Информационные процессы, Том 10, № 1, 2010, стр. 68–77
© *2010 Жерновый.*

Модели системы M/M/n/r с переключением режимов обслуживания в моменты изменения числа заявок

Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина

Поступила в редколлегию 2.02.2010

Аннотация—Исследованы две модели системы массового обслуживания типа M/M/n/r, отличительной особенностью которых является синхронное изменение числа заявок в системе и интенсивности обслуживания. Число режимов обслуживания конечно, причём для j-го режима параметр показательного распределения длительности обслуживания равен μ_j. Если k — число заявок в системе, то вероятность использования j-го режима обслуживания равна q_{kj}. Первая модель характеризуется одновременными скачкообразными изменениями в случайные моменты времени интенсивности входящего потока λ и числа задействованных линий n. Число возможных режимов, которым соответствует набор параметров $(\lambda_i,\, n_i)$, конечно, длительность i-го режима показательно распределена, а режимы обслуживания определяются распределением вероятностей $q_{kk} = 1$, $q_{kj} = 0$ $(j \neq k)$, где k — число заявок в системе. Для второй модели $\lambda_i = \lambda$, $n_i = n$, но распределение q_{kj} произвольно. Для первой модели выведен алгоритм в виде рекуррентных формул, а для второй — найдены явные выражения для определения стационарных вероятностей состояний системы и получены формулы для её стационарных характеристик. Для второй модели в случае, когда $q_{kk} = 1$, $q_{kj} = 0$ $(j \neq k)$, при дополнительных условиях найдены стационарные вероятности состояний системы с накопителем неограниченнной ёмкости $(r = \infty)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследована система массового обслуживания (СМО) M/M/n/r, в которой под действием случайной среды с течением времени в случайные моменты синхронно изменяются параметры λ, μ и n. Целесообразность рассмотрения такой модели объясняется тем, что интенсивность входного потока для многих СМО изменяется в зависимости от времени суток, года, погодных условий и т. п. Как результат стремления к повышению эффективности работы системы и качества обслуживания, с изменением интенсивности потока заявок могут синхронно изменяться параметр длительности обслуживания и число линий системы за счёт привлечения дополнительных ресурсов для постоянно работающих линий, а также возможного включения резервных линий (при их наличии).

В качестве адекватной реакции на изменение интенсивности потока заявок может рассматриваться также изменение интенсивности обслуживания, вызванное изменением числа заявок в системе. Ниже будут построены две модели СМО M/M/n/r, в которых параметр показательного распределения длительности обслуживания изменяется синхронно с числом заявок в системе, а не вместе с параметрами λ и n, как было в моделях статьи [1].

Обзор работ [2–9], в которых исследовались СМО, функционирующие в случайной среде, можно найти в [1]. Более полный обзор приведён в диссертации [10, п. 2.3]. СМО с интенсивностью обслуживания, изменяющейся в зависимости от числа заявок в системе, рассматривались, как правило, в связи с решением задач оптимального выбора режимов обслуживания, состоящих в минимизации некоторого экономического функционала качества функционирования системы [11–13]. В частности, статья [12] посвящена исследованию вопросов управления процессами гибели и размножения. В ней состояние j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) процесса, характеризующегося параметрами (λ_j, μ_j), интерпретируется как количество заявок в системе массового обслуживания. В работе [13, п. 2.6] рассмотрена система M/G/1, которая может функционировать в m ($m \geq 2$) режимах. При работе в k-ом режиме интервалы между моментами поступления заявок показательно распределены с параметром λ_k, а время обслуживания заявки имеет функцию распределения $B_k(t)$. Фиксируются натуральные числа (пороги) $-1 < j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_{m-1} < \infty$. Если число i заявок в системе в момент окончания обслуживания очередной заявки удовлетворяет неравенству $j_{k-1} < i \leq j_k$, то следующая заявка обслуживается в k-ом режиме. Ниже мы ограничиваемся рассмотрением показательного распределения длительности обслуживания, что, в отличие от работы [13], позволяет смоделировать немедленное изменение интенсивности обслуживания, вызванное изменением числа заявок в системе, а также исследовать многолинейную систему.

2. МОДЕЛЬ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ПОТОКА ЗАЯВОК

Рассмотрим многолинейную СМО, в которой под действием случайной среды с течением времени в случайные моменты одновременно изменяются параметры λ и n. Предположим, что число возможных режимов функционирования системы, отличающихся значениями этих параметров, конечно и равно l, а длительность i-го режима распределена по показательному закону с параметром ν_i, причём длительности режимов являются независимыми случайными величинами.

В i-ом режиме на вход СМО поступает простейший поток заявок с параметром λ_i, а число задействованных линий равно n_i. Для определенности предположим, что $n_1 = n$, а $n + r$ — это максимальное число заявок, которые могут одновременно находиться в системе (на обслуживании и в очереди). Следовательно, возможные пределы изменения числа линий таковы: $1 \leq n_i \leq n + r$.

Если число работающих линий в момент переключения СМО в i-ый режим не изменяется, то все обслуживаемые заявки продолжают обслуживаться на своих линиях, длина очереди не изменяется. Если число работающих линий увеличивается, то возникшие свободные линии заполняются заявками из очереди. Если же число задействованных линий уменьшается, то заявки, потерявшие свои линии, вынуждены ожидать дообслуживания в очереди.

Считаем заданными вероятности перехода из i-го режима в j-ый σ_{ij} $(i, j = \overline{1, l};\ i \neq j)$, причём $\sigma_{ij} > 0$ и

$$\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \sigma_{ij} = 1 \qquad (\, i = \overline{1, l}\,).$$

Пусть ν_i $(\, i = \overline{1, l}\,)$ — параметр показательного распределения длительности i-го режима. Обозначим через $\nu_{ij} = \sigma_{ij}\nu_i$ $(i, j = \overline{1, l};\ i \neq j)$ интенсивность простейшего потока, переводящего систему из i-го режима в j-ый. Тогда, очевидно, выполняются равенства

$$\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ij} = \nu_i \qquad (\, i = \overline{1, l}\,).$$

Длительности обслуживания заявок представляют собой независимые случайные величины. Если $\xi_1(t)$ – число звявок в системе в момент времени t, то ему соответствует режим обслуживания с интенсивностью $\mu_{\xi_1(t)}$, который применяется ко всем заявкам, находящимся на обслуживании в данный момент. Изменение с течением времени числа заявок $\xi_1(t)$ влечёт за собой немедленное изменение интенсивности обслуживания $\mu_{\xi_1(t)}$. Таким образом, длительность обслуживания каждой заявки, вообще говоря, представляет собой конечную сумму случайных величин $\sum\limits_k T_k$, причём случайная величина T_k распределена по показательному закону с параметром μ_k. Число режимов обслуживания равно $n+r$.

Стохастическое поведение рассматриваемой СМО описывается двумерным марковским процессом $\{\,\xi(t),\ t\geq 0\,\}$, где $\xi(t)=\bigl(\xi_1(t),\,\xi_2(t)\bigr)$. Здесь $\xi_1(t)$ — число заявок в системе, а $\xi_2(t)$ — номер режима, связанного со значениями $(\lambda_i,\,n_i)$ в момент времени t. Конечное множество состояний этого процесса включает состояния $(k,\,i)$ $(\,k=\overline{0,\,n+r};\ \ i=\overline{1,\,l}\,)$.

Пусть $p_{ki}(t)=P\{\,\xi_1(t)=k,\ \xi_2(t)=i\,\}$ — вероятность пребывания процесса $\{\,\xi(t),\ t\geq 0\,\}$ в состоянии $(k,\,i)$ в момент времени t.

Марковский процесс $\{\,\xi(t),\ t\geq 0\,\}$ является неприводимым, так как все его состояния сообщаются. Поэтому, согласно [14, гл. 1] процесс $\{\,\xi(t),\ t\geq 0\,\}$ является эргодическим и существует его единственное стационарное распределение

$$p_{ki}=\lim_{t\to\infty}p_{ki}(t)\qquad(\,k=\overline{0,\,n+r};\ \ i=\overline{1,\,l}\,).$$

Выпишем систему уравнений равновесия (СУР), которой удовлятворяют стационарные вероятности p_{ki} (её получаем по мнемоническому правилу [14, гл. 3] с помощью диаграммы переходов состояний СМО), дополненную условием нормировки

$$\mu_1p_{1i}+\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l}\nu_{ji}\,p_{0j}-(\lambda_i+\nu_i)p_{0i}=0\qquad(\,i=\overline{1,\,l}\,);\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_ip_{k-1,i}+(k+1)\mu_{k+1}p_{k+1,i}+\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l}\nu_{ji}\,p_{kj}-\\&-(\lambda_i+k\mu_k+\nu_i)p_{ki}=0\qquad(\,k=\overline{1,\,n_i-1};\ \ i=\overline{1,\,l}\,);\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_ip_{k-1,i}+n_i\mu_{k+1}p_{k+1,i}+\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l}\nu_{ji}\,p_{kj}-\\&-(\lambda_i+n_i\mu_k+\nu_i)p_{ki}=0\qquad(\,k=\overline{n_i,\,n+r-1};\ \ i=\overline{1,\,l}\,);\end{aligned}\tag{3}$$

$$\lambda_ip_{n+r-1,i}+\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l}\nu_{ji}\,p_{n+r,j}-(n_i\mu_{n+r}+\nu_i)p_{n+r,i}=0\qquad(\,i=\overline{1,\,l}\,);\tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n+r}\sum_{i=1}^{l}p_{ki}=1.\tag{5}$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ (1)–(5)

Получение решений СУР (1)–(5) в явном виде не представляется возможным, поэтому запишем рекуррентные соотношения для расчёта стационарных вероятностей p_{ki}. Введём обозначения: $\beta_{ki} = \mu_k/\lambda_i$, $\delta_i = \nu_i/\lambda_i$, $\delta_{ji} = \nu_{ji}/\lambda_i$. Из уравнений (4) находим

$$p_{n+r-1,i} = (n_i\beta_{n+r,i} + \delta_i)p_{n+r,i} - \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \delta_{ji}\, p_{n+r,j} \qquad (\, i = \overline{1,\, l}\,). \tag{6}$$

Аналогично, из уравнений (3) и (2) соответственно получаем рекуррентные формулы

$$\begin{gathered} p_{n+r-k,i} = (1 + n_i\beta_{n+r-k+1,i} + \delta_i)p_{n+r-k+1,i} - n_i\beta_{n+r-k+2,i}\, p_{n+r-k+2,i} - \\ - \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \delta_{ji}\, p_{n+r-k+1,j} \qquad (\, k = \overline{2,\, n+r-n_i+1};\;\; i = \overline{1,\, l}\,); \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} p_{n+r-k,i} = \big(1 + (n+r-k+1)\beta_{n+r-k+1,i} + \delta_i\big)p_{n+r-k+1,i} - (n+r-k+ \\ +2)\beta_{n+r-k+2,i}\, p_{n+r-k+2,i} - \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \delta_{ji}\, p_{n+r-k+1,j} \qquad (\, k = \overline{n+r-n_i+2,\, n+r};\;\; i = \overline{1,\, l}\,). \end{gathered} \tag{8}$$

После подстановки числовых значений параметров β_{ki}, δ_i, δ_{ji} и последовательных вычислений по формулам (6)–(8) выразим p_{ki} ($k = \overline{0,\, n+r-1}$) через $p_{n+r,j}$ ($j = \overline{1,\, l}$)

$$p_{ki} = \sum_{j=1}^{l} a_{ji}^{(k)} p_{n+r,j} \qquad (\, k = \overline{0,\, n+r-1};\;\; i = \overline{1,\, l}\,), \tag{9}$$

где $a_{ji}^{(k)}$ — коэффициенты, полученные непосредственными вычислениями.

Одно из уравнений (1), например для $i = l$, можно не учитывать. Оставшиеся уравнения (1) после подстановки в них выражений из (9) для p_{0i} и p_{1i} образуют систему вида

$$\mu_1 \sum_{j=1}^{l} a_{ji}^{(1)} p_{n+r,j} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji} \sum_{k=1}^{l} a_{kj}^{(0)}\, p_{n+r,k} - (\lambda_i + \nu_i) \sum_{j=1}^{l} a_{ji}^{(0)} p_{n+r,j} = 0 \qquad (\, i = \overline{1,\, l-1}\,). \tag{10}$$

Уравнения (10) используем для получения соотношений

$$p_{n+r,i} = b_i\, p_{n+r,1} \qquad (\, i = \overline{2,\, l}\,), \tag{11}$$

где числа b_i определяем из системы линейных уравнений, следующей из (10),

$$\begin{gathered} \mu_1 \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(1)} b_j + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji} \sum_{k=2}^{l} a_{kj}^{(0)}\, b_k - (\lambda_i + \nu_i) \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(0)} b_j = \\ = (\lambda_i + \nu_i)a_{1i}^{(0)} - \mu_1 a_{1i}^{(1)} - \sum_{\substack{j=2\\(j\neq i)}}^{l} \nu_{ji}\, a_{1j}^{(0)} \qquad (\, i = \overline{1,\, l-1}\,). \end{gathered} \tag{12}$$

Подставляя правые части соотношений (11) в формулы (9), находим

$$p_{ki} = \left(a_{1i}^{(k)} + \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(k)}\, b_j\right) p_{n+r,1} \qquad (\, k = \overline{0,\, n+r-1};\;\; i = \overline{1,\, l}\,). \tag{13}$$

Стационарную вероятность $p_{n+r,1}$ определяем из условия нормировки (5), подстановка в которое правых частей равенств (13) даёт

$$p_{n+r,1} = \left(1 + \sum_{i=2}^{l} b_i + \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{n+r-1} \left(a_{1i}^{(k)} + \sum_{j=2}^{l} a_{ji}^{(k)}\, b_j\right)\right)^{-1}. \tag{14}$$

Таким образом, использование рекуррентных соотношений (6)–(8), решений системы (12) и формул (11), (13), (14) позволяет вычислить все стационарные вероятности p_{ki} $(\, k = \overline{0,\, n+r};$ $i = \overline{1,\, l}\,)$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

Вероятность потери заявки π в стационарном режиме функционирования СМО определим как долю времени на большом промежутке времени, в течение которого система недоступна для приёма заявок

$$\pi = \sum_{i=1}^{l} p_{n+r,i}.$$

Введём обозначения: λ, λ_A, λ_D, λ_L — соответственно интенсивности потока заявок, поступающего на систему, принятого в систему, обслуженного системой и потерянного на входе системы; P_i — стационарная вероятность (среднее относительное время) пребывания системы в i-ом режиме (с интенсивностью λ_i потока поступления заявок); μ — интенсивность обслуживания.

В стационарном режиме имеют место равенства:

$$P_i = \sum_{k=0}^{n+r} p_{ki} \quad (\, i = \overline{1,\, l}\,); \qquad \lambda = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i P_i;$$

$$\lambda_A = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \sum_{k=0}^{n+r-1} p_{ki} = \lambda - \lambda_L = \lambda - \lambda\,\pi = \lambda(1-\pi);$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{n+r} \mu_k p_{ki}; \qquad \lambda_D = \mu\left(1 - \sum_{i=1}^{l} p_{0i}\right) = \mu \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{n+r} p_{ki}.$$

Учитывая, что $\lambda_A = \lambda_D$, отсюда получаем уравнение баланса

$$\lambda(1-\pi) = \mu \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{n+r} p_{ki},$$

отражающее равенство интенсивностей принятого в систему и обслуженного ей потоков заявок, которое можно использовать для контроля расчётов стационарного распределения вероятностей состояний системы, осуществляемых с помощью полученного выше алгоритма.

С помощью стационарных вероятностей p_{ki} можно вычислить стационарные значения среднего числа заявок в системе

$$N = \sum_{k=1}^{n+r} \sum_{i=1}^{l} k p_{ki},$$

среднюю длину очереди

$$Q = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{i=1 \\ (i:\, n_i+k \le n+r)}}^{l} k p_{n_i+k,i}$$

и полученное по формуле Литтла среднее время ожидания в очереди

$$w = Q/\lambda_A.$$

5. МОДЕЛЬ С ПОСТОЯННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ПОТОКА ЗАЯВОК

В модель, рассмотренную выше, внесём изменения, которые позволят получить решение СУР в явном виде.

Предположим, что $\lambda_i = \lambda$, $n_i = n$ $(i = \overline{1, l}\,)$, m — число режимов обслуживания, а переключение режимов обслуживания осуществляется в моменты изменения числа заявок. Если k — число заявок в системе, то вероятность использования j-го режима обслуживания, которому соответствует показательное распределение длительности обслуживания одной заявки с параметром μ_j, равна q_{kj} $(q_{kj} \ge 0)$, причём для всех $k = \overline{1, n+r}$

$$\sum_{j=1}^{m} q_{kj} = 1.$$

Стохастическое поведение рассматриваемой СМО также описывается двумерным марковским процессом $\{\, \tilde{\xi}(t),\ t \ge 0 \,\}$, где $\tilde{\xi}(t) = \big(\xi_1(t),\, \tilde{\xi}_2(t)\big)$. Здесь $\xi_1(t)$ — число заявок в системе, а $\tilde{\xi}_2(t)$ — номер режима обслуживания, используемого в момент времени t. Конечное множество состояний этого процесса включает состояния $(k,\, j)$ $(\,k = \overline{1, n+r};\ \ j = \overline{1, m}\,)$, а также состояние простоя системы (когда $k = 0$).

Пусть $p_0(t) = P\{\, \xi_1(t) = 0 \}$ — вероятность простоя системы, $p_{kj}(t) = P\{\, \xi_1(t) = k,\ \tilde{\xi}_2(t) = j \,\}$ — вероятность пребывания процесса $\{\, \tilde{\xi}(t),\ t \ge 0 \,\}$ в состоянии $(k,\, j)$ в момент времени t. Как и в предыдущей модели, марковский процесс $\{\, \tilde{\xi}(t),\ t \ge 0 \,\}$ является неприводимым и, значит, эргодическим с единственным стационарным распределением p_0, p_{kj} $(\,k = \overline{1, n+r};\ \ j = \overline{1, m}\,)$. Обозначим через p_k стационарную вероятность нахождения в системе k заявок,

$$p_k = \sum_{j=1}^{m} p_{kj} \qquad (\,k = \overline{1, n+r}\,). \tag{15}$$

Для определения стационарных вероятностей с учётом соотношений (15) получаем следующую СУР

$$\sum_{s=1}^{m} \mu_s\, p_{1s} - \lambda p_0 = 0; \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
&q_{ij}\lambda p_{i-1} + (i+1)q_{ij}\sum_{s=1}^{m}\mu_s\, p_{i+1,s} - (i\mu_j+\lambda)p_{ij} = 0 \qquad (\, i=\overline{1,\, n-1};\;\; j=\overline{1,\, m}\,);\\
&q_{ij}\lambda p_{i-1} + nq_{ij}\sum_{s=1}^{m}\mu_s\, p_{i+1,s} - (n\mu_j+\lambda)p_{ij} = 0 \qquad (\, i=\overline{n,\, n+r-1};\;\; j=\overline{1,\, m}\,);\\
&q_{n+r,j}\lambda p_{n+r-1} - n\mu_j p_{n+r,j} = 0 \qquad (\, j=\overline{1,\, m}\,);
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
p_0 + \sum_{k=1}^{n+r} p_k = 1. \tag{18}
$$

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ (16)–(18)

Введём обозначения:

$$
\beta_i = \frac{\mu_i}{\lambda}; \qquad a_i = \sum_{s=1}^{m}\frac{q_{is}}{1+i\beta_s}; \qquad a_{in} = \sum_{s=1}^{m}\frac{q_{is}}{1+n\beta_s};
$$
$$
c_s = \frac{a_s}{1-a_s}; \qquad c_{sn} = \frac{a_{sn}}{1-a_{sn}}.
$$

Теорема. *Решения СУР (16)–(18) определяются соотношениями:*

$$
\begin{aligned}
&p_{ij} = p_0(1+c_i)\frac{q_{ij}}{1+i\beta_j}\prod_{s=1}^{i-1}c_s \qquad (\, i=\overline{1,\, n};\;\; j=\overline{1,\, m}\,);\\
&p_{n+1,j} = p_0(1+c_{n+1,n})\frac{q_{n+1,j}}{1+n\beta_{n+1}}\prod_{s=1}^{n}c_s \qquad (\, j=\overline{1,\, m}\,);\\
&p_{ij} = \frac{p_0}{n}(1+c_{in})\frac{q_{ij}}{1+n\beta_j}\prod_{s=1}^{n}c_s\prod_{k=n+1}^{i-1}c_{kn} \qquad (\, i=\overline{n+2,\, n+r-1};\;\; j=\overline{1,\, m}\,);\\
&p_{n+r,j} = p_0\frac{q_{n+r,j}}{n\beta_j}\prod_{s=1}^{n}c_s\prod_{k=1}^{r-1}c_{n+k,n} \qquad (\, j=\overline{1,\, m}\,);
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&p_k = p_0\prod_{s=1}^{k}c_s \qquad (\, k=\overline{1,\, n}\,);\\
&p_{n+k} = p_0\prod_{s=1}^{n}c_s\prod_{j=1}^{k}c_{n+j,n} \qquad (\, k=\overline{1,\, r-1}\,);\\
&p_{n+r} = \frac{p_0}{n}\prod_{s=1}^{n}c_s\prod_{j=1}^{r-1}c_{n+j,n}\sum_{i=1}^{m}\frac{q_{n+r,i}}{\beta_i};
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n}\prod_{s=1}^{k}c_s + \prod_{s=1}^{n}c_s\sum_{k=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{k}c_{n+j,n} + \frac{1}{n}\prod_{s=1}^{n}c_s\prod_{j=1}^{r-1}c_{n+j,n}\sum_{i=1}^{m}\frac{q_{n+r,i}}{\beta_i}\right)^{-1}. \tag{21}
$$

Доказательство. После суммирования по $j=\overline{1,\,m}$ правых частей соотношений (17) получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_j\,p_{1j}-\lambda p_0=0;$$

$$\lambda p_{i-1}+(i+1)\sum_{j=1}^{m}\mu_j\,p_{i+1,j}-i\sum_{j=1}^{m}\mu_j\,p_{ij}-\lambda p_i=0 \qquad (\,i=\overline{1,\,n-1}\,);$$

$$\lambda p_{i-1}+n\sum_{j=1}^{m}\mu_j\,p_{i+1,j}-n\sum_{j=1}^{m}\mu_j\,p_{ij}-\lambda p_i=0 \qquad (\,i=\overline{n,\,n+r-1}\,);$$

$$\lambda p_{n+r-1}-n\sum_{j=1}^{m}\mu_j p_{n+r,j}=0.$$

Из этой системы находим:

$$\begin{aligned} p_k&=(k+1)\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,p_{k+1,j} \qquad (\,k=\overline{0,\,n-1}\,);\\ p_k&=n\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,p_{k+1,j} \qquad (\,k=\overline{n,\,n+r-1}\,), \end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая соотношения (22), уравнения (17) перепишем в виде

$$\begin{aligned} q_{ij}(p_{i-1}+p_i)-(1+i\beta_j)p_{ij}=0 \qquad (\,i=\overline{1,\,n-1};\;\; j=\overline{1,\,m}\,);\\ q_{ij}(p_{i-1}+p_i)-(1+n\beta_j)p_{ij}=0 \qquad (\,i=\overline{n,\,n+r-1};\;\; j=\overline{1,\,m}\,);\\ q_{n+r,j}p_{n+r-1}-n\beta_j p_{n+r,j}=0 \qquad (\,j=\overline{1,\,m}\,). \end{aligned} \tag{23}$$

С помощью соотношений (23) после несложных преобразований получаем

$$p_{ij}=(p_{i-1}+p_i)\frac{q_{ij}}{1+i\beta_j} \qquad (\,i=\overline{1,\,n-1};\;\; j=\overline{1,\,m}\,); \tag{24}$$

$$p_i=c_i p_{i-1} \qquad (\,i=\overline{1,\,n-1}\,); \tag{25}$$

$$p_{ij}=(p_{i-1}+p_i)\frac{q_{ij}}{1+n\beta_j} \qquad (\,i=\overline{n,\,n+r-1};\;\; j=\overline{1,\,m}\,); \tag{26}$$

$$p_i=c_{in}p_{i-1} \qquad (\,i=\overline{n,\,n+r-1}\,); \tag{27}$$

$$p_{n+r,j}=\frac{q_{n+r,j}}{n\beta_j}p_{n+r-1} \qquad (\,j=\overline{1,\,m}\,); \tag{28}$$

$$p_{n+r}=\frac{p_{n+r-1}}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{q_{n+r,j}}{\beta_j}. \tag{29}$$

Последовательное использование рекуррентных соотношений (25), (27) и (29) позволяет выразить вероятности p_k $(\,k=\overline{1,\,n+r}\,)$ через p_0, то есть получить формулы (20). Подставив эти выражения в условие нормировки (18), определим p_0 в виде (21). Соотношения (19) получаем из равенств (24), (26) и (28) с использованием формул (25), (27) и (20). Теорема доказана.

Поскольку вероятности p_k ($k = \overline{1,\, n+r}$) найдены, то для показателей производительности СМО получаем простые соотношения

$$\pi = p_{n+r}; \qquad N = \sum_{k=1}^{n+r} k p_k; \qquad Q = \sum_{k=1}^{r} k p_{n+k}; \qquad w = Q/\bigl(\lambda(1-\pi)\bigr).$$

7. СЛУЧАЙ, КОГДА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ q_{kj} — ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА

Предположим, что в предыдущей модели $m = n + r$ и для всех $k = \overline{1,\, n+r}$; $j = \overline{1,\, m}$

$$q_{kk} = 1, \qquad q_{kj} = 0 \qquad (j \neq k). \tag{30}$$

Тогда при наличии в системе k заявок включается режим обслуживания с интенсивностью μ_k.

Введём обозначения: $\alpha_k = \lambda/(k\mu_k)$, $\gamma_k = \lambda/(n\mu_k)$. При выполнении условий (30) из соотношений (20) и (21) получаем следующее стационарное распределение

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \alpha_i \qquad (k = \overline{1,\, n});$$

$$\begin{gathered} p_{n+k} = p_0 \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{k} \gamma_{n+i} \qquad (k = \overline{1,\, r}); \\ p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \alpha_i + \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{r} \prod_{j=1}^{k} \gamma_{n+j} \right)^{-1}. \end{gathered} \tag{31}$$

Рассмотрим случай, когда число режимов обслуживания равно числу линий ($m = n$), и предположим, что, если число заявок больше, чем n, то обслуживание осуществляется с интенсивностью μ_n. Таким образом, $\mu_k = \mu_n$ для $k \geq n$, то есть

$$\gamma_k = \gamma_n, \qquad k \geq n. \tag{32}$$

Тогда соотношения (31) принимают вид

$$\begin{gathered} p_{n+k} = p_0 \gamma_n^k \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad (k = \overline{1,\, r}); \\ p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \alpha_i + \frac{\gamma_n (1-\gamma_n^r)}{1-\gamma_n} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^{-1}, \quad \gamma_n \neq 1; \end{gathered} \tag{33}$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \alpha_i + r \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^{-1}, \quad \gamma_n = 1.$$

Если условия (32) выполняются, причём $\gamma_n < 1$, то после перехода в равенствах (33) к пределу при $r \to \infty$ получим распределение стационарных вероятностей для соответствующей СМО с накопителем неограниченной ёмкости

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \alpha_i \qquad (k = \overline{1,\, n}); \qquad p_{n+k} = p_0 \gamma_n^k \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots);$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \alpha_i + \frac{\gamma_n}{1-\gamma_n} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^{-1}.$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены две модели системы обслуживания M/M/n/r, в каждой из которых в момент изменения числа заявок синхронно изменяется интенсивность обслуживания. В первой модели учтены случайные во времени одновременные изменения параметра λ входящего потока заявок и числа задействованных линий n. Во второй модели λ и n постоянны, но задаётся произвольное распределение q_{kj} вероятностей использования j-го режима обслуживания, зависящее от числа k заявок в системе. Основными результатами работы являются: 1) алгоритм в виде рекуррентных формул для вычисления стационарных вероятностей состояний системы для первой модели; 2) явные формулы для стационарного распределения вероятностей СМО, соответствующей второй модели, включая рассмотренный при дополнительных условиях случай накопителя неограниченной ёмкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жерновый Ю. В. Система массового обслуживания M/M/n/r, функционирующая в синхронной случайной среде. *Информационные процессы*, 2009, т. 9, № 4, стр. 352–363.
2. Eisen M., Tainiter M. Stochastic variations in queueing processes. *Operations Research*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 922–927.
3. Yechiali U., Naor P. Queuing problems with heterogeneous arrivals and service. *Operations Research*, 1971, vol. 19, no. 3, pp. 722–734.
4. Purdue P. The M/M/1 queue in a markovian environment. *Operations Research*, 1974, vol. 22, no. 3, pp. 562–569.
5. Neuts M. F. The M/M/1 queue with randomly varying arrival and service rates. *Opsearch*, 1978, vol. 15, pp. 139–157.
6. Таташев А. Г. Система массового обслуживания с переменной интенсивностью входного потока. *Автоматика и телемеханика*, 1995, № 12, стр. 78–84.
7. Башарин Г. П., Кокотушкин В. А., Наумов В. А. *Метод эквивалентных замен в теории телетрафика.* Т. 2. М.: Электросвязь, 1980.
8. Горцев А. М., Назаров А. А., Трепугов А. Ф. *Управление и адаптация в системах массового обслуживания.* Томск: Изд-во Томского ун-та, 1978.
9. Дудин А. Н., Клименок В. И. Расчёт характеристик однолинейной системы обслуживания, функционирующей в синхронной случайной среде. *Автоматика и телемеханика*, 1997, № 1, стр. 74–84.
10. Cordelio J. D. *Unreliable Retrial Queues in a Random Environment.* Dissertation, Ohio: Air Force Institute of Technology, 2007.
11. Рыков В. В. Управляемые системы массового обслуживания. *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, 1975, т. 12, стр. 43–153.
12. Соловьев А. Д. Задача об оптимальном обслуживании. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1970, № 5, стр. 40–50.
13. Дудин А. Н., Медведев Г. А., Меленец Ю. В. *Практикум на ЭВМ по теории ассового обслуживания: Учебное пособие.* Минск: Электронная книга БГУ, 2003.
14. Бочаров П. П., Печинкин А. В. *Теория массового обслуживания.* М.: Изд-во РУДН, 1995.