μ_1 осуществляется при условии, что число заявок в системе не превышает заданного порогового значения h ($h \ge 1$). Переключение на режим обслуживания с интенсивностью μ_2 происходит в момент прибытия в систему $(h+1)$-ой заявки (то есть в момент, когда число заявок в системе станет равным $h+1$).

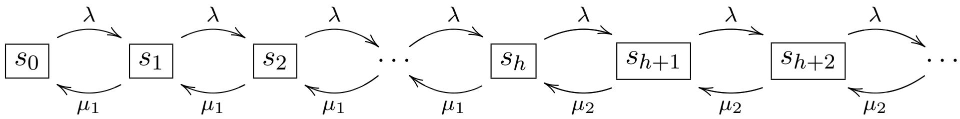

Рис. 1

Введём нумерацию состояний системы (см. рис. 1): s_0 — система свободна; s_k $(k \geq 1)$ — в системе находится k заявок. Пусть $\alpha = \lambda/\mu_1$ — коэффициент загрузки системы в режиме обслуживания с интенсивностью μ_1, $\gamma = \mu_1/\mu_2$, $\gamma\alpha$ — коэффициент загрузки системы в режиме обслуживания с интенсивностью μ_2, $p_k(t)$ — вероятность пребывания системы в состоянии s_k в момент времени t. Если $\gamma\alpha < 1$, то существуют пределы $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)$, и стационарные вероятности p_k удовлетворяют системе уравнений, полученной с помощью диаграммы состояний (рис. 1):

$$\begin{gathered} -\lambda p_0 + \mu_1 p_1 = 0; \qquad \lambda p_{k-1} + \mu_1 p_{k+1} - (\lambda + \mu_1) p_k = 0 \quad (\,k = \overline{1,\, h-1}\,); \\ \lambda p_{h-1} + \mu_2 p_{h+1} - (\lambda + \mu_1) p_h = 0; \qquad \lambda p_{k-1} + \mu_2 p_{k+1} - (\lambda + \mu_2) p_k = 0 \;\; (\,k \geq h+1\,); \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Используя решения системы уравнений (23)

$$\begin{gathered} p_k = \alpha^k p_0 \quad (\,k = \overline{0,\, h}\,); \qquad p_k = \gamma^{k-h} \alpha^k p_0 \quad (\,k \geq h+1\,); \\ p_0 = \frac{1-\gamma}{1 + h(1-\gamma)}\,, \quad \alpha = 1; \qquad p_0 = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma\alpha)}{1 - \alpha^{h+1} - \gamma\alpha(1-\alpha^h)}\,, \quad \alpha \neq 1, \end{gathered}$$

находим стационарное значение среднего времени ожидания заявки в системе

$$w = \frac{1-\gamma}{\lambda\big(1 + h(1-\gamma)\big)} \left(\frac{h(h-1)}{2} + \frac{\gamma\big(\gamma + h(1-\gamma)\big)}{(1-\gamma)^2} \right), \qquad \alpha = 1, \quad \gamma < 1; \tag{24}$$

$$w = \frac{\alpha^2 w_1(\alpha, \gamma, h)}{\lambda\, w_2(\alpha, \gamma, h)}\,, \qquad \alpha \neq 1, \quad \gamma\alpha < 1, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} w_1(\alpha, \gamma, h) &= (1-\gamma\alpha)^2 \big(1 - h\alpha^{h-1} + (h-1)\alpha^h\big) + \gamma\alpha^{h-1}(1-\alpha)^2 \big(\gamma\alpha + h(1-\gamma\alpha)\big); \\ w_2(\alpha, \gamma, h) &= (1-\alpha)(1-\gamma\alpha)\big(1 - \alpha^{h+1} - \gamma\alpha(1-\alpha^h)\big). \end{aligned}$$

Исследуем характер зависимостей $w(h)$, определяемых соотношениями (24), (25) при фиксированных значениях параметров α, γ, λ.

Теорема 8. *Если $\gamma\alpha < 1$, $\gamma < 1$, то функция $w(h)$ возрастает для всех $h \geq 1$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = 1$. По условию теоремы $\widetilde{\gamma} = 1 - \gamma > 0$. С помощью соотношения (24) после несложных преобразований находим

$$w(h+1) - w(h) = \frac{h(h+1)\widetilde{\gamma}^2 + 2(h+\gamma)\widetilde{\gamma}}{2\lambda(h\widetilde{\gamma} + 1)\big((h+1)\widetilde{\gamma} + 1\big)} > 0.$$

Итак, при $\alpha = 1$ возрастание $w(h)$ доказано.

Пусть $\alpha \neq 1$. С помощью равенства (25) получаем соотношение

$$w(h+1) - w(h) = \frac{\alpha^{h+1}(1-\gamma)f(\alpha,\gamma,h)}{\lambda\big(1-\alpha^{h+1}-\gamma\alpha(1-\alpha^h)\big)\big(1-\alpha^{h+2}-\gamma\alpha(1-\alpha^{h+1})\big)}\,, \tag{26}$$

где

$$f(\alpha,\gamma,h) = h(1-\alpha)(1-\gamma\alpha) + \gamma\alpha\big(1-\alpha+\alpha^2(1-\alpha^{h-1})\big) - \alpha^2(1-\alpha^h).$$

Из вида (26) и условий теоремы заключаем, что если $f(\alpha,\gamma,h) > 0$, то $w(h+1)-w(h) > 0$. Докажем методом математической индукции, что $f(\alpha,\gamma,h) > 0$ для всех $h \geq 1$. При $h = 1$ получаем: $f(\alpha,\gamma,1) = (1-\alpha)^2(1+\alpha) > 0$. Предположим, что $f(\alpha,\gamma,\widetilde{h}) > 0$ для некоторого $\widetilde{h} > 1$. Тогда находим

$$\begin{aligned} f(\alpha,\gamma,\widetilde{h}+1) &= f(\alpha,\gamma,\widetilde{h}) + (1-\alpha)\big(1-\gamma\alpha-(1-\gamma)\alpha^{\widetilde{h}+2}\big) \\ &= f(\alpha,\gamma,\widetilde{h}) + (1-\alpha)^2\left((1-\gamma\alpha)\sum_{k=0}^{\widetilde{h}}\alpha^k + \alpha^{\widetilde{h}+1}\right) > 0. \end{aligned}$$

Итак, $f(\alpha,\gamma,h) > 0$ для всех $h \geq 1$. Теорема доказана. □

Для рассматриваемой системы обслуживания сформулируем задачу ($h_{\max}$, w): *при фиксированных значениях параметров α и γ найти такое* **наибольшее** *значение порога переключения h, при котором стационарное значение среднего времени ожидания заявки в очереди не превышало бы заданное число w_0.*

Теорема 9. *Пусть $\gamma < 1$ и $\gamma\alpha < 1$. Если выполнены условия*

$$\frac{\gamma\alpha^2}{\lambda(1-\gamma\alpha)\big(1+\alpha(1-\gamma)\big)} \leq w_0 < \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)} \tag{27}$$

для $0 < \alpha < 1$, и условие

$$w_0 \geq \frac{\gamma\alpha^2}{\lambda(1-\gamma\alpha)\big(1+\alpha(1-\gamma)\big)} \tag{28}$$

для $\alpha \geq 1$, то единственное решение задачи ($h_{\max}$, w) определяется с помощью алгоритма

$$h_{opt} = \max\{\, h \in \mathbb{N}:\ w(h) \leq w_0 \,\}. \tag{29}$$

Доказательство. Из равенств (24) и (25) получаем предельные соотношения

$$\lim_{h\to\infty} w(h) = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)}\,, \quad 0 < \alpha < 1; \qquad \lim_{h\to\infty} w(h) = \infty, \quad \alpha \geq 1;$$
$$w(1) = \frac{\gamma\alpha^2}{\lambda(1-\gamma\alpha)\big(1+\alpha(1-\gamma)\big)}\,.$$

Из возрастания функции $w(h)$ (см. теорему 8) следует, что $w(1) \leq w(h) < w(\infty)$. Для существования решения задачи ($h_{\max}$, w) значение w_0 должно изменяться в таких же пределах, что обеспечивается условиями (27) и (28). Единственность решения в виде (29) следует из свойства монотонности $w(h)$. Теорема доказана. □

6. СИСТЕМА M/M/1 С ПОРОГОВЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ И БЛОКИРОВКОЙ ПОТОКА ЗАЯВОК

Рассмотрим систему обслуживания с пороговым переключением режимов обслуживания, описанную в предыдущем пункте. Сначала предполжим, что объём накопителя ограничен и равен r, и, кроме того, после переключения на режим обслуживания с интенсивностью μ_2 в момент начала обслуживания следующей заявки начинается блокировка входного потока. Итак, после переключения на режим обслуживания с интенсивностью μ_2 блокировка потока заявок не осуществляется только на протяжении времени дообслуживания той заявки, во время обслуживания которой произошло переключение режимов. Если же в момент начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе не превышает h, то блокировка входного потока прекращается и возобновляется режим обслуживания с интенсивностью μ_1.

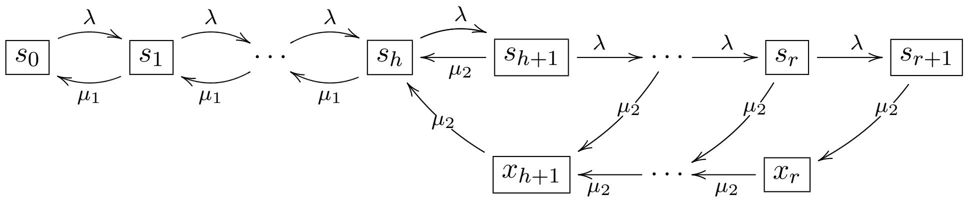

Рис. 2

Введём нумерацию состояний системы (см. рис. 2): s_0 — система свободна; s_k $(k=\overline{1,\,r+1})$ — в системе k заявок, входной поток не блокируется (кроме состояния s_{r+1}); x_k $(k=\overline{h+1,\,r})$ — в системе k заявок, используется режим обслуживания с интенсивностью μ_2, потока заявок заблокирован.

Пусть $p_k(t)$ $(q_k(t))$ — вероятность пребывания системы в состоянии s_k (x_k) в момент времени t. Если $r<\infty$, то существуют пределы $p_k=\lim\limits_{t\to\infty}p_k(t)$, $q_k=\lim\limits_{t\to\infty}q_k(t)$. Стационарные вероятности p_k и q_k, найденные из системы уравнений, полученной с помощью диаграммы состояний (рис. 2), записываются в виде:

$$
\begin{aligned}
&p_k=\gamma^{h-k}\beta^{h+1-k}(1+\beta)^{r-h}p_{r+1} \qquad (\,k=\overline{0,\,h}\,);\\
&p_k=\beta(1+\beta)^{r-k}p_{r+1} \quad (\,k=\overline{h+1,\,r}\,); \qquad q_k=(1+\beta)^{r-k}p_{r+1} \quad (\,k=\overline{h+1,\,r}\,);\\
&p_{r+1}=\frac{\beta(\gamma\beta-1)}{\big(\gamma\beta^3\big((\gamma\beta)^h-1\big)+(\gamma\beta-1)(\beta^2+\beta+1)\big)(1+\beta)^{r-h}-(\gamma\beta-1)}\,, \qquad \gamma\beta\neq1; \qquad (30)\\
&p_{r+1}=\frac{\beta}{\big((h+1)\beta^2+\beta+1\big)(1+\beta)^{r-h}-1}\,, \qquad \gamma\beta=1,
\end{aligned}
$$

где $\beta=\mu_2/\lambda,\ \gamma=\mu_1/\mu_2$.

Далее ограничимся рассмотрением случая неограниченного накопителя $(r\to\infty)$, для которого стационарные значения среднего времени ожидания заявки в очереди, найденные с использованием стационарных вероятностей (30) после предельного перехода $r\to\infty$, определяются по формулам

$$
w=\frac{\beta^3\big((\gamma\beta)^h-1-h(\gamma\beta-1)\big)+(1+\beta)(h\beta+1)(\gamma\beta-1)^2}{\lambda\beta^2(\gamma\beta-1)\big(\gamma\beta^2\big((\gamma\beta)^h-1\big)+(\gamma\beta-1)(1+\beta)\big)}\,, \qquad \gamma\beta\neq1; \qquad (31)
$$

$$
w=\frac{(h-1)h\beta^3+2(1+\beta)(h\beta+1)}{2\lambda\beta^2\big((h+1)\beta+1\big)}\,, \qquad \gamma\beta=1. \qquad (32)
$$

Исследуем характер зависимостей $w(h)$, определяемых соотношениями (31), (32) при фиксированных значениях параметров β, γ и λ.

Теорема 10. *1) Если $\gamma\beta \le 1$, то функция $w(h)$ возрастает для всех $h \ge 1$. 2) Если $\gamma\beta > 1$ и $0 < \gamma \le 1$, то функция $w(h)$ возрастает для всех $h \ge 1$.*

Доказательство. Если $\gamma\beta = 1$, то вычисляя производную в (32), получаем

$$w'(h) = \frac{(h^2+2h-1)\beta^4 + (2h-1)\beta^3 + 2\beta^2(1+\beta)}{2\lambda\beta^2\big((h+1)\beta+1\big)^2}.$$

Очевидно, что $w'(h) > 0$ для всех $\gamma > 0$, $h \ge 1$, поэтому для случая $\gamma\beta = 1$ утверждение теоремы доказано.

Пусть $\gamma\beta \ne 1$, тогда, используя соотношение (31), находим

$$w(h+1) - w(h) = \frac{(\widetilde{\beta}-1)^2 F_1(\beta,\gamma,h)}{\lambda\beta^2 F_2(\beta,\gamma,h)},$$

где

$$F_1(\beta,\gamma,h) = \beta(1+\beta)(1+\beta-\widetilde{\beta}^{h+1}) + \beta^3(1+\beta)\sum_{k=0}^{h-1}\widetilde{\beta}^k + \beta^2\widetilde{\beta}\big(\beta^2 - (1+\beta)(\widetilde{\beta}-1)\big)\sum_{k=0}^{h-1}(k+1)\widetilde{\beta}^k;$$
$$F_2(\beta,\gamma,h) = \big(\beta\widetilde{\beta}(\widetilde{\beta}^h - 1) + (\widetilde{\beta}-1)(1+\beta)\big)\big(\beta\widetilde{\beta}(\widetilde{\beta}^{h+1}-1) + (\widetilde{\beta}-1)(1+\beta)\big); \qquad \widetilde{\beta} = \gamma\beta.$$

Очевидно, что $F_2(\beta,\gamma,h) > 0$ для всех $\gamma > 0$, $h \ge 1$, а $F_1(\beta,\gamma,h) > 0$ для $\gamma > 0$, $0 < \widetilde{\beta} < 1$, $h \ge 1$, поэтому утверждение п. 1 теоремы доказано.

Пусть $\gamma\beta = \widetilde{\beta} > 1$. Докажем, что $F_1(\beta,\gamma,h) > 0$ для $0 < \gamma \le 1$, $h \ge 1$. В самом деле, положительность $F_1(\beta,\gamma,h)$ вытекает из соотношений:

$$\beta^2 - (1+\beta)(\widetilde{\beta}-1) = (1-\gamma)(\beta^2+\beta) + 1 > 0;$$
$$\beta^2\sum_{k=0}^{h-1}\widetilde{\beta}^k + 1 + \beta - \widetilde{\beta}^{h+1} = \gamma^{h-1}\beta^{h+1}(1-\gamma^2) + \beta^2\sum_{k=0}^{h-2}\widetilde{\beta}^k + \beta + 1 > 0.$$

Теорема доказана. □

Для рассматриваемой системы обслуживания сформулируем задачу $(h_{\max}, w)$: *при фиксированных значениях параметров β и γ найти такое* **наибольшее** *значение порога h, при котором стационарное значение среднего времени ожидания заявки в очереди не превышало бы заданное число w_0.*

Теорема 11. *Если выполняется условие*

$$w_0 \ge \frac{(1+\beta)^2}{\lambda\beta^2(\gamma\beta^2+\beta+1)} \tag{33}$$

для случая $\gamma\beta \le 1$, или выполнены условия $0 < \gamma \le 1$,

$$\frac{(1+\beta)^2}{\lambda\beta^2(\gamma\beta^2+\beta+1)} \le w_0 < \frac{1}{\lambda\gamma\beta(\gamma\beta-1)} \tag{34}$$

для случая $\gamma\beta > 1$, то единственное решение задачи $(h_{\max}, w)$ определяется по формуле (29).

Доказательство. Из равенств (31) и (32) получаем предельные соотношения

$$\lim_{h\to\infty} w(h) = \infty, \qquad \gamma\beta \le 1; \qquad \lim_{h\to\infty} w(h) = \frac{1}{\lambda\gamma\beta(\gamma\beta-1)}, \qquad \gamma\beta > 1;$$
$$\lim_{h\to 1} w(h) = \frac{(1+\beta)^2}{\lambda\beta^2(\gamma\beta^2+\beta+1)}, \qquad \gamma\beta > 0.$$

Из возрастания функции $w(h)$ (см. теорему 10) следует, что $w(1) \le w(h) < w(\infty)$. Для существования решения задачи $(h_{\max}, w)$ значение w_0 должно изменяться в таких же пределах, что обеспечивается условиями (33) и (34). Единственность решения в виде (29) следует из свойства монотонности $w(h)$. Теорема доказана. □

7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

Остановимся на вопросах реализации алгоритмов (9), (21), (12), (15) и (29) решения задач оптимального синтеза, предложенных выше. Общим для этих задач является то, что решение каждой из них ищется на множестве натуральных чисел.

Для реализации алгоритмов (9) и (21), которые имеют вид

$$\theta_{opt} = \min\{\,\theta \in \mathbb{N}:\ K(\theta) \le k_0\,\},$$

достаточно найти единственное положительное решение $\theta = \theta^*$ уравнения $K(\theta) = k_0$ (при фиксированных значениях всех остальных параметров и определённых ограничениях на k_0) и, учитывая убывание функции $K(\theta)$, принять $\theta_{opt} = \min\limits_{\theta\in\mathbb{N}}\{\,\theta \ge \theta^*\}$.

Для реализации алгоритмов (12), (15) и (29), которые имеют вид

$$\theta_{opt} = \max\{\,\theta \in \mathbb{N}:\ K(\theta) \le k_0\,\},$$

достаточно найти единственное положительное решение $\theta = \theta^*$ уравнения $K(\theta) = k_0$ (при фиксированных значениях всех остальных параметров и определённых ограничениях на k_0) и, учитывая возрастание функции $K(\theta)$, принять $\theta_{opt} = \max\limits_{\theta\in\mathbb{N}}\{\,\theta \le \theta^*\}$.

Приведём примеры решения задач оптимального синтеза, рассмотренных выше.

Начнём с задачи $(r_{\min}, \pi)$ для системы обслуживания M/M/1/r, для решения которой воспользуемся п. 1 теоремы 3. Пусть $\alpha = 0,8$, тогда из соотношения (7) выводим ограничение на π_0: $\pi_0 \le 0,262$. Пользуясь второй формулой (2), записываем уравнение $\pi(r) = \pi_0$, которое при заданном значении α принимает вид

$$\frac{0,8^{r+1}\cdot 0,2}{1-0,8^{r+2}} = \pi_0.$$

Если $0 < \pi_0 \le 0,262$, то это уравнение имеет единственное положительное решение $r = r^*$, после определения которого решение задачи $(r_{\min}, \pi)$ находим по формуле $r_{opt} = \min\limits_{r\in\mathbb{N}}\{\,r \ge r^*\}$. Результаты расчётов для различных значений π_0 приведены в табл. 1.

Для системы обслуживания M/M/n рассмотрим задачу $(\alpha_{\max}, w)$. Пусть $n = 3$, $\lambda = 2$, тогда, согласно теореме 7, решение этой задачи существует для любого значения $w_0 > 0$ и сводится к отысканию единственного положительного корня $\alpha = \alpha^* = \alpha_{opt}$ уравнения

$$\frac{3\alpha^4}{2(3-\alpha)\left(\alpha^4 + 6(3-\alpha)\sum\limits_{k=0}^{3}\dfrac{\alpha^k}{k!}\right)} = w_0,$$

Таблица 1. Решение задачи ($r_{\min}$, π) для различных π_0 (СМО M/M/1/r)

π_0	r^*	r_{opt}	$\pi(r_{opt})$
0,01	12,601	13	0,009
0,03	8,100	9	0,023
0,05	6,300	7	0,039
0,07	4,811	5	0,066
0,09	3,956	4	0,089
0,10	3,614	4	0,089
0,15	2,396	3	0,122
0,20	1,634	2	0,173
0,25	1,106	2	0,173

Таблица 2. Решение задачи ($\alpha_{\max}$, w) для различных w_0 (СМО M/M/n)

w_0	$w^* = w_{opt}$	w_0	$w^* = w_{opt}$
0,0001	0,250	2,5	2,604
0,001	0,449	3	2,651
0,01	0,811	5	2,764
0,1	1,441	7,5	2,831
0,2	1,691	10	2,868
0,5	2,046	15	2,909
1	2,309	20	2,930
1,5	2,449	50	2,971
2	2,540	100	2,985

полученного из (19). Результаты расчётов для различных значений w_0 приведены в табл. 2.

Определённые трудности возникают при реализации алгоритма (21) решения задачи ($n_{\min}$, w) для системы обслуживания M/M/n. Найти решение $n = n^*$ уравнения $w(n) = w_0$, левая часть которого вычисляется по формуле (19) при заданных значениях α и λ, не представляется возможным, поскольку в (19) n принимает значения только из множества натуральных чисел. Но задачу ($n_{\min}$, w) можно решить, пользуясь теоремой 6 и последовательно вычисляя $w(n)$ для различных n по формуле (19). Пусть, например, $\lambda = 1$, $\alpha = 2,5$. Тогда с помощью теоремы 6 заключаем, что $n_0 = 3$ и решение задачи ($n_{\min}$, w) существует при условии, что $0 < w_0 \leq w(n_0) = w(3) = 3,511$. Далее вычисляем $w(n)$ для $n > n_0$: $w(4) = 0,533$; $w(5) = 0,130$ и т. д. Теперь, учитывая убывание $w(n)$, можно найти решения задачи ($n_{\min}$, w) для $w_0 \in (0; 3,511]$. Например, для $w_0 = 2$ решением является $n_{opt} = 4$, а при $w_0 = 0,5$ получаем решение $n_{opt} = 5$.

Рассмотрим задачу ($h_{\max}$, w) для системы обслуживания M/M/1 с пороговым переключением режимов обслуживания. Пусть $\lambda = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$. Тогда $\gamma = 0,25$, $\alpha = 2$, $\gamma\alpha = 0,5$. Видим, что условия $\gamma < 1$ и $\gamma\alpha < 1$ теоремы 9 выполняются. Из (28) получаем ограничение на значения w_0: $w_0 \geq 0,4$. Реализуя алгоритм (29), необходимо решать уравнение $w(h) = w_0$, где $w(h)$ вычисляется по формуле (25) при заданных значениях λ, γ и α. Однако получить точное решение этого трансцендентного уравнения довольно трудно (по крайней мере его не удаётся решить с помощью пакета Mathematica). Но зная, что зависимость $w(h)$ возрастающая (это следует из теоремы 8), решение задачи ($h_{\max}$, w) можно найти путём последовательного вычисления значений $w(h)$ для целых $h \geq 1$. Результаты вычислений приведены в табл. 3 для различных значений w_0. В последнем столбце таблицы для сравнения записаны значения среднего времени ожидания $w(h_{opt})$, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [13, 14] для значения времени моделирования $t = 10^5$.

Таблица 3. Решение задачи ($h_{\max}$, w) для различных w_0 (СМО M/M/1 с переключением режимов)

w_0	h_{opt}	$w(h_{opt})$	$w(h_{opt})$ (GPSS World)
0,5	1	0,400	0,331
1	2	0,727	0,727
2	4	1,574	1,573
3	6	2,524	2,521
4	8	3,507	3,506
5	10	4,502	4,503
6	12	5,501	5,502
7	14	6,500	6,502
8	16	7,500	7,502
9	18	8,500	8,503
10	20	9,500	9,504

В заключение рассмотрим задачу ($h_{\max}$, w) для системы обслуживания M/M/1 с пороговым переключением режимов обслуживания и блокировкой потока заявок. Пусть $\lambda = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$. Тогда $\beta = 1$, $\gamma = 0,5$, $\gamma\beta = 0,5$. Поскольку $\gamma\beta < 1$, то ограничение на значения w_0 получаем из формулы (33) в виде $w_0 \geq 0,8$, и, согласно теореме 11, решение задачи ($h_{\max}$, w) определяем по алгоритму (29). Для этого ищем решение $h = h^*$ уравнения $w(h) = w_0$, где $w(h)$ вычисляем по формуле (31) при заданных значениях λ, γ, β и находим h_{opt} по формуле $h_{opt} = \max\limits_{h \in \mathbb{N}} \{\, h \leq h^*\}$. Результаты расчётов представлены в табл. 4 для различных значений w_0. В последнем столбце таблицы для сравнения записаны значения среднего времени ожидания $w(h_{opt})$, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World для значения времени моделирования $t = 10^5$.

Таблица 4. Решение задачи ($h_{\max}$, w) для различных w_0
(СМО M/M/1 с переключением режимов и блокировкой потока заявок)

w_0	h^*	h_{opt}	$w(h_{opt})$	$w(h_{opt})$ (GPSS World)
1	1,452	1	0,800	0,757
2	3,296	3	1,826	1,823
3	4,917	4	2,426	2,420
4	6,466	6	3,696	3,692
5	7,986	7	4,350	4,338
6	9,494	9	5,672	5,666
7	10,998	10	6,336	6,326
8	12,499	12	7,667	7,655
9	13,9997	13	8,334	8,314
10	15,500	15	9,667	9,642

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в настоящей работе рассмотрены задачи оптимального синтеза, в которых в качестве критерия наилучшего функционирования СМО выбиралось заданное значение одной из стационарных характеристик системы (чаще всего — среднего времени ожидания заявки в очереди). Не меньший интерес представляют более сложные задачи оптимизации стоимостных функционалов, решением которых является разумный компромисс между качественной и экономической составляющей обслуживания.

9. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММЫ ДЛЯ GPSS WORLD

Система с пороговым переключением режимов обслуживания:

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Mu1 EQU 1    ; значение μ1
Mu2 EQU 4    ; значение μ2
AH EQU 10    ; порог переключения
VREM EQU 100000    ; время моделирования
GENERATE (Exponential(3,0,(1/Lam)))    ; поток заявок
QUEUE OCHER
TEST E Q$OCHER,AH,MKAN    ; длина очереди равна h?
SPLIT 1,MET
MKAN SEIZE KAN
DEPART OCHER
TEST L Q$OCHER,AH,MET2    ; длина очереди меньше h?
ADVANCE (Exponential(3,0,(1/Mu1)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ1
RELEASE KAN
TERMINATE
MET GATE U KAN,OUT    ; занято ли устройство?
PREEMPT KAN,,MET1,,RE    ; прервать обслуживание
ADVANCE (Exponential(3,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ2
RETURN KAN
TERMINATE
MET1 TERMINATE
MET2 ADVANCE (Exponential(3,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенс. μ2
RELEASE KAN
TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE VREM
TERMINATE 1
START 1
```

Система с пороговым переключением режимов обслуживания и блокировкой потока заявок:

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Mu1 EQU 1    ; значение μ1
Mu2 EQU 2    ; значение μ2
AH EQU 10    ; порог переключения
VREM EQU 100000    ; время моделирования
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))    ; поток заявок
GATE LS KLU,OUT    ; заблокирован ли вход?
QUEUE OCHER
TEST E Q$OCHER,AH,MKAN    ; длина очереди равна h?
SPLIT 1,METP
MKAN SEIZE KAN
```

```
DEPART OCHER
TEST L Q$OCHER,AH,MET2    ; длина очереди меньше h?
SPLIT 1,METS
ADVANCE (Exponential(5,0,(1/Mu1)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ1
RELEASE KAN
TERMINATE
GATE U KAN,OUT    ; занято ли устройство?
METP PREEMPT KAN,,OUT,,RE    ; прервать обслуживание
ADVANCE (Exponential(3,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ2
RETURN KAN
OUT TERMINATE MET2
SPLIT 1,METR
ADVANCE (Exponential(5,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ2
RELEASE KAN
TERMINATE
METS LOGIC S KLU    ; включить ключ (разрешить вход)
TERMINATE
METR LOGIC R KLU    ; выключить ключ (запретить вход)
TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KLU    ; включить ключ (разрешить вход)
TERMINATE
GENERATE VREM
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыков В. В. Управляемые системы массового обслуживания. *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, 1975, т. 12, стр. 43–153.
2. Соловьев А. Д. Задача об оптимальном обслуживании. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1970, № 5, стр. 40–50.
3. Дудин А. Н., Медведев Г. А., Меленец Ю. В. *Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания: Учебное пособие.* Минск: Электронная книга БГУ, 2003.
4. Бобков С. П., Урюпина Н. М., Иванников А. И. Оптимизация структуры системы массового обслуживания. *Приложение к журналу "Современные наукоёмкие технологии"*, 2006, № 3, стр. 5–8.
5. Самочернова Л. И. Оптимизация системы массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания. *Изв. Томского политехнического университета*, 2009, т. 315, № 5, стр. 178–182.
6. Жерновий К. Оптимiзацiя режимiв обслуговування для систем M/M/1/m та M/M/1 з блокуванням вхiдного потоку. *Вiсник Львiвського унiверситету. Сер. мех.-мат.*, 2009, вип 71, стр. 92–101.
7. Дудин А. Н., Клименок В. И. Расчёт необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях. *Информатизация образования*, 2005, № 4, стр. 56–68.
8. Братiйчук А. М. *Дослiдження систем обслуговування з обмеженою чергою.* Кандидатська дисертацiя, Київ: Київський нацiональний унiверситет iменi Т. Шевченка, 2008.

9. Жерновый К. Ю. Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 2, стр. 159–180.

10. Єлейко Я., Жерновий Ю. Універсальні формули для системи обслуговування M/M/n/m з блокуванням вхідного потоку. *Вісник Львівського університету. Сер. прикл. матем. та інформатика*, 2009, вип. 15, стр. 234–239.

11. Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем и блокировкой полумарковского потока заявок. *Информационные процессы*, 2008, т. 8, № 1, стр. 1–9.

12. Жерновый Ю. В. Модели системы M/M/n/r с переключением режимов обслуживания в моменты изменения числа заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 1, стр. 68–77.

13. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.

14. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.