

Асинхронность: теория и практика¹

А. Г. Владимиров, Н. А. Гречишкина, В. С. Козьякин,
Н. А. Кузнецов, А. В. Покровский, Д. И. Рачинский

Институт Вейерштрасса, Берлин, Германия
Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
Институт радиотехники и электроники РАН, Москва, Россия
Университет г. Корк, Ирландия
Поступила в редколлегию 15.02.2011

Аннотация—Дается обзор результатов последнего времени, связанных с теоретическим анализом идеи “асинхронности” и ее применением в некоторых прикладных задачах.

Первая часть работы посвящена описанию новых качественных и численных методов оценки совместного спектрального радиуса семейств матриц. Приводятся эффективные оценки скорости приближения спектрального радиуса матрицы с помощью формулы Гельфанда. Полученные результаты распространяются на случай вычисления совместного спектрального радиуса для семейств матриц. Значительное внимание уделено описанию алгоритмов приближенного построения норм Барабанова и вычисления совместного спектрального радиуса семейства матриц с любой наперед заданной точностью, позволяющие оценить апостериорную погрешность вычисления совместного спектрального радиуса.

Во второй части работы приводятся примеры применения идеи асинхронности для анализа нелинейной динамики лазеров с очень большим или бесконечным числом степеней свободы. Описаны процессы, приводящие к самоорганизации процессов синхронизации различных элементов системы. Основное внимание уделяется малоизученным бифуркационным механизмам возникновения и нарушения синхронизации и сопутствующих ей режимов. Здесь же приводится описание математических моделей рассинхронизованных сетей состоящие из элементов с памятью. Этот класс математических моделей имеет значительный потенциал для адекватного описания различных процессов в экономике, биологии, технике и т.д. Продемонстрирована роль предложенного класса моделей в контексте понимания долговременных последствий экономических кризисов. Описаны эффективные методы их качественного и численного исследования для этого класса моделей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из современных тенденций в теории управления и обработки информации является организация взаимодействия между отдельными частями систем в асинхронном режиме. Переход к асинхронному режиму управления и обработки информации позволяет избавиться от многочисленных недостатков, присущих традиционным синхронным системам. Первые работы такого типа появились в 50-х годах XX-го века (А.М. Ostrowski, J. Sklansky, G.M. Kranc, R.E. Kalman и др.) Интерес к системам с несинхронно работающими элементами усилился в конце 60-х — начале 70-х годов в связи с развитием вычислительной техники и, в особенности, с появлением многопроцессорных вычислительных комплексов, что потребовало разработки специальных классов вычислительных методов. Появилось значительное число публикаций с

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.5048). А.Г. Владимиров поддержан DFG (проект SFB 787). В.С. Козьякин, А.В. Покровский и Д.И. Рачинский частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 10-01-93112-НЦНИЛ-а).

описаниями различных конкретных примеров вычислительных процедур, в которых за счет асинхронности выполнения различных фаз вычислительного алгоритма достигались те или иные преимущества. Оказалось, что классические математические методы плохо приспособлены для анализа даже линейных рассинхронизованных систем. Это потребовало развития новых методов и новых подходов, которые первоначально были разработаны и описаны в опубликованных в 90-х годах монографиях (D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis, [29]; Е.А. Асарин, В.С. Козьякин, М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов, [2]; A. Bhaya, E. Kaszkurewicz, [69]). Выяснилось, в частности, что асинхронные системы обладают высокой помехоустойчивостью и надежностью, что делает их привлекательным объектом для использования при построении модульных технологий организации процессов управления и обработки информации.

Как это обычно случается при развитии новой научной тематики, теоретические исследования и требования практики весьма сильно разнятся, что сказывается и на теоретических постановках задач и на уровне применимости полученных результатов на практике. Не избежала такой участи и идея “асинхронизма”. В настоящее время достаточно глубоко проработанной в теоретическом плане оказалась лишь теория линейных асинхронных систем с дискретным временем, и в существенно меньшей степени — теория линейных систем с непрерывным временем. Оказалось, что ключевую роль в понимании многих качественных свойств асинхронных систем играет такая числовая характеристика семейства матриц или линейных операторов, как обобщенный (или совместный) спектральный радиус. Именно некоторым достижениям в исследовании этой характеристики и посвящена первая часть работы.

Как уже упоминалось, применение идеи асинхронизма в более интересных с практической точки зрения нелинейных задачах не может быть охарактеризовано как некая цельная и развитая теория. Здесь до сих пор исследователи находятся в стадии “накопления информации”. Тем не менее, примеры плодотворного применения идеи асинхронизма на практике уже существуют, и во второй части работы мы остановимся на некоторых из них. В этой части работы идеи теории асинхронных систем применяются для анализа нелинейной динамики лазеров с очень большим или бесконечным числом степеней свободы. Описаны процессы приводящие к самоорганизации процессов синхронизации различных элементов системы. Основным объектом исследования здесь является синхронизация мод в монолитных полупроводниковых лазерах, которые являются источниками коротких световых импульсов с высокой частотой повторения. При этом основное внимание уделяется малоизученным бифуркационным механизмам возникновения и нарушения синхронизации и сопутствующих ей режимов.

Приводится описание нового класса математических моделей, сердцем которых являются рассинхронизованные сети состоящие из элементов с памятью. Этот класс математических моделей имеет значительный потенциал для адекватного описания различных процессов в экономике, биологии, технике и т.д. Продемонстрирована роль предложенного класса математических моделей в весьма актуальном в настоящее время контексте понимания долговременных последствий экономических кризисов. Описаны эффективные методы их качественного и численного исследования для этого класса моделей. В частности, предлагается для обсуждения локальный метод исследования устойчивости периодических режимов таких систем по отношению к широкому классу возмущений начальных данных, приводящий к простым критериям бифуркации периодического режима типа седло-узла. Эти критерии полезны при численном построении решений методом продолжения по параметру и локализации точек бифуркации.

Эта работа оказалась одной из последних для А.В. Покровского, посетившего в июле 2011 года Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН в качестве руководителя работ по госконтракту с Министерством образования и науки Российской Федерации № 02.740.11.5048 “Анализ и синтез нелинейных и рассинхронизованных систем”.

2. РАССИНХРОНИЗОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА

Появление современной теории совместного или обобщенного спектрального радиуса было вызвано рядом прикладных задач. Так, еще в 50-х годах XX-го века было замечено, что переход к асинхронному режиму управления и обработки информации позволяет избавиться от многочисленных недостатков, присущих традиционным (синхронным) системам управления. Первые работы такого типа появились в 50-х годах XX-го века (А.М. Ostrowski [108], J. Sklansky [132], G.M. Kranc [89, 90], R.E. Kalman [68] и др.). Интерес к системам с несинхронно работающими элементами усилился в конце 60-х — начале 70-х годов в связи с развитием вычислительной техники и, в особенности, с появлением многопроцессорных вычислительных комплексов, что потребовало разработки специальных классов вычислительных методов (S. Schechter [129], D. Chazan & W. Miranker [45], J.-C. Miellow [102–105], F. Robert [122–126]). Появилось значительное число публикаций с описаниями различных конкретных примеров вычислительных процедур, в которых за счет асинхронности выполнения различных фаз вычислительного алгоритма достигались те или иные преимущества.

В наиболее простом виде идея асинхронности в задачах вычислительной математики и теории управления может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим систему W , состоящую из компонент (элементов, частей) W_1, W_2, \dots, W_N . Пусть состояние компоненты W_i описывается вектором $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, n_i \geq 1$, и изменяется в некоторые дискретные моменты в соответствии с правилом:

$$x_{i,\text{нов}} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N + f_i,$$

где a_{ij} — матрицы соответствующих размерностей, а f_i — вектор внешних воздействий на компоненту W_i . Обозначим через $\dots < T_{i,0} < T_{i,1} < \dots < T_{i,n} < \dots$ моменты изменения состояния компоненты W_i . Тогда изменение переменного состояния $x_i(t)$ компоненты W_i может быть описано уравнением

$$x_i(T_{i,n+1}) = a_{i1}x_1(T_{i,n}) + a_{i2}x_2(T_{i,n}) + \dots + a_{iN}x_N(T_{i,n}) + f_i(T_{i,n}), \quad (1)$$

где предполагается постоянство функции $x_i(t)$ на каждом интервале $T_{i,n} < t \leq T_{i,n+1}$. Из физических соображений естественно считать, что $T_{i,n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Если все компоненты подвергаются коррекции одновременно, т.е. $T_{1,n} = T_{2,n} = \dots = T_{N,n}, -\infty < n < \infty$, то систему W называют синхронизованной или синхронной, а в противном случае — рассинхронизованной или асинхронной. Например, система рассинхронизована, если ее моменты коррекции определяются соотношениями

$$T_{i,n} = \tau_i n + \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad -\infty < n < \infty,$$

где не все τ_i или φ_i совпадают между собой. В некоторых случаях разумно считать, что компоненты системы W подвергаются коррекции в случайные моменты времени, тогда для анализа динамики системы W целесообразно привлечь вероятностные методы. Наконец, возможна ситуация, когда информация о закономерностях коррекции компонент системы W отсутствует. Эти ситуации (если интересуются вопросом устойчивости системы W) естественно ведут к понятию абсолютной устойчивости [1] системы W в том или ином классе рассинхронизаций.

В ряде ситуаций более удобна не непрерывная (1), а дискретная модель функционирования рассинхронизованной системы (G.M. Baudet [28]). В общем случае одновременно могут подвергаться коррекции несколько компонент системы W ; пусть $\omega \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ — множество их номеров. Обозначим через A_ω блочную матрицу, получающуюся из блочной матрицы

$A = (a_{ij})$ заменой строк с номерами $i \notin \omega$ соответствующими строками единичной блочной матрицы I . Например, в случае, когда $\omega = \{i\}$ матрица A_ω имеет вид

$$A_\omega = \begin{pmatrix} I & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Обозначим через \mathbf{X} пространство состояний системы W , т.е. множество векторов

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad \text{где } x_i \in \mathbb{R}^{n_i}.$$

Через \mathbf{X}_ω обозначим линейное подпространство пространства \mathbf{X} , состоящее из тех векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, для которых $x_i = 0$ при $i \notin \omega$. Тогда изменение состояния системы W в общем случае описывается векторным равенством

$$x_{\text{нов}} = A_\omega x + F_\omega,$$

где $F_\omega = \{f_1, f_2, \dots, f_N\} \in \mathbf{X}_\omega$.

Пусть $\dots < T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$ — все моменты коррекции всех компонент системы W . Обозначим через $x(n)$ вектор состояния системы в момент T_n , а через $\omega(n)$ — множество номеров подвергающихся в этот момент коррекции компонент. Тогда получаем следующее уравнение динамики системы W :

$$x(n+1) = A_{\omega(n)}x(n) + F(n), \quad F(n) \in \mathbf{X}_{\omega(n)}. \quad (2)$$

Синхронизованной системе W отвечает ситуация, когда $\omega(n) \equiv \{1, 2, \dots, N\}$; динамика синхронизованной системы описывается уравнением

$$x(n+1) = Ax(n) + F(n).$$

Из уравнений (2) что вопрос устойчивости рассинхронизованных систем сводится к анализу сходимости матричных произведений

$$\dots A_{\omega(n)} A_{\omega(n-1)} \dots A_{\omega(0)}$$

при различном выборе индексных последовательностей $\{\omega(n)\}$.

Классические математические методы оказались плохо приспособлены для анализа рассинхронизованных систем. Это потребовало развития новых методов и новых подходов, которые в существенной мере были разработаны и описаны в опубликованных в 90-х годах монографиях (D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis [29]; Е.А. Асарин, В.С. Козякин, М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов [2]; E. Kaszkurewicz, A. Bhaya [69]). Выяснилось, в частности, что асинхронные системы обладают высокой помехоустойчивостью и надежностью, что делает их привлекательным объектом для использования при построении модульных технологий организации процессов управления и обработки информации. В значительной мере задача анализа асимптотических свойств асинхронных линейных систем может быть сформулирована как задача *анализа сходимости бесконечных матричных произведений некоммутируемых наборов матриц при различных предположениях о законах появления отдельных сомножителей в таких произведениях.*

Аналогичная задача об оценке сходимости бесконечных матричных произведений, возникшая в 60-х годах XX-го века в вычислительной математике в связи с исследованием так называемых вейвлетов, привела к формальному определению характеристики, дающей ответ на

вопрос, будет ли бесконечное произведение матриц сходиться или нет — это так называемый совместный спектральный радиус набора матриц (G.-C. Rota, G. Strang [127, 128]).

Пусть A — некоторая $d \times d$ матрица с элементами из поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Как известно, величиной, характеризующей экспоненциальную скорость роста или убывания степеней A^n матрицы A , является ее спектральный радиус $\rho(A)$, который может быть выражен в терминах норм ее степеней $\|A^n\|$ с помощью известной *формулы Гельфанда*

$$\rho(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n},$$

широко используемой в различных математических конструкциях.

Для матриц понятие спектрального радиуса изначально определяется как максимум модулей ее собственных значений. При рассмотрении семейств матриц определить подобным образом понятие спектрального радиуса невозможно. В этом случае как раз формула Гельфанда послужила основой для определения некоей величины, близкой по смыслу к спектральному радиусу матрицы. Опишем соответствующую конструкцию. Пусть \mathcal{A} — набор $d \times d$ матриц. Тогда предел

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$$

(обобщенная формула Гельфанда) называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} (G.-C. Rota, G. Strang [127, 128]). При этом соответствующий предел на деле от выбора нормы $\|\cdot\|$ не зависит. Более того, для любых $n \geq 1$ справедливы оценки

$$\rho(\mathcal{A}) \leq \sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n},$$

и потому совместный спектральный радиус набора матриц \mathcal{A} может быть определен также с помощью формулы

$$\rho(\mathcal{A}) = \inf_{n \geq 1} \sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}.$$

Определение совместного спектрального радиуса в виде предела существенно затрудняет использование соответствующего понятия как в приложениях, так и в теоретических конструкциях. В попытках преодолеть этот недостаток помимо обобщенной формулы Гельфанда для вычисления $\rho(\mathcal{A})$ за последние годы предложено множество других эквивалентных формул, в которых норма в обобщенной формуле Гельфанда заменяется спектральным радиусом (I. Daubechies, J.C. Lagarias [50–53]; L. Elsner [54]), следом матрицы (Q. Chen, X.Zhou [46]) или произвольным однородным неотрицательным многочленом четной степени (P.A. Parrilo, A. Jadbabaie [109]). Использование аналога обобщенной формулы Гельфанда с однородными неотрицательными многочленами может дать более точные оценки $\rho(\mathcal{A})$ за счет того, что множество положительных однородных функций более богато, чем множество норм. В некоторых работах $\rho(\mathcal{A})$ определяется в терминах существования норм специального вида (Н. Барабанов [3–5, 26, 27]; В. Протасов [21, 22, 116–119]) — норм Барабанова или Протасова.

Несколько особняком стоит результат (V.D. Blondel, Yu. Nesterov [30]) устанавливающий, что в том случае, когда элементы всех матриц из \mathcal{A} неотрицательны, справедливы неравенства

$$r^{-1/n} \rho^{1/n}(A_1^{\otimes n} + \cdots + A_r^{\otimes n}) \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \rho^{1/n}(A_1^{\otimes n} + \cdots + A_r^{\otimes n}),$$

где $A^{\otimes n}$ обозначает n -кратное кронекерово (или тензорное) произведение матрицы A на себя. Здесь представляется несколько удивительным тот факт, что правая и левая части неравенств не содержат смешанных произведений матриц из \mathcal{A} . Эти неравенства теоретически позволяют

вычислить спектральный радиус $\rho(\mathcal{A})$ с любой требуемой точностью. Однако, с ростом n размерность матрицы $A_1^{\otimes n} + \dots + A_r^{\otimes n}$ растет столь быстро, что даже при умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ вычисления становятся практически невыполнимыми. Для случая, когда матрицы из \mathcal{A} произвольны, справедлив несколько более сложный аналог указанной формулы.

Общей чертой всех упомянутых определений совместного спектрального радиуса остается их неконструктивность — в этих определениях величина $\rho(\mathcal{A})$ по-прежнему определяется либо в виде некоего предела, либо как результат некоей “теоремы существования”, что существенно затрудняет анализ свойств совместного спектрального радиуса. Ряд качественных результатов, в которых устанавливается общая скорость сходимости в обобщенной формуле Гельфанда, а также показано, что $\rho(\mathcal{A})$ как функция от \mathcal{A} удовлетворяет условию Липшица и в определенном смысле монотонна, был получен в цикле исследований (F. Wirth [142–146]). Тем не менее, до последнего времени каких-либо эффективно вычисляемых оценок скорости сходимости к пределу в обобщенной формуле Гельфанда (и даже в классической формуле Гельфанда!) не было установлено, что существенно ограничивало область применимости определений совместного спектрального радиуса. В случае одной матрицы это не столь критично, поскольку $\rho(A)$, как правило, может быть установлено другими методами. В случае же семейств матриц отсутствие эффективных оценок скорости сходимости величин $\sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$ к $\rho(\mathcal{A})$ более критично, поскольку альтернативных эффективных способов вычисления $\rho(\mathcal{A})$, насколько известно автору, до сих пор не найдено. Этот пробел до известной степени был восполнен в цикле работ (В.С. Козьякин [7–18, 71, 73, 74, 77–80]), где удалось получить явные вычисляемые оценки скорости сходимости величин $\sup_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdots A_{i_n}\|^{1/n}$ к $\rho(\mathcal{A})$ в общем случае. Эти оценки, по-видимому, новы даже для случая матричных семейств, состоящих из одной матрицы! Тем не менее, и эти последние теоретические результаты мало пригодны для практических целей, поскольку даже при умеренных значениях величин размерности матриц $d = 3, 4$ и их числа $r = 5, 6$ в семействе \mathcal{A} необходимые вычисления становятся практически невыполнимыми.

Как оказалось, сложность вычисления совместного спектрального радиуса не кажущаяся и не результат “недостатка способностей” исследователей. В 1990г. была установлена (В.С. Козьякин [9]) алгебраическая неразрешимость соответствующей задачи (в отличие от задачи вычисления спектрального радиуса для отдельных матриц, которая алгебраически разрешима), а затем и более общий факт — неопределимость этой задачи в ω -минимальных структурах (В.С. Козьякин [15]). При этом были разработаны новые конструкции доказательств, более простые в техническом плане и идейном плане. Позднее (V. Blondel, J.N. Tsitsiklis [33–35]) было установлено, что соответствующая задача, даже если она алгоритмически разрешима, NP-трудна уже в классе матриц с двоичными, 0 или 1, элементами. Тем более удивительным представляется недавний результат (R.M. Jungers, V. Protasov, V.D. Blondel, 2008 [64–66]), утверждающий, что в классе матриц с двоичными элементами вопрос о том, какое из соотношений верно: $\rho(\mathcal{A}) = 0$, $\rho(\mathcal{A}) = 1$ или $\rho(\mathcal{A}) > 1$, может быть решен с помощью конечного алгоритма за полиномиальное время.

В связи с тем, что во всех примерах, которые удалось “просчитать”, совместный спектральный радиус достигался на некотором произведении матриц из \mathcal{A} в 1995г. было высказано предположение (J. Lagarias, Y. Wang [95]) о том, что обобщенный спектральный радиус конечного набора матриц всегда достигается на некотором конечном произведении матриц. Эта “гипотеза о конечности” оказала значительное влияние на активность исследователей совместного спектрального радиуса. Первый контрпример к “гипотезе о конечности” был построен в 2002г. (T. Bousch, J. Mairesse [37]), а соответствующее доказательство существенно опиралось на конструкции теории меры. Позднее (V.D. Blondel, J. Theys, А.А. Владимиров [31, 32]) пред-

ставили другое доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, которое было основано на комбинаторных свойствах перестановок произведений положительных матриц.

В теории динамических систем обобщенный спектральный радиус используется, в основном, для описания скорости сходимости или расходимости траекторий, описываемых произведениями матриц. В связи с этим, упомянутые выше методы построения контрпримера к гипотезе о конечности оказались не совсем удовлетворительными (с точки зрения лиц, занимающихся анализом динамических систем, конечно), поскольку они не дают достаточно конструктивного описания структуры траекторий с максимальной скоростью роста (или минимальной скоростью убывания). В связи с этим в 2005г. было предложено еще одно доказательство контрпримера к гипотезе о конечности (В.С. Козьякин [17, 71, 82]), выполненное в достаточно традиционной манере теории динамических систем, в основе которого лежали конструкции нелинейного анализа, основанные на теории числа вращения разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию, и анализ введенных В.С. Козьякиным так называемых экстремальных траекторий. В связи с этим было проведено детальное исследование свойств разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию. Оказалось, что траектории таких отображений, так же как и траектории гомеоморфизмов окружности, могут быть описаны так называемыми символическими последовательностями Штурма, на такие отображения может быть в значительной степени распространена теория числа вращения Пуанкаре.

Отметим, впрочем, что все указанные выше три способа опровержения гипотезы Лагариаса-Ванга о конечности основаны на своего рода чистых “теоремах несуществования”, и до настоящего времени не известно ни одного конкретного семейства матриц, для которого гипотеза Лагариаса-Ванга о конечности была бы не верна! И лишь в 2010г. удалось построить явный пример пары двумерных матриц, для которого гипотеза Лагариаса-Ванга о конечности не верна (K.G. Hare, I.D. Morris, N. Sidorov, J. Theys [61]). Построение соответствующего примера использовало комбинацию идей из работ [32, 37, 71, 82] в совокупности с быстро сходящимися нижними оценками совместного спектрального радиуса, полученными в (I.D. Morris [106]).

Исследования последних лет показали, что в анализе свойств обобщенного спектрального радиуса весьма перспективным оказывается подход, основанный на применении так называемых норм Барабанова. Напомним, что как было показано в 1988г. (Н. Барабанов [3–5]) число ρ совпадает с совместным спектральным радиусом $\rho(\mathcal{A})$ неприводимого компактного семейства матриц \mathcal{A} тогда и только тогда, когда найдется такая норма $\|\cdot\|$ (норма Барабанова) в \mathbb{K}^d , что

$$\rho\|x\| \equiv \max_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\|.$$

Несмотря на кажущуюся неконструктивность данного понятия, метод норм Барабанова оказался одним из самых эффективных в исследовании свойств совместного спектрального радиуса. В то же время конструктивных способов построения таких норм в известных публикациях найти не удалось. До последнего времени не было известно даже, как “выглядят” единичные шары таких норм в простейшем двумерном случае, хотя известно (В.С. Козьякин [16, 17, 71, 81, 82]), что геометрические свойства норм Барабанов принципиальным образом влияют на структуру наиболее быстрорастущих траекторий, порождаемых матричными произведениями, а при построении одного из вариантов опровержения известной гипотезы Лагариаса-Ванга о конечности В.С. Козьякиным существенно использовалась информация о геометрических свойствах единичных шаров норм Барабанова для некоторых специальных семейств матриц. Вместе с тем, несколько парадоксальным представляется тот факт, что в литературе не удалось найти сколько-нибудь детального анализа геометрических свойств единичных шаров норм Барабанова. Лишь в работах (N. Guglielmi, M. Zennaro [57–59]) предприняты попытки выяснения условий, при которых норма Барабанова имеет вид политопа.

В связи с этим в 2008-2009г.г. был проведен цикл исследований (В.С. Козякин [18, 73–75, 77]), в которых были разработаны численные алгоритмы построения норм Барабанова для неприводимых семейств матриц, позволившие одновременно приближенно вычислять совместный спектральный радиус и получать апостериорные оценки точности приближения совместного спектрального радиуса. Соответствующие алгоритмы были реализованы в системе MATLAB® для матриц низких размерностей. Полученные результаты существенно усилили известные до того алгоритмы вычисления совместного спектрального радиуса (R.K. Brayton, С.Н. Tong [38, 39]; Н. Барабанов [3–5]; I. Daubechies, J.C. Lagarias [50–53]; G. Gripenberg [56]; M. Maesumi [96–98]). Эти исследования в известной мере дополняются работами (В.С. Козякин [18, 73–75, 77, 83]) по получению явных вычисляемых оценок скорости приближения совместного спектрального радиуса с помощью обобщенной формулы Гельфанда. Полученные оценки оказались новыми даже в классическом случае приближения спектрального радиуса матрицы с помощью обычной формулы Гельфанда! При получении соответствующих оценок показала свою эффективность техника мер неприводимости (см. раздел 2.2), разработанная под именем “мер квазиуправляемости” В.С. Козякиным и А.В. Покровским в другом контексте в 1996г. [19, 20, 84–88]

2.1. Оценки скорости приближения совместного спектрального радиуса с помощью обобщенной формулы Гельфанда

Пусть A — некоторая комплексная $d \times d$ матрица, а $\|\cdot\|$ — норма в \mathbb{C}^d . Как известно, спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A может быть выражен в терминах норм ее степеней $\|A^n\|$ с помощью следующей формулы Гельфанда:

$$\rho(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}, \quad (3)$$

которая на самом деле равносильна равенствам

$$\rho(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Эти соотношения для $\rho(A)$ используются в различных математических конструкциях. Формула Гельфанда стала уже частью математического фольклора и упоминается практически во всех учебниках по линейному анализу без ссылок на первоначальную публикацию, которой была, по видимому, работа И.М. Гельфанда [6].

Для матриц понятие спектрального радиуса изначально определяется как максимум модулей ее собственных значений. При рассмотрении семейств матриц определить подобным образом понятие спектрального радиуса невозможно. В этом случае как раз формула типа (3) послужила в [127] основой для определения некоей величины, близкой по смыслу к спектральному радиусу. Опишем соответствующую конструкцию. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — набор комплексных $d \times d$ матриц. Как обычно, через \mathcal{A}^n при $n \geq 1$ обозначается множество всех произведений матриц из \mathcal{A} , состоящих из n сомножителей; $\mathcal{A}^0 = I$.

Если в \mathbb{C}^d задана некоторая норма $\|\cdot\|$, то предел

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad (4)$$

где

$$\|\mathcal{A}^n\| = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \|A\| = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \|A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}\|,$$

называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц \mathcal{A} [127]. При этом соответствующий предел на деле от выбора нормы $\|\cdot\|$ не зависит. Более того, для любых $n \geq 1$

справедливы оценки $\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ (см., например, [127]), и потому совместный спектральный радиус набора матриц \mathcal{A} может быть определен также с помощью формулы

$$\rho(\mathcal{A}) = \inf_{n \geq 1} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}. \quad (5)$$

Так как для семейств матриц \mathcal{A} , состоящих из одной матрицы, выражение (4) превращается в формулу Гельфанда (3), то иногда [131] формулу (4) называют обобщенной формулой Гельфанда. Как отмечалось выше, существуют и другие варианты определения аналога спектрального радиуса для семейств матриц. Так в [54, 127] было доказано, что спектральный радиус семейства матриц \mathcal{A} может быть определен равенством

$$\rho(\mathcal{A}) = \inf_{\|\cdot\|} \|\mathcal{A}\|, \quad (6)$$

где инфимум берется по всем нормам в \mathbb{R}^d . Для неприводимых семейств матриц¹ \mathcal{A} инфимум в (6) достигается, и для таких семейств матриц существуют нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d , называемые *экстремальными*, для которых справедливы соотношения

$$\|\mathcal{A}\| \leq \rho(\mathcal{A}). \quad (7)$$

Следует отметить, что в силу (7) спектральный радиус неприводимых семейств матриц \mathcal{A} отличен от нуля: $\rho(\mathcal{A}) > 0$.

В ряде работ предлагаются и другие формулы для вычисления $\rho(\mathcal{A})$. Так, в [46] показано, что

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} |\text{tr}(A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1})|^{1/n}, \quad (8)$$

где, как обычно, $\text{tr}(A)$ обозначает след матрицы A . В [97, 116, 119] для вычисления спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} предложены L^p -обобщения формул (4), (5), (6) и (8). Основанные на соотношении (6) алгоритмы вычисления $\rho(\mathcal{A})$ рассматриваются, например, в [58, 59, 97]. В [109] было отмечено, что при определении совместного спектрального радиуса вместо нормы можно рассматривать положительные однородные полиномы четной степени. Несколько усиливая аргументацию из [109], можно заменить норму в (4) произвольной положительной вне нуля однородной функцией. А именно, пусть $\nu(x)$ — некоторая строго положительная при $x \neq 0$ однородная функция с порядком однородности $\kappa > 0$, т.е. $\nu(tx) \equiv t^\kappa \nu(x)$ для любого $t > 0$. Тогда, введя для произвольной матрицы A обозначение

$$\nu(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)},$$

нетрудно получить следующее обобщение формулы (4) для вычисления спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} :

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\nu(\mathcal{A}^n))^{1/\kappa n}, \quad (9)$$

где

$$\nu(\mathcal{A}^n) = \max_{A \in \mathcal{A}^n} \nu(A) = \max_{A_{i_j} \in \mathcal{A}} \nu(A_{i_n} \cdots A_{i_2} A_{i_1}).$$

Как показано в [109], в ряде случаев использование формулы (9) может дать более точные оценки $\rho(\mathcal{A})$ за счет того, что множество положительных однородных функций более богато,

¹ Набор матриц \mathcal{A} называется *неприводимым*, если матрицы из \mathcal{A} не имеют общих инвариантных подпространств, отличных от $\{0\}$ и \mathbb{R}^m .

чем множество норм. В частности лебеговы множества² положительных однородных функций не обязаны быть выпуклыми, в отличие от лебеговых множеств норм.

В [30] установлено, что в том случае, когда элементы всех матриц из \mathcal{A} неотрицательны, справедливы неравенства

$$\frac{1}{r^{1/n}} \rho^{1/n}(A_1^{\otimes n} + \dots + A_r^{\otimes n}) \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \rho^{1/n}(A_1^{\otimes n} + \dots + A_r^{\otimes n}), \quad (10)$$

где $A^{\otimes n}$ обозначает n -кратное кронекерово (или тензорное) произведение матрицы A на себя. Здесь представляется несколько удивительным тот факт, что правая и левая части неравенств не содержат смешанных произведений матриц из \mathcal{A} . Неравенства (10) теоретически позволяют вычислить спектральный радиус $\rho(\mathcal{A})$ с любой требуемой точностью. Однако, с ростом n размерность матрицы $A_1^{\otimes n} + \dots + A_r^{\otimes n}$ растет столь быстро, что даже при умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ вычисления становятся практически невыполнимыми. Для случая, когда матрицы из \mathcal{A} произвольны, справедлив [30] несколько более сложный аналог формулы (10).

Важную роль в исследовании свойств спектрального радиуса семейства матриц играют некоторые “невные” определения совместного (обобщенного) спектрального радиуса. Пусть семейство матриц \mathcal{A} неприводимо. Тогда [3] число ρ совпадает с $\rho(\mathcal{A})$, если и только если в некоторой норме $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d справедливо тождество

$$\rho\|x\| \equiv \max_{A_i \in \mathcal{A}} \|A_i x\|. \quad (11)$$

Норма, в которой выполняется (11), называется *нормой Барабанова*. Аналогично, [21, теорема 3.3], [119] число ρ совпадает с $\rho(\mathcal{A})$, если и только если для некоторого центрально-симметричного телесного³ множества S справедливо равенство

$$\rho S = \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^r A_i S \right), \quad (12)$$

где $\text{conv}(\cdot)$ обозначает выпуклую оболочку множества. Как отмечается в [21], доказательство соотношения (12) принадлежит А.Н. Дранишникову и С.В. Конягину, и поэтому центрально-симметричное множество S естественно назвать множеством *Дранишникова-Конягина-Протасова*. Множество S можно трактовать как единичный шар некоторой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d (называемой в последнее время *нормой Протасова*). Как нормы Барабанова, так и нормы Протасова являются экстремальными нормами, т.е. для них имеет место неравенство (7). В [112, 113, 146] показано, что нормы Барабанова и Протасова дуальны друг к другу.

Отметим, что несмотря на кажущуюся неконструктивность определения спектрального радиуса семейства матриц \mathcal{A} с помощью формул (6), (11) и (12), именно такого рода формулы лежат в основе многих теоретических конструкций (см., например, [17, 26, 71, 109, 143, 146]) и алгоритмов [116] вычисления спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$.

В [109] было отмечено, что число ρ является верхней оценкой для $\rho(\mathcal{A})$, если для некоторого строго положительного однородного полинома $p(x)$ степени $2d$ выполняются неравенства

$$\max_{A_i \in \mathcal{A}} p(A_i x) \leq \rho^{2d} p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Используя это замечание, авторам работы [109] удалось разработать алгоритмы вычисления спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$, как минимум не менее эффективные и точные, чем предложенные в [30].

² Лебеговыми множествами функции $\nu(x)$ называются множества $\{x : \nu(x) \leq c\}$.

³ Множество называется телесным, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Как следует из [142, Lem. 2.3], [143, Lem. 6.5], [21, п. 5.2], [116, Thm. 3] (см. также обзор в [133]) для неприводимых семейств матриц \mathcal{A} имеют место оценки

$$\gamma^{1/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (13)$$

Некоторые вычисляемые оценки для константы γ получены в [21, разд. 8].

В случае одной матрицы при условии $\rho(A) \neq 0$, как показывается во многих стандартных курсах линейного анализа, справедливы оценки

$$\gamma^{(1+\ln n)/n} \|A^n\|^{1/n} \leq \rho(A) \leq \|A^n\|^{1/n} \quad (14)$$

с некоторой константой $\gamma \in (0, 1)$. В [142, Lem. 2.3] неравенства (14) были распространены на случай общих матричных семейств:

$$\gamma^{(1+\ln n)/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}. \quad (15)$$

К сожалению, точных значений для константы γ или каких-либо других эффективно вычисляемых оценок скорости сходимости величин $\|A^n\|^{1/n}$ и $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ к своим пределам до сих пор не известно, что существенно ограничивает область применимости формул (3) и (4). В случае одной матрицы некоторым утешением служит тот факт, что значение $\rho(A)$, как правило, может быть установлено другими методами. В случае же семейств матриц отсутствие эффективных оценок скорости сходимости величин $\|\mathcal{A}^n\|^{1/n}$ к $\rho(\mathcal{A})$ более критично, поскольку альтернативных эффективных способов вычисления $\rho(\mathcal{A})$, насколько известно, до сих пор не найдено.

Этот пробел до известной степени может быть восполнен с использованием следующего ключевого результата из [36, Thm. A].

Теорема А (Ж. Боши). *При каждом $d \geq 2$ существует такое $C_d > 1$, что для любого ограниченного множества комплексных $d \times d$ матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ и для любой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{C}^d имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{A}^d\| \leq C_d \rho(\mathcal{A}) \|\mathcal{A}\|^{d-1}.$$

В [36] значение константы C_d вычисляется лишь для случая $r = 1$, т.е. когда семейство \mathcal{A} состоит из одной матрицы. Однако, в промежуточных конструкциях из [36] имеется вся необходимая информация для нахождения C_d , что позволит получить в теореме 1 явное выражение для C_d .

Как вытекает из теоремы Боши, равенство $\rho(\mathcal{A}) = 0$ влечет равенство $\mathcal{A}^d = \{0\}$, т.е. нильпотентность семейства матриц \mathcal{A} . В силу (5) справедливо и обратное утверждение: из $\mathcal{A}^d = \{0\}$ вытекает равенство $\rho(\mathcal{A}) = 0$. Таким образом, теоретически проверка условия $\rho(\mathcal{A}) = 0$ может быть осуществлена за конечное число шагов: достаточно убедиться, что все произведения матриц из \mathcal{A} с числом сомножителей равным d обращаются в нуль. Конечно, данное замечание на практике малоприспособно, поскольку даже при умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ необходимые вычисления становятся практически невыполнимыми. Тем не менее, в дальнейших рассуждениях ограничимся случаем, когда

$$\rho(\mathcal{A}) \neq 0 \quad \text{или, что равносильно,} \quad \mathcal{A}^d \neq \{0\}.$$

Теорема 1. *При каждом $d \geq 2$ для любого ограниченного множества комплексных $d \times d$ матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ и для любой нормы $\|\cdot\|$ в \mathbb{C}^d справедливы оценки*

$$C_d^{-\sigma_d(n)/n} \left(\frac{\|\mathcal{A}\|^d}{\|\mathcal{A}^d\|} \right)^{-\nu_d(n)/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$C_d = \begin{cases} 2^d - 1 & \text{при } r = 1, \\ d^{3d/2} & \text{при } r > 1, \end{cases}$$

$$\sigma_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right) \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 2 \right) & \text{при } d = 2, \\ \frac{(d-1)^3}{(d-2)^2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}} & \text{при } d > 2, \end{cases}$$

$$\nu_d(n) = \begin{cases} \frac{\ln n}{\ln 2} + 1 & \text{при } d = 2, \\ \frac{(d-1)^2}{d-2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}} & \text{при } d > 2. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в [73]. Отметим, что оценки (16) слабее, чем оценки (15). Вызвано это способом доказательства оценок (16) или тем фактом, что участвующие в этих оценках константы C_d , $\sigma_d(n)$ и $\nu_d(n)$ универсальны, т.е. не зависят ни от семейства матриц, ни от выбора нормы $\|\cdot\|$, неясно.

Отметим также, что значение константы C_d быстро растет с ростом d . Поэтому оценки (16) вряд ли пригодны для практического вычисления спектрального радиуса семейства матриц и могут представлять скорее теоретический интерес. При этом оценки (16) существенно “конечномерны” и вряд ли могут быть обобщены на семейства линейных операторов в бесконечномерных пространствах.

Наконец, отметим, что в том случае, когда семейство \mathcal{A} содержит более одной матрицы и является неприводимым, имеет место [142, Lem. 2.3] более сильная чем (15) или (16) оценка

$$\gamma^{1/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n}.$$

2.2. Оценки совместного спектрального для неприводимых семейств матриц

Пусть снова $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ — набор вещественных $d \times d$ матриц. Когда семейство матриц \mathcal{A} не является неприводимым, явные оценки приближения величины $\rho(\mathcal{A})$ были получены в теореме 1. Однако, как видно из (13), для неприводимых семейств матриц \mathcal{A} оценки, полученные в теореме 1, достаточно грубы. Поэтому возникает желание получить также явные оценки типа (13) для неприводимых семейств матриц \mathcal{A} . Одна из первых оценок такого рода была получена В.Ю. Протасовым.

Пусть набор вещественных $d \times d$ матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ неприводим. В этом случае при условии, что $\rho(\mathcal{A}) = 1$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^d , из результатов работы [21] вытекает⁴ следующая оценка для константы γ в (13):

$$\gamma \geq \frac{p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(1 + \|\mathcal{A}\|)^{d-1}}, \quad (17)$$

в которой величины $p_1(\mathcal{A}), \dots, p_{d-1}(\mathcal{A})$ определяются равенствами

$$p_k(\mathcal{A}) = \inf_{\substack{L \subset \mathbb{R}^d \\ \dim L = k}} \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\|=1}} \max_{A_i \in \mathcal{A}} \rho(A_i x, L), \quad k = 1, 2, \dots, d-1,$$

где внешний инфимум берется по всем подпространствам $L \subset \mathbb{R}^d$ размерности k , а $\rho(A_i x, L)$ обозначает расстояние от точки $A_i x$ до подпространства L , т.е. $\rho(A_i x, L) = \inf_{y \in L} \|A_i x - y\|$.

⁴ Заметим, что формально в [21] при оценке величины $\hat{H} = \gamma^{-1}$ не требуется, чтобы норма $\|\cdot\|$ была евклидовой. Однако при доказательстве теоремы 8.2 из [21], в которой эта оценка доказывается, используется понятие перпендикулярности подпространств и вычисляется площадь треугольника со сторонами, измеряемыми в норме $\|\cdot\|$, что неявно предполагает евклидовость нормы $\|\cdot\|$.

Как отмечается в [21], все величины $p_1(\mathcal{A}), \dots, p_{d-1}(\mathcal{A})$ строго положительны, поскольку в силу неприводимости \mathcal{A} матрицы A_1, \dots, A_r не имеют общих нетривиальных инвариантных подпространств. Таким образом, величину γ можно трактовать как некую меру неприводимости семейства матриц \mathcal{A} .

В том случае, когда $\rho(\mathcal{A}) \neq 1$, оценку для величины γ легко вывести из уже имеющейся оценки (17), применив последнюю к множеству матриц

$$\mathcal{A}' = \rho^{-1}(\mathcal{A})\mathcal{A} = \{\rho^{-1}(\mathcal{A})A_1, \dots, \rho^{-1}(\mathcal{A})A_r\},$$

для которого $\rho(\mathcal{A}') = 1$. В этом случае для константы γ в (13) получается следующая оценка:

$$\gamma \geq \frac{\rho^{-(d-1)}(\mathcal{A})p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(1 + \rho^{-1}(\mathcal{A})\|\mathcal{A}\|)^{d-1}} = \frac{p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(\rho(\mathcal{A}) + \|\mathcal{A}\|)^{d-1}},$$

а если учесть, что согласно (5) $\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$, то

$$\gamma \geq \frac{p_1(\mathcal{A}) \cdots p_{d-1}(\mathcal{A})}{(2\|\mathcal{A}\|)^{d-1}}.$$

К сожалению, вычисление величин $p_k(\mathcal{A})$ достаточно трудно провести на практике. Поэтому ниже будет предложен еще один подход к получению явных априорных оценок совместного спектрального радиуса с помощью обобщенной формулы Гельфанда.

Обозначим через \mathcal{A}_n при $n \geq 1$ множество всех конечных произведений матриц из $\mathcal{A} \cup \{I\}$, содержащих не более k сомножителей. т.е. $\mathcal{A}_n = \cup_{k=0}^n \mathcal{A}^k$. Через $\mathcal{A}_n(x)$ обозначим множество всех векторов Ax , где $A \in \mathcal{A}_n$. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в \mathbb{R}^d ; шар радиуса t в соответствующей норме обозначим через $\mathbb{S}(t)$.

Назовем p -мерой неприводимости (в норме $\|\cdot\|$) семейства матриц \mathcal{A} число $\chi_p(\mathcal{A})$, определяемое равенством

$$\chi_p(\mathcal{A}) = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ \|x\|=1}} \sup \{t : \mathbb{S}(t) \subseteq \text{conv}\{\mathcal{A}_p(x) \cup \mathcal{A}_p(-x)\}\}.$$

Мера неприводимости $\chi_p(\mathcal{A})$ под именем “мера квазиуправляемости” была введена и исследована в [19, 20, 84, 85, 87] в связи с задачами оценки “всплесков” совокупностей переходных режимов линейных систем управления. Основанием для названия “мера неприводимости” для величины $\chi_p(\mathcal{A})$ является следующая

Лемма 1. Пусть $p \geq d - 1$. Семейство матриц \mathcal{A} неприводимо, если и только если $\chi_p(\mathcal{A}) > 0$.

Доказательство леммы 1 содержится в [87, Thm. 2.4], [20, теорема 1.4], [85, Thm. 2].

Теорема 2. Для любых $n \geq 1, p \geq d - 1$ справедливы оценки

$$\rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq (\eta_p(\mathcal{A}))^{1/n} \rho(\mathcal{A}),$$

где

$$\eta_p(\mathcal{A}) = \frac{\max\{1, (\rho(\mathcal{A}))^p\}}{\chi_p(\mathcal{A})},$$

и, следовательно,

$$(\nu_p(\mathcal{A}))^{-1/n} \|\mathcal{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^n\|^{1/n},$$

где

$$\nu_p(\mathcal{A}) = \frac{\max\{1, \|\mathcal{A}\|^p\}}{\chi_p(\mathcal{A})}.$$

Доказательство теоремы содержится в работе [77].

Отметим, что в то время как вычисление величины $\eta_p(\mathcal{A})$ требует знания $\rho(\mathcal{A})$, ее оценка сверху $\nu_p(\mathcal{A})$ вычисляется непосредственно по \mathcal{A} за конечное число алгебраических операций.

Заметим, что утверждение теоремы 2, за одним исключением, справедливо лишь для матричных семейств, состоящих из более чем одной матрицы. Это связано с тем, что одноматричные семейства $\mathcal{A} = \{A\}$ могут быть неприводимыми только в том случае, когда размерность матрицы A равна 2×2 , причем A не имеет вещественных собственных значений.

В определенном смысле неприводимость семейств матриц, естественно возникающих в теории управления, равносильна полной управляемости и наблюдаемости по Калману.

Рассмотрим, в частности, вещественную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка d и вектор-столбцы $b, c \in \mathbb{R}^d$. Образует с их помощью семейство $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, b, c) = \{A, Q\}$, где $Q = (q_{ij}) = bc^T$ с элементами $q_{ij} = b_i c_j$, $i, j = 1, \dots, d$. Тогда, как показано в [20], семейство матриц $\mathcal{A}(A, b, c)$ неприводимо, если и только если пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема по Калману.

Приведем некоторые примеры из [20], демонстрирующие возможность проверки неприводимости семейств матриц и вычисления их меры неприводимости. Доказательства соответствующих утверждений см. [20]. Следующий пример важен в теории рассинхронизованных систем (см., например, [2, 70]). Рассмотрим скалярную $d \times d$ матрицу $A = (a_{ij})$ и образуем с ее помощью семейство матриц $\mathcal{P}(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_d\}$ вида

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{id} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A называется *неразложимой*, если никакой перестановкой строк и соответствующих столбцов ее нельзя представить в блочно-треугольном виде

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Неразложимость матрицы A равносильна отсутствию у нее собственного инвариантного подпространства, натянутого на некоторое количество базисных векторов

$$e_i = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Пусть норма $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d определяется равенством $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$. Положим

$$\alpha = \frac{1}{2d} \min\{\|(A - I)x\| : \|x\| = 1\}, \quad \beta = \frac{1}{2} \min\{|a_{ij}| : i \neq j, a_{ij} \neq 0\}.$$

Пример 1. Семейство матриц $\mathcal{P}(A)$ неприводимо, если и только если матрица A неразложима и число 1 не является ее собственным значением. При этом $\chi_d[\mathcal{P}(A)] \geq \alpha\beta^{d-1}$.

Рассмотрим еще один пример, на который обратил внимание Е. Кажкуевич. Пусть семейство $\mathcal{V}(A)$ состоит из матриц $A, V_1 A, V_2 A, \dots, V_d A$. Здесь A — скалярная $d \times d$ матрица с элементами a_{ij} , а V_i , $i = 1, 2, \dots, d$, — диагональные матрицы вида

$$V_i = \text{diag}\{v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ii}, \dots, v_{di}\},$$

где $v_{ij} = 1$ при $i \neq j$, $v_{ij} = -1$ при $i = j$.

Пусть снова норма $\|\cdot\|$ в \mathbb{R}^d определяется равенством $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$. Положим

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{d} \min\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}, \quad \tilde{\beta} = \min\{|a_{ij}| : i \neq j, a_{ij} \neq 0\}.$$

Пример 2. Семейство матриц $\mathcal{V}(A)$ неприводимо, если и только если A — невырожденная и неразложимая матрица. При этом $\chi_d[\mathcal{V}(A)] \geq \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{d-1}$.

2.3. Оценки константы Липшица совместного спектрального радиуса

Техника мер неприводимости $\chi_p(\mathcal{A})$ оказывается плодотворной и при исследовании еще одного свойства совместного спектрального радиуса — его липшицевой непрерывности.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ обозначает поле комплексных или вещественных чисел. Будем интересоваться свойствами совместного спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$ как функции \mathcal{A} для компактных (т.е. замкнутых и ограниченных) множеств \mathcal{A} . В этом случае удобно обозначить через $\mathcal{B}(\mathbb{K}^{d \times d})$ множество всех ограниченных непустых подмножеств пространства $\mathbb{K}^{d \times d}$, а через $\mathcal{K}(\mathbb{K}^{d \times d})$ множество всех компактных непустых подмножеств пространства $\mathbb{K}^{d \times d}$. Оба этих множества становятся метрическими пространствами, если их снабдить обычной метрикой Хаусдорфа

$$H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \max \left\{ \sup_{A \in \mathcal{A}} \inf_{B \in \mathcal{B}} \|A - B\|, \sup_{B \in \mathcal{B}} \inf_{A \in \mathcal{A}} \|A - B\| \right\}.$$

При этом пространство $\mathcal{K}(\mathbb{K}^{d \times d})$ оказывается полным. Отметим, что в этой топологии множество $\mathcal{I}(\mathbb{K}^{d \times d})$ неприводимых компактных семейств матриц открыто и плотно в $\mathcal{K}(\mathbb{K}^{d \times d})$.

В 2002 году Ф. Виртом было показано [143, следствие 4.2], что совместный спектральный радиус неприводимых компактных семейств матриц удовлетворяет локальному условию Липшица.

Теорема Вирта. Для любого компактного множества $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}(\mathbb{K}^{d \times d})$ найдется такая константа C (зависящая от \mathcal{P} и нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{K}^{d \times d}$), что

$$|\rho(\mathcal{A}) - \rho(\mathcal{B})| \leq C \cdot H(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{P}.$$

Наша цель заключается в получении явной оценки константы C в приведенном неравенстве.

Отметим, что как показывает следующий пример, совместный спектральный радиус компактных семейств матриц может не удовлетворять локальному условию Липшица, если отказаться от предположения о неприводимости семейства матриц.

Пример 3. Рассмотрим семейство матриц \mathcal{A}_ε , состоящее из единственной матрицы

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

зависящей от вещественного параметра $\varepsilon > 0$.

Очевидно, одноэлементное множество матриц \mathcal{A}_0 не является неприводимым. При этом $\rho(A_\varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}$, и поэтому $|\rho(\mathcal{A}_\varepsilon) - \rho(\mathcal{A}_0)| = |\rho(A_\varepsilon) - \rho(A_0)| = \sqrt{\varepsilon}$, в то время как $H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) = \|A_\varepsilon - A_0\| = \varepsilon c$, где c — некоторая константа.

Теорема 3. Для любой пары семейств матриц $\mathcal{A} \in \mathcal{I}(\mathbb{K}^{d \times d})$, $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^{d \times d})$ при каждом $p \geq d - 1$ справедлива оценка

$$|\rho(\mathcal{A}) - \rho(\mathcal{B})| \leq \nu_p(\mathcal{A}) H(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tag{18}$$

где

$$\nu_p(\mathcal{A}) = \frac{\max\{1, \|\mathcal{A}\|^p\}}{\chi_p(\mathcal{A})}.$$

Учитывая, что величина $\nu_p(\mathcal{A})$ непрерывно по метрике Хаусдорфа зависит от \mathcal{A} и, следовательно, ограничена на каждом компактном множестве $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}(\mathbb{K}^{d \times d})$, из теоремы 3 вытекает теорема Вирта. Отметим при этом, что в отличие от теоремы Вирта в теореме 3 от семейства матриц \mathcal{B} не требуется ни компактность, ни неприводимость.

Как видно из доказательства теоремы [74], на самом деле имеет место даже более точная, чем (18), оценка

$$|\rho(\mathcal{A}) - \rho(\mathcal{B})| \leq \frac{\max\{1, (\rho(\mathcal{A}))^p\}}{\chi_p(\mathcal{A})} H(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Однако, эта оценка имеет тот недостаток, что вычислить величину $\rho(\mathcal{A})$ на практике достаточно сложно. Величина же $\nu_p(\mathcal{A})$, используемая в (18), вычисляется непосредственно по \mathcal{A} за конечное число алгебраических операций.

Отметим также, что в то время, как значение совместного спектрального радиуса семейства матриц не зависит от выбора нормы в $\mathbb{K}^{d \times d}$, величины $\nu_p(\mathcal{A})$, $\chi_p(\mathcal{A})$ и $H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в (18) зависят от выбора нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{K}^{d \times d}$.

Подчеркнем, наконец, что в том случае, когда оба семейства матриц $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ неприводимы и компактны, т.е. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathbb{K}^{d \times d})$, можно формально усилить неравенство (18):

$$|\rho(\mathcal{A}) - \rho(\mathcal{B})| \leq \min\{\nu_p(\mathcal{A}), \nu_p(\mathcal{B})\} H(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

2.4. Численные алгоритмы вычисления совместного спектрального радиуса на основе построения норм Барабанова

Как отмечалось в предыдущих разделах, результаты теорем 1 и 2 вряд ли пригодны для практического применения даже в случае матриц достаточно низких размерностей. В связи с этим ниже предлагаются две итерационные процедуры, позволяющие не только вычислять с любой наперед заданной степенью точности совместный спектральный радиус, но и одновременно производить приближенное построение норм Барабанова соответствующих наборов матриц. Излагаемые ниже результаты основаны на работах [18, 72, 75, 76].

Непрерывную функцию $\gamma(t, s)$, $t, s > 0$, обладающую свойствами $\gamma(t, t) = t$, $\min\{t, s\} < \gamma(t, s) < \max\{t, s\}$ при $t \neq s$ будем называть в дальнейшем функцией усреднения. Примерами функций усреднения являются функции $\gamma(t, s) = \frac{t+s}{2}$, $\gamma(t, s) = \sqrt{ts}$, $\gamma(t, s) = \frac{2ts}{t+s}$.

Пусть в \mathbb{K}^m заданы некоторая норма $\|\cdot\|_0$ и произвольный элемент $e \neq 0$, для которого $\|e\|_0 = 1$, и пусть $\gamma(\cdot, \cdot)$ — некоторая функция усреднения. Построим рекурсивно последовательность норм $\|\cdot\|_n$ по следующим правилам:

MR₁: считая, что норма $\|\cdot\|_n$ уже известна, вычислим величины

$$\rho_n^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n}, \quad \rho_n^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n};$$

MR₂: положим $\gamma_n = \gamma(\rho_n^-, \rho_n^+)$, $\mu_n = \max \left\{ \|e\|_n, \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i e\|_n \right\}$ и определим новую норму:

$$\|x\|_{n+1} = \mu_n^{-1} \max \left\{ \|x\|_n, \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n \right\}.$$

Теорема 4. Для любого неприводимого набора матриц \mathcal{A} и любой функции усреднения $\gamma(t, s)$ последовательности $\{\rho_n^\pm\}$, определяемые итерационной процедурой MR_1, MR_2 , сходятся к $\rho(\mathcal{A})$, а последовательность норм $\|\cdot\|_n$ равномерно на каждом ограниченном множестве сходится к некоторой норме Барабанова $\|\cdot\|^*$ набора матриц \mathcal{A} . При этом последовательность $\{\rho_n^-\}$ не убывает, а последовательность $\{\rho_n^+\}$ не возрастает и $\rho_n^- \leq \rho(\mathcal{A}) \leq \rho_n^+$ при $n = 1, 2, \dots$, что предоставляет апостериорную оценку погрешности вычисления $\rho(\mathcal{A})$.

Таким образом, итерационная процедура MR_1, MR_2 приводит к построению нормы Барабанова и нахождению совместного спектрального радиуса набора матриц \mathcal{A} . Процедура построения чисел ρ_n^\pm сходна с методом приближения совместного спектрального радиуса, предложенным в [56]. В то же время метод численного построения норм Барабанова предлагается, по-видимому, впервые.

Поскольку в процедуре MR_1, MR_2 в качестве очередного приближения к норме Барабанова выбирается максимум значений уже построенного приближения и некоей вспомогательной нормы, то она будет называться в дальнейшем процедурой по методу тах-релаксации. В некоторых ситуациях может оказаться более предпочтительным другой вариант итерационной процедуры построения норм Барабанова и вычисления совместного спектрального радиуса, который естественно назвать итерационной процедурой по методу линейной релаксации.

Пусть снова $\|\cdot\|_0$ — некоторая норма в \mathbb{K}^m и $e \neq 0$ — произвольный элемент из \mathbb{K}^m , для которого $\|e\|_0 = 1$. Пусть заданы числа λ^- и λ^+ , удовлетворяющие соотношениям $0 < \lambda^- \leq \lambda^+ < 1$, которые будут играть в дальнейшем роль границ параметров линейной релаксации. Построим рекурсивно последовательность норм $\|\cdot\|_n$ по следующим правилам:

LR₁: совпадает с MR₁;

LR₂: положим $\gamma_n = \max_i \|A_i e\|_n$, выберем произвольным образом число $\lambda_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$ и определим новую норму:

$$\|x\|_{n+1} = \lambda_n \|x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n.$$

Отметим, что норма $\|x\|_{n+1}$ корректно определена при любом выборе γ_n , поскольку в силу неприводимости набора матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ векторы $A_1 x, \dots, A_r x$ ни при каком $x \neq 0$ не могут одновременно обратиться в нуль, а тогда $\rho_n^- > 0$ и $\gamma_n \geq \rho_n^- \|e\|_n > 0$.

Процедура LR₁, LR₂ отличается от процедуры MR₁, MR₂ лишь методом пересчета норм $\|\cdot\|_n$ на втором шаге. При этом, в отличие от процедуры MR₁, MR₂ величины ρ_n^\pm не используются для пересчета норм $\|\cdot\|_n$, а согласно приводимой ниже теореме 5 нужны лишь для оценки точности вычисления $\rho(\mathcal{A})$.

Теорема 5. Для любых последовательностей чисел $\{\rho_n^\pm\}$ и норм $\|\cdot\|_n$, определяемых итерационной процедурой LR₁, LR₂, справедливы все утверждения теоремы 4.

Вместо итерационной процедуры LR₁, LR₂ можно было бы рассмотреть формально более общую процедуру, в которой числа γ_n выбирались бы произвольным образом, лишь бы для них выполнялись включения $\gamma_n \in [\rho_n^-, \rho_n^+]$, а нормировка получающихся норм осуществлялась бы принудительно:

LR'₁: совпадает с MR₁ и LR₁;

LR'₂: выберем произвольным образом числа $\lambda_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$, $\gamma_n \in [\rho_n^-, \rho_n^+]$ и определим сначала вспомогательную норму

$$\|x\|'_{n+1} = \lambda_n \|x\|_n + (1 - \lambda_n) \gamma_n^{-1} \max_i \|A_i x\|_n,$$

а затем норму

$$\|x\|_{n+1} = \frac{\|x\|'_{n+1}}{\|e\|'_{n+1}}.$$

Если выписать явные формулы для пересчета норм $\|x\|_{n+1}$ через $\|x\|_n$ в условии LR'_2 , то они будут совпадать с условиями LR_2 . Таким образом, рассмотрение итерационных процедур вида LR'_1 , LR'_2 не добавляет общности!

Проиллюстрируем применимость алгоритмов вычисления совместного спектрального радиуса и построения норм Барабанова на примере двумерных матриц.

Пример 4. Рассмотрим семейство $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ двумерных матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функции $\Phi_i(\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $R_n(\varphi)$, $R_n^*(\varphi)$ выбирались кусочно-линейными с узлами на сетке из 3000 точек на интервале $[-\pi, \pi]$. Для вычисления с помощью программы MATLAB[®] совместного спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$ абсолютной погрешностью 10^{-3} потребовалось 22 итераций алгоритма MR1-MR2. При этом было получено значение $\rho(\mathcal{A}) = 1.390$. Приближение для нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ после 22-й итерации алгоритма MR1-MR2 представлено на рис. 1 слева.

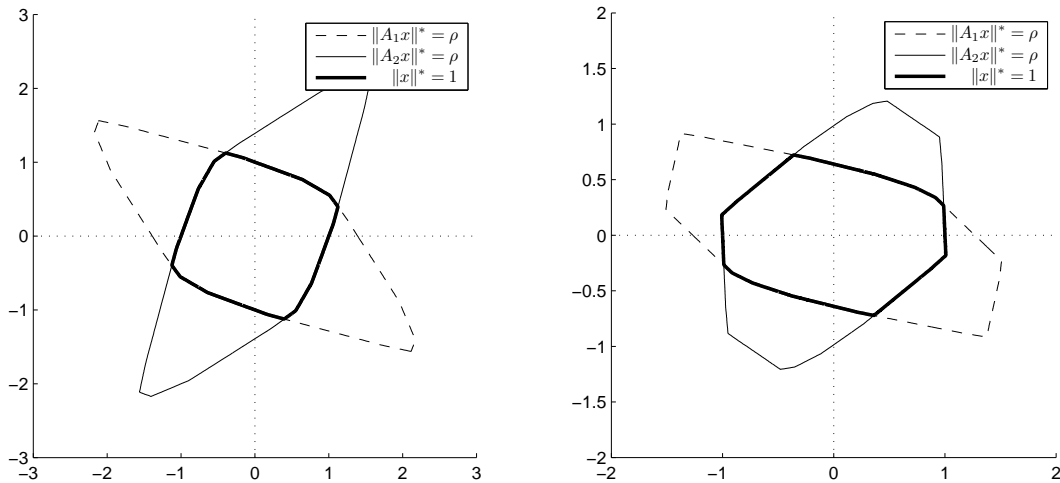


Рис. 1. Примеры вычисления нормы Барабанова для пары двумерных матриц.

Пример 5. Рассмотрим семейство $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ двумерных матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Здесь функции $\Phi_i(\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $R_n(\varphi)$, $R_n^*(\varphi)$ также выбирались кусочно-линейными с узлами на сетке из 3000 точек на интервале $[-\pi, \pi]$. Для вычисления с помощью программы MATLAB[®] совместного спектрального радиуса $\rho(\mathcal{A})$ с абсолютной погрешностью 10^{-3} потребовалось 30 итераций алгоритма MR1-MR2. При этом было получено значение $\rho(\mathcal{A}) = 1.268$. Приближение для нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ после 30-й итерации алгоритма MR1-MR2 представлено на рис. 1 справа.

Как видно из рисунка 1 в приведенных примерах множества точек, удовлетворяющих соотношениям $\|A_1x\| = \rho$ и $\|A_2x\| = \rho$, имеют ровно 4 точки пересечения. Этот факт был доказан в [17, 71] для случая, когда одна из матриц A_1, A_2 нижнетреугольная, другая верхнетреугольная, и обе они имеют неотрицательные элементы. В [17, 71] этот факт являлся одним из ключевых элементов построения контрпримера к гипотезе Лагариаса-Ванга о конечности. Справедлив ли этот факт в общем случае неизвестно, однако числовые эксперименты проведенные с помощью алгоритма MR1-MR2 с несколькими десятками пар матриц A_1, A_2 свидетельствуют в пользу этого.

Листинг программы в системе MATLAB[®], использовавшейся для вычислений в примерах 4 и 5, приведен в [76].

Отметим, что предложенные алгоритмы позволяют вычислить совместный спектральный радиус конечного семейства матриц с любой наперед заданной точностью и оценить апостериорную погрешность вычисления совместного спектрального радиуса.

Вопрос о точности и скорости приближения нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ с помощью норм $\|\cdot\|_n$ остается открытым. По-видимому, одна из трудностей в вычислении точности приближения нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ с помощью норм $\|\cdot\|_n$ кроется в том, что в общем случае норма Барабанова семейства матриц определяется неоднозначно. Именно для преодоления этой трудности выше и были предложены релаксационные, а не прямые схемы вычислений. Более того, если положить $\lambda_n \equiv 0$ при реализации алгоритма LR1-LR2, то, как показывают численные примеры, полученная прямая схема построения норм Барабанова может не обладать свойством сходимости.

Также открыт и вопрос о скорости сходимости последовательностей $\{\rho_n^+\}$ и $\{\rho_n^-\}$ к совместному спектральному радиусу.

Отметим также, что выше были предложены лишь алгоритмы вычисления совместного спектрального радиуса и нормы Барабанова. Вычислительные аспекты применения этих алгоритмов, такие как выбор сетки для представления $\Phi_i(\varphi), H_i(\varphi), R_n(\varphi), R_n^*(\varphi)$ в двумерном случае, оценка влияния погрешностей вычисления и пр. требуют дополнительного анализа.

3. ИДЕЯ АСИНХРОННОСТИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

3.1. Лазеры на квантовых точках с синхронизованными модами

Изучение нелинейной динамики оптических систем занимает важное место в современных исследованиях в области систем передачи информации и лазерной физики. Интерес к этой теме вызван причинами как фундаментального, так и прикладного характера. Лазеры и другие нелинейные системы, основанные на взаимодействии когерентного света с веществом, представляют собой пример самоорганизующихся систем, которые демонстрируют широкий спектр различных нелинейных режимов, от самых простых стационарных до сложных хаотических и пространственно-временных структур. Они являются удобными объектами для экспериментального изучения и теоретического анализа динамических состояний различного типа и их бифуркаций. С другой стороны, многие динамические режимы генерации лазеров, такие как, например, пассивная модуляция добротности, синхронизация мод, биение мод и т.д., имеют обширные технологические применения, включающие телекоммуникационные технологии, запись и хранение информации, точное машиностроение и измерительные системы, приложения в биологии и др. В связи с этим, исследование возможностей улучшения динамических характеристик лазеров представляет собой важную прикладную задачу. Полупроводниковые лазеры служат основными элементами современных телекоммуникационных оптических сетей. В частности, лазеры с синхронизованными модами являются компактными, дешевыми и надежными источниками коротких оптических импульсов с высокой частотой повторения (де-

сятки и сотни ГГц и ТГц), приспособленными для применения в оптических коммуникациях. Новое поколение полупроводниковых лазеров, так называемые лазеры на квантовых точках, демонстрируют несколько важных технологических преимуществ по сравнению со стандартными полупроводниковыми лазерами, используемыми в настоящее время, и рассматриваются как потенциально новая база для телекоммуникационных приложений. Однако развитие технологий, включающих эти лазеры, требует улучшения параметров генерируемых световых импульсов, таких как ширина импульса, устойчивость к шуму, частота повторения импульсов и др. Проведенные исследования включали моделирование лазеров с синхронизованными модами, направленное на оптимизацию указанных параметров, в том числе при помощи синхронизации к источникам внешней модуляции.

Синхронизация мод в лазерах служит важным средством генерации коротких оптических импульсов для различных практических приложений от высокоскоростных телекоммуникаций до медицинской диагностики. В частности, монолитные полупроводниковые лазеры с пассивной, гибридной и активной синхронизацией мод являются компактными источниками пикосекундных импульсов с высокой частотой повторения, приспособленных для использования в телекоммуникационных сетевых технологиях, см. [62, 63]. Технология производства нового поколения таких лазеров основана на использовании материалов с квантовыми точками, см. [120]. Подобные лазеры демонстрируют многие преимущества по сравнению с обычными полупроводниковыми лазерами. Эти преимущества, включающие малый ток порога, устойчивость к шумам и сигналу обратной связи (отражениям), малое дрожание импульса и др., изучались, например, в [47, 94, 130]. Недавно было показано, что лазеры на квантовых точках с синхронизованными модами способны генерировать очень короткие импульсы [121, 134]. Благодаря дискретной природе электронных состояний в лазерах на квантовых точках, им свойственен ряд характеристик, отличающих их от обычных полупроводниковых лазеров, см. [135]. Поэтому возник интерес к разработке и анализу новых моделей и развитию новых методов, которые принимают во внимания специфические характеристики лазеров на квантовых точках. Так, модели лазеров на квантовых точках должны учитывать процессы электронного обмена между дискретными энергетическими уровнями в квантовых точках и резервуаром с непрерывным спектром в основном материале. Они включают набор различных по скорости процессов, влияющих на качество выходного сигнала и динамику лазера в целом, см. [55]. Уравнения, описывающие динамику процессов обмена, предложены в [99, 100]. Упрощения этих моделей получены в [107, 136] предельным переходом к усеченной системе уравнений, основанном на использовании различия характерных временных шкал процессов, протекающих в материале с квантовыми точками. В [139, 140] разработаны модели типа уравнений с задержкой для лазеров на квантовых точках с синхронизованными модами. Близкий класс моделей типа уравнений в частных производных, включающих уравнения бегущей волны, предложен и изучен в [25].

Ниже будут описаны малоизученные бифуркационные механизмы возникновения и нарушения синхронизации мод и сопутствующих ей режимов в моделях полупроводниковых лазеров.

Моделирование синхронизации мод и теоретический анализ

Нелинейная динамика одномодовых лазеров и лазеров с небольшим числом мод, активно исследовавшаяся в последние десятилетия, к настоящему времени сравнительно хорошо изучена. Вместе с тем, динамические процессы и бифуркации в лазерных моделях с очень большим или бесконечным числом степеней свободы пока еще изучены недостаточно. Особо важное значение в таких системах имеют приводящие к самоорганизации процессы синхронизации различных элементов системы. Основным объектом настоящего исследования являлась синхронизация мод в монолитных полупроводниковых лазерах, которые являются источниками

коротких световых импульсов с высокой частотой повторения. При этом основное внимание уделялось малоизученным бифуркационным механизмам возникновения и нарушения синхронизации и сопутствующих ей режимов.

Первая группа результатов была получена в задачах о пассивной синхронизации мод в полупроводниковом лазере, представляющей собой эффективный метод генерации коротких световых импульсов с высокими частотами повторения, используемых в телекоммуникационных технологиях. Так как длительность импульсов синхронизации мод обычно много меньше периода их повторения, с математической точки зрения они подобны лазерным автосолютам. В качестве базовой модели пассивной синхронизации мод использовалась система трех дифференциальных уравнений с временным запаздыванием. Эта система, задающая временную эволюцию комплексной амплитуды электрического поля A , насыщаемого усиления G и насыщаемого поглощения Q , вносимых усиливающей и поглощающей секциями лазера, записывается в форме:

$$\gamma^{-1} \partial_t A + A = \sqrt{\kappa} e^{(1-i\alpha_g)G(t-T)/2 - (1-i\alpha_q)Q(t-T)/2 - i\varphi} A(t-T), \quad (19)$$

$$\partial_t G = g_0 - \gamma_g G - e^{-Q} (e^G - 1) |A|^2, \quad (20)$$

$$\partial_t Q = q_0 - \gamma_q Q - s(1 - e^{-Q}) |A|^2. \quad (21)$$

Здесь коэффициенты ненасыщенного усиления и поглощения g_0 и q_0 описывают ток инжекции в усиливающей секции и напряжение, приложенное к поглощающей секции, соответственно. $\alpha_{g,q}$ и $\gamma_{g,q}$ — факторы уширения спектральной линии и скорости релаксации плотности носителей в поглощающей и усиливающей секциях, γ — параметр, характеризующий ширину линии спектрального фильтра, $\kappa < 1$ — коэффициент ослабления за проход резонатора, описывающий линейные нерезонансные потери, s — отношение интенсивностей насыщения в усиливающей и поглощающей секциях. Наконец, параметр временного запаздывания T равен времени обхода холодного резонатора.

Вблизи порога генерации уравнение (19) может быть приведено к дифференциальному уравнению в частных производных типа Гинзбурга-Ландау. Эта редукция проясняет связь между моделью (19)–(21) и известным уравнением Хауса. Важным отличием модели (19)–(21) от моделей, основанных на уравнении Хауса, является то, что она не предполагает малости усиления и потерь за обход резонатора, слабого насыщения и бесконечно широкой спектральной полосы фильтра. Эти предположения, — в особенности, приближение малых усиления и потерь, — не справедливы для полупроводниковых лазеров. Единственные предположения, которые были использованы при выводе уравнений (19)–(21), касаются Лоренцевой формы линии спектрального фильтра и однонаправленной генерации в кольцевом лазере. Будучи более общими, чем классические модели, предложенные Нью и Хаусом, уравнения (19)–(21) включают обе эти модели в качестве предельных случаев. В то же время, решение этих уравнений приводит к результатам, хорошо согласующимся с экспериментальными результатами, типичными для полупроводниковых лазеров. Заметим также, что другая модель, основанная на дифференциальных уравнениях с временными запаздываниями, была ранее предложена Гуревичем и Ханиным для описания динамики твердотельного лазера.

В пределе бесконечной ширины полосы спектрального фильтра, эквивалентном приближению медленного поглотителя, было предложено аналитическое описание режима синхронизации мод, которое остается справедливым и в случае большого усиления и потерь за обход резонатора. В частности, этот подход позволил определить границы устойчивости режима синхронизации мод по критерию Нью, согласно которому параметр интегрального усиления за обход резонатора $G(t) - Q(t) + \ln \kappa$ должен быть отрицательным в течении всего интервала времени между двумя последовательными импульсами, когда амплитуда лазерного поля близка к нулю. Получено условие $sk > 1$, являющееся необходимым для существования импульсов,

устойчивых по критерию Нью, и обобщающее известное условие $s > 1$ на случай больших потерь за проход резонатора. Согласно полученным результатам, в диапазоне значений параметров, типичном для полупроводниковых лазеров, границы неустойчивости импульсов синхронизации мод могут быть весьма хорошо аппроксимированы с помощью обобщения метода Нью.

Было построено аналитическое отображение, описывающее преобразование параметров импульса синхронизации мод после полного обхода резонатора. Нетривиальная неподвижная точка периода один этого отображения соответствует фундаментальному режиму синхронизации мод, а неподвижные точки периода два и больших периодов — гармоническим режимам синхронизации мод. Граница неустойчивости по отношению к пассивной модуляции добротности была найдена как бифуркационное множество в пространстве лазерных параметров, на котором два комплексных мультипликатора неподвижной точки периода один пересекают единичную окружность (бифуркация Неймарка-Сакера). Согласно полученным результатам, эта граница неустойчивости может быть весьма хорошо оценена в рамках подхода, в котором не учитывается спектральная фильтрация лазерного излучения. Однако, такой подход не годится для определения длительности импульса и его частоты повторения. Поэтому для этих целей использовался более реалистичный подход, основанный на вариационном методе. Было обнаружено, что граница неустойчивости пассивной модуляции добротности определяется главным образом произведением двух параметров: отношения интенсивностей насыщения s и коэффициента линейного ослабления за проход κ . При этом, если произведение $s\kappa$ зафиксировано, ее положение почти не зависит от каждого из этих двух параметров по отдельности. Оценки зависимости от лазерных параметров границы неустойчивости пассивной модуляции добротности и области устойчивости режима синхронизации мод находятся в качественном согласии с экспериментальными данными, полученными с монолитными полупроводниковыми лазерами, работающими в режиме пассивной синхронизации мод.

Численное моделирование и анализ

Вторая группа результатов была получена на основе численного исследования системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (19)–(21), а также более сложных систем с запаздыванием, приспособляющих эту модель для описания лазеров на квантовых точках, и распределенных моделей, учитывающих линейную геометрию лазеров. Изучены бифуркации Андронова-Хопфа режима стационарной генерации и рождающиеся в точках этих бифуркаций решения с периодическими во времени интенсивностями лазерного поля. Показано, что, помимо бифуркации, ответственной за возникновение периодического решения, соответствующего фундаментальному режиму синхронизации мод, существуют бифуркации, приводящие к возникновению гармонических режимов синхронизации мод с периодом повторения импульсов в два, три и большее число раз меньшим времени обхода резонатора (подобные гармонические режимы с частотой повторения в два раза большей, чем у фундаментального режима, наблюдались экспериментально в монолитных полупроводниковых лазерах). Гармонические режимы могут сосуществовать с фундаментальным режимом синхронизации мод, приводя к эффектам гистерезиса, бистабильности и переключений между этими режимами.

Согласно полученным результатам, в кольцевом лазере самые короткие импульсы с самыми высокими пиковыми мощностями наблюдаются в случае, когда факторы уширения спектральной линии в усиливающей и поглощающей секциях равны друг другу, т.е. $\alpha_g = \alpha_q$. Уменьшение α_g относительно α_q приводит к уменьшению пиковой мощности и увеличению ширины импульса. С другой стороны, для $\alpha_g > \alpha_q$ наблюдался новый механизм разрушения режима синхронизации мод, связанный с переходом от регулярных пульсаций синхронизации мод к хаотическому режиму генерации через перемежаемость. Из результатов численного ана-

лиза следует, что для значений факторов уширения спектральной линии отличных от нуля этот последний механизм является весьма общим, как и известные механизмы, связанные с возникновением неустойчивости на частоте пассивной модуляции добротности, а также переходом к гармоническим режимам синхронизации мод с двумя или большим числом импульсов в резонаторе.

Заметим, что критерий устойчивости режима синхронизации Нью имеет качественную природу. Он не учитывает того, что небольшие возмущения могут распространяться в промежутке между импульсами и, в конечном счете, в течение интервала времени порядка γ^{-1} быть поглощены передним или задним фронтом импульса. Это означает, что, даже тогда, когда критерий Нью не выполняется, усиление небольших возмущений не всегда разрушает импульс синхронизации мод. Факт существования устойчивых режимов синхронизации мод с импульсами, имеющими положительное интегральное усиление G на переднем и на заднем фронте, подтверждается численными расчетами. Подобные импульсы являются устойчивыми, но не удовлетворяют критерию устойчивости Нью, и разрушаются при достижении критической мощности шума, достаточной для разрушения режима синхронизации мод.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием типа (19)–(21) были соответствующим образом модифицированы для описания активной и гибридной синхронизации мод и учета таких дополнительных физических эффектов, наблюдаемых в полупроводниковых лазерах, как быстрая нелинейность, связанная с внутризонными процессами релаксации. Кроме того, при определенных условиях, модель (19)–(21) была обобщена на случай линейного лазера. Были изучены модификации этой модели и модели (19)–(21), приспособленные для описания пассивной синхронизации мод в полупроводниковом лазере на квантовых точках. Эти модификации учитывают процессы обмена между квантовыми точками и основной активной средой.

Был проведен численный анализ следующих моделей.

- Модель (19)–(21) описывает лазер с кольцевым резонатором. Была предложена распределенная модель пассивной синхронизации мод в лазере с линейной геометрией (основной для приложений), основанная на уравнениях бегущей волны. Была разработана численная схема приближенного интегрирования этой модели, использующая элементы аналитического интегрирования, которая позволила эффективно строить бифуркационные диаграммы в пространстве параметров модели. Было показано, что модели с кольцевой и линейной геометрией приводят в целом к близким бифуркационным диаграммам; были изучены различия, вызванные различием в геометрии резонатора [138].
- Были изучены модификации моделей пассивной синхронизации мод в лазерах с кольцевой и линейной геометрией типа уравнений с задержкой и уравнений в частных производных, обобщающие эти модели для описания процессов в лазерах на квантовых точках.
- Важным методом улучшения параметров импульсного режима генерации является синхронизация лазера к частоте внешнего источника, так называемый метод гибридной синхронизации мод. Синхронизация может осуществляться различными способами, в том числе при помощи вариации приложенного напряжения, либо инъекцией поля из другого лазера. Модели таких систем, полученные естественной модификацией моделей пассивной синхронизации мод в полупроводниковых лазерах были изучены в [60, 137, 141], включая модели с задержкой и распределенные модели.

Для всех указанных моделей были построены бифуркационные диаграммы, позволившие оценить зону устойчивой генерации импульсов в пространстве параметров. Эта зона ограничена границами неустойчивостей (бифуркационными линиями) различного типа. Основными из них являются граница неустойчивости по отношению к пассивной модуляции добротности и переход к субгармоническим режимам генерации с двумя и более импульсами в резонаторе.

Результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными, полученными группами в Берлине и Корке.

Был проведен численный анализ чувствительности к возмущениям параметров и изучен эффект изменения различных параметров лазера на размер и положение зоны устойчивой генерации. Полученные результаты позволили сформулировать ряд достаточно простых рекомендаций по дизайну полупроводниковых лазеров, направленных на улучшение параметров генерируемого сигнала. Был изучен эффект гибридной синхронизации при модулировании приложенного напряжения (тока) [60] и при инъекции света из одномодового и двухмодового лазеров [137, 141] на зону генерации импульсов и их параметры. Показано, что гибридная синхронизация мод приводит к существенному снижению негативного эффекта шума. Получены аналитические и численные оценки конусов синхронизации (языков Арнольда), находящиеся в хорошем согласовании с экспериментом, и изучены бифуркации, приводящие к рассинхронизации мод. Описано изменение формы импульса при применении гибридной синхронизации мод.

3.2. Исследование проблем синхронизации систем, включающих элементы с памятью и запаздыванием

Целью этого раздела является описание нового класса математических моделей, сердцем которых являются рассинхронизованные сети, состоящие из элементов с памятью. По нашему мнению этот класс математических моделей имеет значительный потенциал для адекватного описания различных процессов в экономике, биологии, технике и т.д. Мы начнем с простейшей макроэкономической ситуации.

Макроэкономика традиционно использует различные математические модели. Чтобы сделать эти модели работоспособными, макроэкономисты вводят упрощающие предположения, ограничиваются разумно малым количеством агрегированных показателей. Характерная черта современных подходов заключается в формулировании гипотез, описывающих динамику процессов на микроуровне, ведущих к пониманию динамики основных агрегированных характеристик на макроуровне.

Например, макроэкономические модели могут быть нацелены на лучшее понимание изменения таких характеристик как уровень безработицы, или уровень инфляции в зависимости от шоков, вызываемых значительными колебаниями экзогенных воздействий (цены на энергоносители, базовые процентные ставки и так далее).

Отметим, что в отличие от естественных наук, макроэкономические модели редко поддаются прямому экспериментальному тестированию. Математические модели в экономике во многих случаях являются скорее ментальными конструкциями, предлагающими качественные описания ключевых тенденций изменения тех или иных макроэкономических характеристик. Многие современные макроэкономические концепции были выдвинуты в 1870-х годах. При этом в рамках так называемой неоклассической революции, Edgeworth, Walras, Jevons и другие опирались на аналогии, заимствованные из математической физики, в основном из гидромеханики.

В дальнейшем экономисты сконструировали гидромеханические устройства MONIAC (Monetary National Income Automatic Computer) для определения равновесных рыночных цен и моделирования макроэкономических потоков (A.W. Philips [110]). Более 10 Машин Филлипса, или MONIAC-ов, было построено в мире различными организациями и тщательно откалиброваны для моделирования макроэкономических процессов в различных странах, см. рис. 2.

Неоклассические макроэкономические модели были переосмыслены и аксиоматизированы начиная с 1930х годов, однако основополагающие парадигмы остались без существенных изменений. Ключевым аспектом современных подходов является концепция репрезентативных

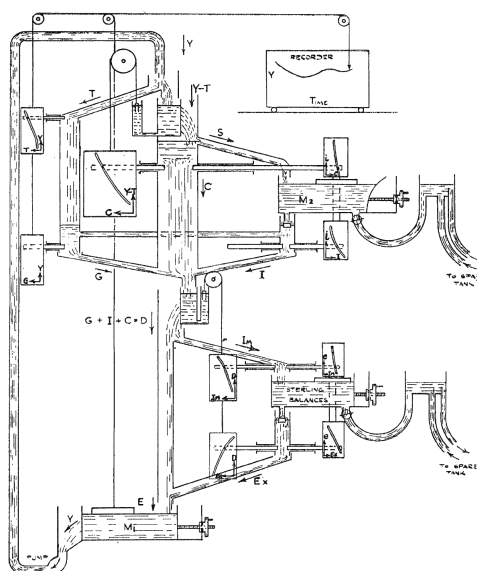


Рис. 2. Экономический Компьютер MONIAC.

агентов, реагирующих немедленно и обратимо на изменения экономической ситуации. В частности, решения таких экономических агентов могут быть немедленно и бесплатно отменены. Как правило ансамбль репрезентативных агентов не диверсифицирован, и их поведение в естественном смысле синхронизованно. Эта концепция находится в согласии с гидродинамической аналогией. Поведение репрезентативных агентов, принимающих решение, например, хранить ли сбережения в форме долларов, или в форме евро, моделируется системой двух соединенных резервуаров. Объем жидкости в каждом из резервуаров соответствует пропорции сбережений в форме долларов и евро соответственно. При этом относительный уровень жидкости определяется макроэкономическими характеристиками (в нашем случае, например, относительным размером базовой процентной ставки для каждой из валют), см. рис. 3.

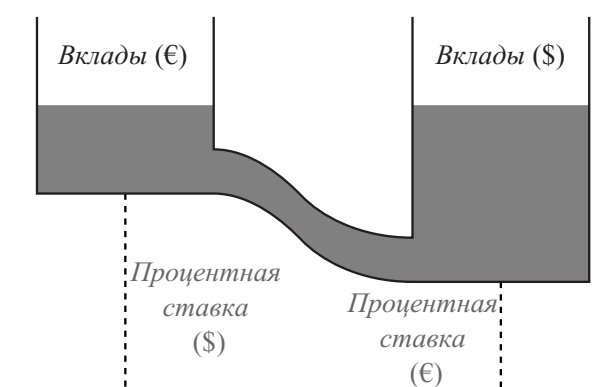


Рис. 3. Гидромеханическая модель агрегированного поведения репрезентативных инвесторов. Инвестируемые фонды плавно перетекают в форму валюты той страны, где выше базовая процентная ставка.

Простые соображения демонстрируют неадекватность стандартной концепции репрезентативных агентов. Проблема с описанными моделями заключается в предположении, что репрезентативные агенты реагируют на изменение макроэкономической ситуации

- синхронно,
- однотипно,
- без памяти (в частности, игнорируется память о предыдущих рецессиях и бумах).

В реальности все эти предположения не выполняются.

В следующем разделе мы прокомментируем роль памяти в весьма актуальном в настоящее время контексте понимания долговременных последствий экономических кризисов.

Проклятия рецессий и благословения бумов

Эмпирические данные подтверждают реальность проклятия рецессий. Например, V. Cerza & S.C. Saxena [43] проанализировали данные Всемирного Банка относительно 192 стран, чтобы выяснить приводит ли восстановление к тренду предшествующему рецессии. В работе [42] проанализировано восстановление экономик развивающихся стран после рецессии в 1980–2004 годах, и после Великой Депрессии в США в 1929–1932 годах. Принципиальное наблюдение заключается в том, что, хотя в обоих случаях в целом промышленное производство достигало предкризисных уровней в течение трех-четырёх лет, тренд развития стабилизировался на значительно более низком уровне по сравнению с предкризисными оценками. Одно из следствий этого наблюдения заключается в том, что страны подверженные частым послекризисным рецессиям (например, многие африканские страны), должны иметь более низкое равновесное значение роста их промышленности. В связи с тяжелым кризисом, охватившим многие страны в настоящее время, представляет интерес предложенная в работе [44] оценка предполагаемых долговременных последствий этого кризиса. В этой работе предсказано, что в ведущих странах через 10 лет после окончания кризиса тренд роста GDP стабилизируется на уровне на 15% ниже чем докризисный тренд. Литература, посвященная благословию бумов (boom blessings), рассматривает в основном долговременный позитивный эффект Американского бума 1990-х годов. Работа [41] посвящена вопросу положительной обратной связи между бумом биржи и ростом промышленного производства.

Модель памяти

Базовый пример. Рассмотрим нормализованный случай, в котором единица капитала необходима чтобы произвести единицу продукции. Каждая фирма (или, более реалистично, каждый операционный отдел) стоит перед выбором:

- использовать имеющиеся финансовые ресурсы для фактического производства продукции (активная стратегия),
- временно законсервировать финансовые ресурсы в форме банковского депозита (пассивная стратегия).

Таким образом, каждая фирма или операционный отдел может трактоваться как Элементарный Носитель Экономических Интересов (ЭНЭИ), который переключается между двумя типами поведения: активным и пассивным. Обозначим через $x(t)$ долю активных фирм/юнитов среди их общего числа в момент t . По определению, $0 \leq x \leq 1$.

Наша цель заключается в описании динамики $x(t)$ после некоторого начального момента $t_0 = 0$. Пусть, для определенности, $x(0) = 1$. В качестве управляющего (входного) воздействия мы рассматриваем ставку I , определяемую Центральным Банком. Иными словами, переменное управляющее воздействие задается как $I(t)$. Ниже мы различаем значение функции $I(\tau)$ в момент времени $\tau \geq 0$, и всю предысторию $I_\tau(\cdot)$, начиная от начального момента времени 0 вплоть до момента τ . Для данного $\tau > 0$ величина $I(\tau)$ — это число, в то время как $I_\tau(\cdot)$

это функция определенная на промежутке $0 \leq t \leq \tau$. Мы предполагаем, что значение $x(\tau)$ в некоторый момент $\tau > 0$ зависит не только от текущего значения $I(\tau)$, но от всей предыстории $I_\tau(\cdot)$. Иными словами, динамика изменения доли активных фирм описывается соотношением $\dot{x}(\tau) = I_\tau(\cdot)$. Отметим, что аналогичное уравнение без памяти, $\dot{x}(t) = F(I(t), x(t))$, в принципе не способно описать эффекты типа проклятия рецессий и благословения бумов, важность которых обсуждалась в предыдущем разделе.

Неидеальное реле как адиабатический предел математического описания памяти индивидуального экономического агента. Обозначим через $A(t)$ меняющийся во времени индикатор состояния рынка (входной информационный сигнал), руководствуясь значением которого фирмы принимают решение о переходе из пассивного в активное состояние и наоборот. Основным примером для нас служит ставка Центрального Банка $A(t) = I(t)$. Рассмотрим индивидуальную фирму ι . Как мы упомянули в предшествующем разделе, свойство фирмы быть в активном или пассивном состоянии включает существенный элемент памяти. Суть этой памяти заключается в том, что уровень $\alpha_{\text{SAFE}}(\iota)$ величины $A(t)$ при котором фирма активизируется, существенно превышает уровень $\alpha_{\text{RISKY}}(\iota)$ величины $A(t)$ при котором фирма переключается в пассивное состояние. Иными, словами, для значений $A(t) \geq \alpha_{\text{SAFE}}(\iota)$ единственным равновесным состоянием для фирмы ι является активное поведение, в то время как для значений $A(t) \leq \alpha_{\text{RISKY}}(\iota) < \alpha_{\text{SAFE}}(\iota)$ единственным равновесным состоянием для фирмы ι является пассивное поведение. Для значений $\alpha_{\text{RISKY}}(\iota) < A(t) < \alpha_{\text{SAFE}}(\iota)$ фирма может быть как в активном так и в пассивном состоянии. Наконец, мы предполагаем, что фирма не изменяет свое состояние пока управляющее воздействие изменяется между указанными порогами

$$\alpha_{\text{RISKY}}(\iota) < A(t) < \alpha_{\text{SAFE}}(\iota).$$

Это описание задает оператор $R_{\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}}$, определенный для данных пороговых значений $0 < \alpha < \beta < 1$. Этот оператор называется неидеальным реле. Переменный выход этого оператора

$$z(t) = R_{\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}} [t_0, \eta_0] y(t), \quad t \geq t_0,$$

зависит от переменного входа $y(t)$, $t \geq t_0$, в данном случае, переменного значения индикатора состояния рынка $A(t)$, и от начального состояния η_0 , которое равно нулю или единице. Неидеальное реле (называемое также гомеостатической нелинейностью) является важным элементарным в теории гистерезисных операторов, см. например [91].

Мы можем теперь сформулировать следующий принцип.

Утверждение 1. *В адиабатическом пределе зависимость динамики индивидуальной фирмы от входа $A(t)$ описывается неидеальным реле $R_{\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}}$.*

Нелинейность Прейсаха как адиабатический предел коллективной памяти.

Предположение 1. *Мы трактуем совокупность всех Элементарных Носителей Экономических Интересов, \mathcal{J} , как бесконечный ансамбль и предполагаем, что индивидуальные представители этого ансамбля функционируют независимо.*

Причина для замены очень большого конечного ансамбля на бесконечный чисто техническая: удобнее интегрировать непрерывные функции, чем суммировать длинные конечные выражения. Как мы предположили ранее, каждому индивидуальному элементу $\iota \in \mathcal{J}$ отвечают два пороговых значения $\alpha_{\text{RISKY}}(\iota)$ and $\alpha_{\text{SAFE}}(\iota)$, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq \alpha_{\text{RISKY}}(\iota) < \alpha_{\text{SAFE}}(\iota) \leq 1$. Предполагается, что для значений управляющего воздействия $A(t) \geq \alpha_{\text{SAFE}}(\iota)$ единственным равновесным поведением является активное, а для значений $A(t) \leq \alpha_{\text{RISKY}}(\iota)$ единственным равновесным поведением является пассивное. Для $\alpha_{\text{RISKY}}(\iota) < A(t) < \alpha_{\text{SAFE}}(\iota)$ agent ι может демонстрировать оба типа поведения в зависимости от предыстории.

Предположение 2. Пары пороговых значений $(\alpha_{\text{RISKY}}(\iota), \alpha_{\text{SAFE}}(\iota))$, $\iota \in \mathcal{J}$ распределены на ансамбле \mathcal{J} с некоторой плотностью $\mu(\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}})$.

Утверждение 2. Адиабатический предел соответствующего оператора W описывается уравнением

$$(PA)(t) = \int_0^1 \int_{\alpha_{\text{RISKY}}}^1 z(t, \alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) \mu(\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) d\alpha_{\text{RISKY}} d\alpha_{\text{SAFE}}, \quad (22)$$

$$z(t, \alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) = (R_{\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}} A)(t).$$

Этот оператор был первоначально предложен в контексте теории ферромагнетизма см. [101, 115].

Рассинхронизованная модель экономической динамики

Утверждение 2 применимо в ситуации, когда управляющее воздействие $A(t)$ меняется очень медленно. В этом случае агенты с (почти) одинаковыми пороговыми значениями реагируют на изменения входа (почти) синхронно. В реальности это далеко не так. Момент, когда конкретный ЭНЭИ среагирует на изменение входа и перейдет в новое равновесное состояние, в большей мере случаен и может существенно отличаться от момента достижения входом соответствующего порогового значения. Описание динамики такой рассинхронизованной системы представляет собой важную и непростую задачу. В этом разделе мы опишем один подход к этой задаче.

Равновесное значение управляющего воздействия. Равновесное значение управляющего воздействия (потенциала) определяется как гипотетическое значение входа обладающее следующим свойством. Если $A(t) = y$ для $t \geq \tau$, то доля активных фирм x не будет меняться в дальнейшем: $P_{\text{SAFE}}(t) \equiv P_{\text{SAFE}}(\tau)$, $t \geq \tau$. Разумеется этот гипотетический равновесный уровень в свою очередь зависит от всей предыстории рассматриваемой экономической динамики.

Предположение 3. В каждый данный момент времени существует единственный равновесное управляющее воздействие $y = y(\tau)$.

Предположение 4. Значение $P_{\text{SAFE}}(t)$ непрерывно дифференцируемо и его производная $\dot{P}_{\text{SAFE}}(t)$ в момент времени t пропорциональна разности между фактическим значением управляющего воздействия $A(t)$ и его равновесным значением $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = k(A(t) - y(t)). \quad (23)$$

Дифференциально-операторное уравнение (23) еще не является замкнутым описанием динамики рассинхронизованной системы с памятью. Чтобы завершить его, нам нужно еще описание зависимости между равновесным значением управления $y(t)$ и текущим фактическим значением доли активных фирм $x(t)$ на рынке.

Завершение описания динамики рассинхронизованной системы с памятью. Нам остается предложить описание зависимости между функциями $y(\cdot)$ и $P_{\text{SAFE}}(\cdot)$. Обозначим через Π совокупность всех допустимых пар. Кроме того, для заданного интервала $[0, \tau]$, обозначим через Π_τ подмножество совокупности Π состоящее из пар функций, определенных на этом интервале $0 \leq t \leq \tau$.

Предположение 5. Совокупность Π инвариантна к выбору масштаба времени, т.е. если пара

$$(P_{\text{SAFE}}(\cdot), y(\cdot)), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

принадлежит множеству Π_τ , то для каждого положительного γ пара $(P_{\text{SAFE}\gamma}(\cdot), y_\gamma(\cdot))$ определенная равенством

$$(P_{\text{SAFE}\gamma}(t), y_\gamma(t)) = (P_{\text{SAFE}}(\gamma t), y(\gamma t)), \quad 0 \leq t \leq \tau/\gamma$$

принадлежит множеству $\Pi_{\tau/\gamma}$.

Последняя аксиома означает, что шкалирование времени в отношении входа влечет то же самое шкалирование времени в отношении выхода.

Предположение 6. Для данной функции $y(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, существует единственная функция $P_{\text{SAFE}}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, удовлетворяющая включению $(P_{\text{SAFE}}(\cdot), y(\cdot)) \in \Pi$.

В математическом смысле последнее Предположение означает, что существует оператор G , который соотносит единственную функцию $P_{\text{SAFE}}(\cdot)$ ее “компаньону” в Π . Из Предположения 5 вытекает, что оператор G инвариантен по отношению к выбору масштаба времени. Таким образом, соотношение (23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k(A(t) - y(t)), \\ P_{\text{SAFE}}(\cdot) &= Gy(\cdot) \end{aligned}$$

Нам остается предложить форму оператора G . Для этого мы исследуем предельное поведение процессов в “медленном времени”. Для заданных функций $y(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, и $P_{\text{SAFE}}(\cdot) = Gy(\cdot)$, рассмотрим гипотетическую “медленную” функцию

$$y_\gamma(t) = y(\gamma t), \quad 0 \leq t \leq \tau/\gamma$$

для малых значений $\gamma \ll 1$. По Предположению 6 существует хорошо определенная функция

$$P_{\text{SAFE}\gamma} = Gy_\gamma.$$

Более того, по Предположению 5 эта функция удовлетворяет равенству

$$P_{\text{SAFE}\gamma}(t) = P_{\text{SAFE}}(\gamma t).$$

В частности существует вход $A_\gamma(t)$, такой что

$$\dot{x}_\gamma(t) = k(A_\gamma(t) - y_\gamma(t)), \quad (24)$$

$$x_\gamma(\cdot) = Gy_\gamma(\cdot). \quad (25)$$

Поскольку все процессы очень медленные, производная \dot{x}_γ очень мала. Таким образом, для достаточно малых γ должно выполняться соотношение

$$A_\gamma(t) \approx y_\gamma(t).$$

С другой стороны, функция $x_\gamma(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям

$$x_\gamma(\cdot) = PA_\gamma(\cdot) \approx GA_\gamma(\cdot), \quad (26)$$

поскольку $A_\gamma(t) \approx y_\gamma(t)$. Напомним, что мы нашли этот предел в предыдущем разделе (см. Предложение 2). Таким образом, верно следующее утверждение.

Утверждение 3. Оператор G совпадает с оператором (22).

Используя (25) и (26), мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} (Gy)(t) &= \int_0^1 \int_{\alpha_{\text{RISKY}}}^1 z(t, \alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) \mu(\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) d\alpha_{\text{RISKY}} d\alpha_{\text{SAFE}}, \\ z(t, \alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) &= (R_{\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}} y)(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, наша система уравнений может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k(A(t) - y(t)), \\ x(t) &= \int_0^1 \int_{\alpha_{\text{RISKY}}}^1 z(t, \alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) \mu(\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) d\alpha_{\text{RISKY}} d\alpha_{\text{SAFE}}, \\ z(t, \alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}) &= (R_{\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}}} y)(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Для выбранной плотности $\mu(\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}})$ это замкнутая система дифференциально-операторных уравнений. В численных экспериментах ниже мы используем так называемую клин-плотность.

Динамика рассинхронизованных систем, содержащих элементы с памятью

В этом разделе мы проиллюстрируем основные качественные особенности поведения введенного выше класса рассинхронизованных систем, включающих элементы с памятью. Мы сосредоточимся на уравнениях связанных с моделированием макроэкономических потоков.

Рассмотрим уравнение (28), переписанное в более компактном виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= k(I(t) - y(t)), \\ x(t) &= (P[\eta_0]y)(t) \end{aligned}$$

Это уравнение связывает поведение трех компонент макроэкономической динамики: $I(t)$ описывает входное или управляющее воздействие (ставка Центрального Банка); $y(t)$ соответствует равновесному значению потенциала; наконец $x(t)$, описывает агрегированный уровень активности экономических агентов. Функция $\eta_0 = \eta_0(\alpha_{\text{RISKY}}, \alpha_{\text{SAFE}})$ описывает состояние каждого агента в начальный момент времени.

Типичная траектория рассматриваемой системы изображена на рис. 4. Наиболее важные черты этой траектории следующие.

- Обе величины $x(t)$ и $y(t)$ меняют направление своего изменения в один и тот же момент времени. Иными словами, $y(t_0)$ является локальным экстремумом (точкой разворота) функции $y(t)$, если и только если $x(t_0)$ является локальным экстремумом функции $x(t)$.
- График функции $y(t)$ изменяет направление в те моменты времени, когда он пересекает график функции $I(t)$. Это наблюдение означает также, что точки разворота функций y и x запаздывают по отношению к точкам разворота функции I .
- Функция $y(t)$ теряет гладкость в точках разворота.
- Система имеет множественные состояния равновесия.

Отмеченная выше асимметрия поведения величины $y(t)$ представляет несомненный интерес, поскольку асимметричное поведение такого типа характерно, например, для динамики ряда важных макроэкономических индикаторов, см. рис. 5.

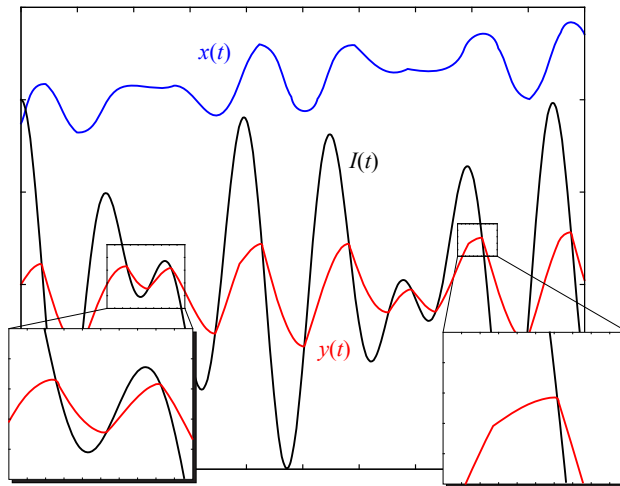


Рис. 4. Типичная траектория системы (28), описывающей динамику рассинхронизованной системы, содержащей нелинейные элементы с памятью.

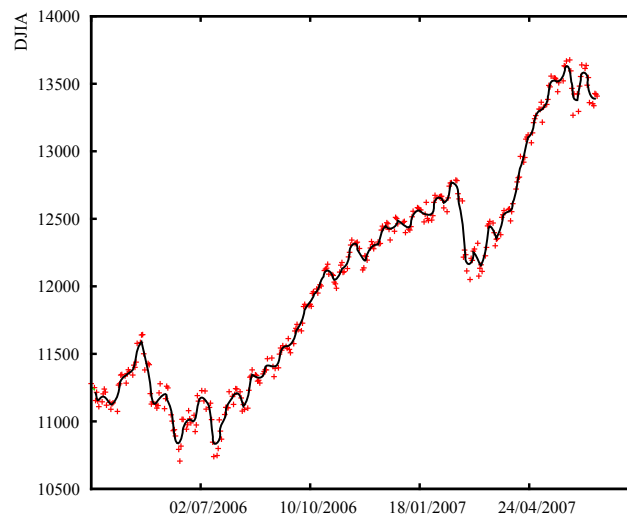


Рис. 5. Типичные данные для Dow Jones Industrial Average (DJIA). Точки разворота в июле 2006 года и в феврале 2007 года иллюстрируют асимметричное поведение, типичное для динамики рассинхронизованной системы, содержащей нелинейные элементы с памятью.

Периодические входы

Рассмотрим подробнее поведение системы (28) по отношению к периодическим входным воздействиям. Этот случай представляет особый интерес в контексте макроэкономической динамики, поскольку циклы различных периодов (от одного до примерно пятидесяти лет) хорошо известны в этой области.

Для данного периодического входа, $I(t+T) = I(t)$, соответствующие сигналы $x(t)$ и $y(t)$, становятся периодическими с тем же периодом после длительного переходного процесса.

Типичный переходный процесс показан на рис. 6. Видно, что траектория довольно быстро сходится к предельной замкнутой петле. Эта петля не зависит от начального состояния системы при $t = 0$, а целиком определяется входом $I(t)$.

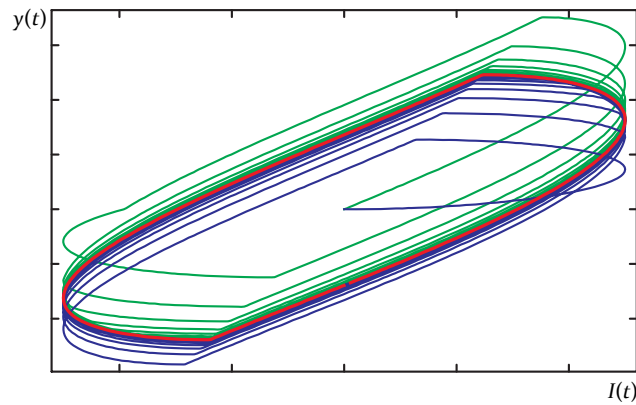


Рис. 6. Переходные процессы переменной $y(t)$ для простейшего периодического входа $I(t)$ и двух различных начальных состояний.

Зависимость предельных I - y петель от частоты периодического входного воздействия показано на рис. 7. Эти петли в первом приближении похожи на эллипсы, но демонстрируют некоторую “угловатость” в районе самой высокой и самой низкой точек. Очевидно, равновесный потенциал y более выражено реагирует на медленно меняющийся вход (красная петля на рисунке).

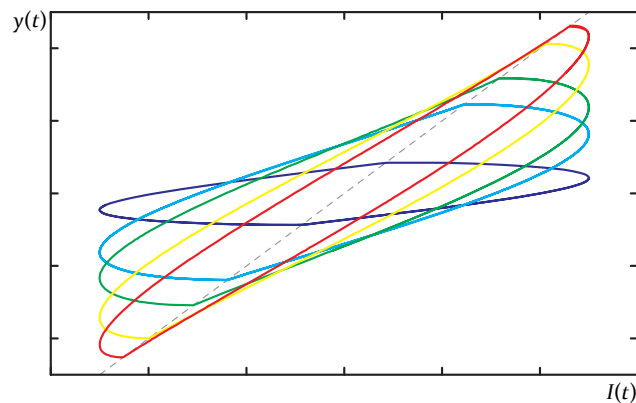


Рис. 7. Поведение пары $(y(t), I(t))$ для периодических входов различной частоты.

Переходный процесс для I - x петель показан на рис. 8. В этом случае разные начальные состояния могут приводить к разным предельным петлям. Эти петли имеют одинаковую форму, но сдвинуты относительно друг друга по вертикали.

Зависимость I - x петель от частоты входного воздействия показана на рис. 9.

Типичные петли демонстрирующие зависимость между величинами x и y показаны на рис. 10. Зависимость площади этих петель от частоты входа показана на рис. 11.

Как было указано выше, экономическая ситуация “не забывает” предшествующие периоды рецессий и бумов. В нашей модели это свойство отражено тем, что даже в отдаленном будущем выход $x(t)$ существенно зависит от начального состояния системы, в то время как равновесный потенциал быстро забывает предысторию, см. рис. 12.

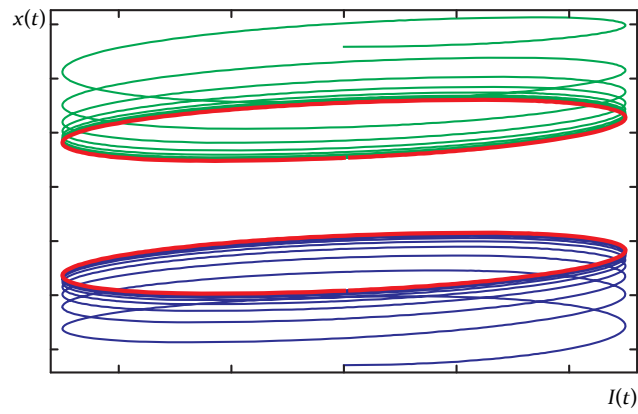


Рис. 8. Переходные процессы переменной $x(t)$ для простейшего периодического входа $I(t)$ и двух различных начальных состояний. Траектории сходятся к различным предельным петлям (красные замкнутые кривые).

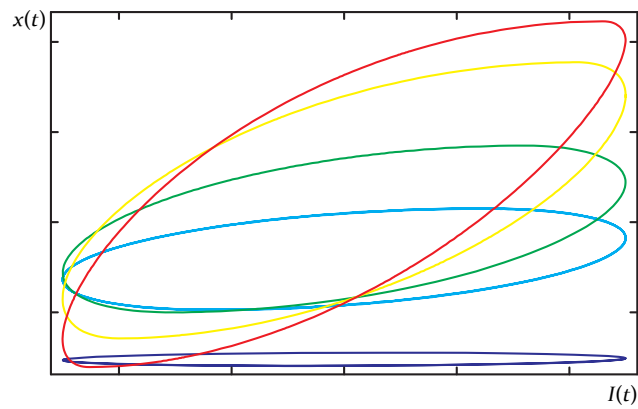


Рис. 9. Долговременная динамика выходного сигнала $x(t)$ для периодических входов различной частоты и для одного и того же начального состояния. График, соответствующий самой большой частоте, показан темно-синим цветом, а самой маленькой частоте — красным.

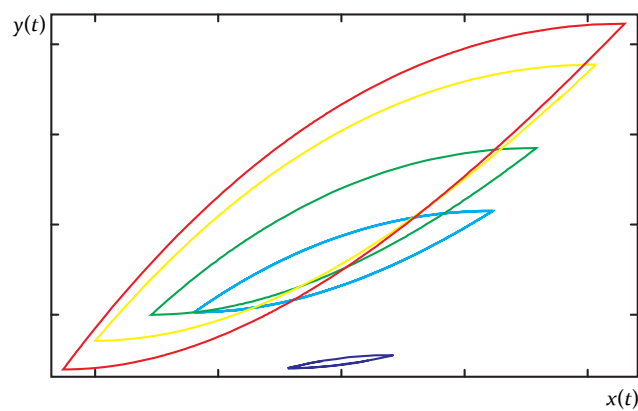


Рис. 10. Графики выходного сигнала $x(t)$ относительно равновесного потенциала $y(t)$ для различных частот входного сигнала.

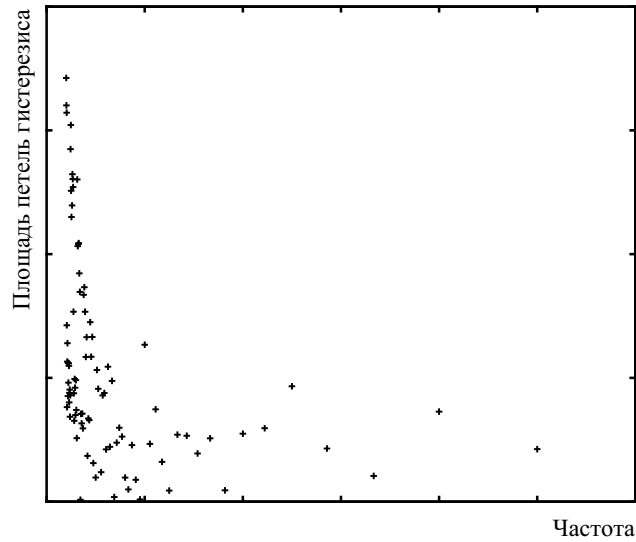


Рис. 11. Площади x - y петель нормированные на единицу времени, то есть $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dx(t)$.

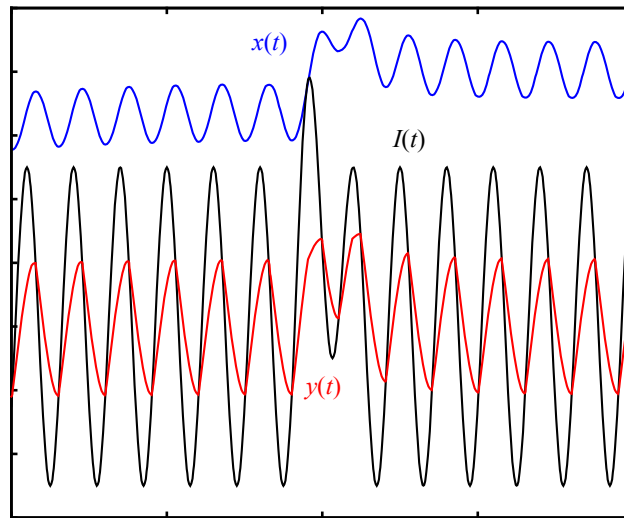


Рис. 12. Результат шоковых воздействий на систему. Вход $I(t)$ является периодическим, за исключением небольшого промежутка времени, где добавлено шоковое воздействие. Соответствующее значение равновесного потенциала $y(t)$ быстро возвращается к дошоковому уровню; в то же время выходная переменная $x(t)$ демонстрирует гетеростатическое поведение.

Заключение

Предложенная модель является моделью принципиально нового типа. Роль этой модели заключается в том, чтобы учесть эффекты памяти и рассинхронизации в описании макроэкономической динамики. Мы развили наш подход исходя из первых принципов. Для того чтобы применить этот подход к анализу конкретных экономических систем, предстоит еще большая работа. Ключевым и самым трудным этапом этой будущей работы явится, по-видимому, идентификация соответствующих плотностей в интеграле (27). Основные результаты по этой тематике были опубликованы в работах [48, 49, 67, 111].

3.3. Методы исследования колебаний, бифуркаций и синхронизации рассинхронизованных систем

Основным объектом исследования настоящего раздела являются системы, описанные в разделе 3.2. Речь идет о моделях сетей достаточно общего вида, в которых отдельные элементы моделируются простыми преобразователями, например неидеальными реле с двумя состояниями, динамика которых определяется как общим внешним входом, так и интегральной характеристикой состояний всех элементов системы, то есть интегральной глобальной обратной связью, синхронизирующей функционирование этих элементов.

В качестве прототипа подобных систем изучалось предложенное в разделе 3.2 уравнение

$$\frac{d(Py)}{dt} = f(t, y, u(t)), \quad (29)$$

в котором P — это оператор Преязаха (28). В этом уравнении $u(t)$ является внешним входом (как $A(t)$ или $I(t)$ в предыдущем разделе); $x(t) = (Py)(t)$ — это агрегированный выход компонент системы, моделируемых неидеальными реле; $y(t)$ — вход этих компонент; f — линейный или нелинейный преобразователь. Таким образом, уравнение (29) динамически связывает скорость изменения агрегированного выхода системы с ее текущим состоянием и текущим значением входа. Если f не зависит от y , то обратная связь в системе отсутствует.

Отметим, что оператор Преязаха делает систему негладкой. Состояние системы бесконечномерно, причем пространство состояний не обладает линейной структурой. В связи с этим при исследовании колебаний, устойчивости, бифуркаций и задач о синхронизации системы (29) необходима разработка новых методов, альтернативных классическим методам исследования гладких систем, основанным на теоремах о центральном многообразии, редукции размерности, полиномиальных разложениях нелинейностей, использовании интегральных многообразий и теории нормальных форм.

Отметим также, что уравнение (29) имеет ясную интерпретацию в контексте задач экономики и гидрологии (потоки в пористых средах). Подобные аналогии полезны при его анализе.

Устойчивость систем с отрицательными обратными связями

В качестве первого естественно возникающего класса систем (29) рассматривались системы, где все глобальные обратные связи отрицательны. Это означает, что функция f убывает по переменной y . Было показано, что такие системы обладают глобально устойчивой динамикой. В том числе изучались системы с периодическим внешним входом $u(t)$. Показано, что, если функция $f(t, y, u(t))$ отрицательна на всем периоде при достаточно больших y и положительна при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных y , то уравнение (29) имеет глобально асимптотически устойчивое периодическое решение. Отметим, что периодичность включает периодическую динамику состояний всех элементов системы [92]. Устойчивость систем (29) со стохастическими входами $u(t)$ изучена в [40].

Эффективные методы численного моделирования уравнения (29) с детерминированными или стохастическими входами основаны на использовании его регуляризации

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} + \frac{d(Py)}{dt} = f(t, y, u(t)),$$

сглаживающей производную решения y в точках ее разрыва. Такие точки возникают при каждом пересечении решением линий $f(t, y, u(t)) = 0$ на плоскости (t, y) . Сходимость решений регуляризованного уравнения к решениям уравнения (29) обоснована в [92].

Бифуркации в системах с положительной обратной связью

Положительные обратные связи могут дестабилизировать систему (29) и приводить к возникновению бифуркаций периодических режимов функционирования, неустойчивостям различного типа, сосуществованию нескольких устойчивых режимов и другим динамическим эффектам, см., например, рис. 13, 14. Анализ качественного поведения решений задачи Коши для таких систем, включая условия существования, единственности и нелокальной продолжимости решений, анализ поведения решений вблизи точек разрыва их производной, условия непрерывной зависимости решений от начальных данных (включающих начальное состояние всех компонент системы, то есть начальное состояние оператора Пре́йзаха) и локализацию зон чувствительности по отношению к возмущениям начальных данных и параметров, проведен в [93].

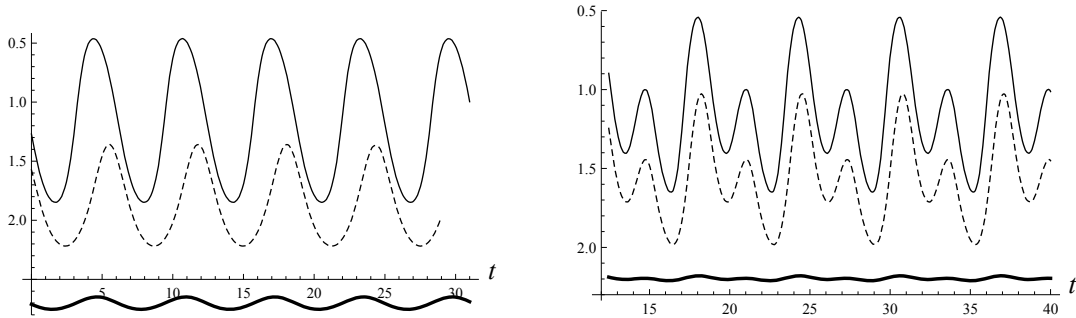


Рис. 13. Периодические решения уравнения (29) при наличии отрицательных обратных связей при двух различных входах $u(t)$. Верхнее и нижнее периодические решения, показанные сплошными линиями, на каждой панели устойчивы. Решение между ними, показанное пунктирной линией, неустойчиво. Система находится в зоне бистабильности.

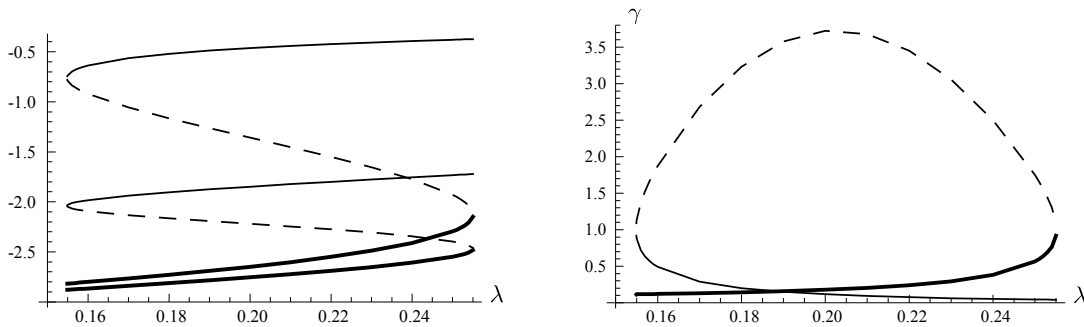


Рис. 14. Зависимость минимального и максимального значения периодических решений y уравнения (29) от параметра λ системы (слева). Точки, где S -образные линии делают разворот, соответствуют бифуркации седло-узла. Стиль линий соответствует рис. 13. Правая панель показывает зависимость характеристики γ периодических решений, определяющей их устойчивость, от параметра: решение устойчиво при $\gamma < 1$ и неустойчиво при $\gamma > 1$.

Был предложен локальный метод исследования устойчивости периодических режимов системы (29) по отношению к широкому классу возмущений начальных данных (включающих возмущение бесконечномерного начального состояния нелинейности Пре́йзаха), приводящий к простым критериям бифуркации периодического режима типа седло-узла, показанного на

рис. 14. Эти критерии полезны при численном построении решений методом продолжения по параметру и локализации точек бифуркации.

Точность численного решения уравнения (29) может быть повышена применением специальных численных процедур, основанных на асимптотических формулах для скачка производной решения в точках ее разрыва. Такие формулы выведены в [93].

Близкие к (29) системы с быстрой релаксацией состояний изучены в [114], где рассматривались сети бинарных компонент, взаимодействующие на трех различных шкалах времени. Самым быстрым предполагалось взаимодействие элемента сети с соседними элементами; такие локальные взаимодействия предполагались негативными (соседние элементы стремятся перейти в противоположные состояния). Выходно-выходная характеристика такой системы в целом при определенных предположениях может моделироваться сингулярной функцией фрактальной структуры типа Канторовской функции. Более медленным предполагалось глобальное взаимодействие типа среднего поля, моделировавшееся глобальной положительной обратной связью. Изменение входа системы характеризовалось третьей самой медленной временной шкалой, по сравнению с которой обмен информации в канале обратной связи происходит быстро с малой задержкой. Было показано, что положительная обратная связь приводит к эффекту дискретизации состояний системы. Получено количественное описание входно-выходного соотношения системы в целом, являющееся специальным классом дискретных операторов Преизаха.

Синхронизация систем и сетей с симметриями

В естественных ситуациях сети однотипных элементов обладают симметриями. Исследование бифуркаций и синхронизации таких систем требует применения специальных методов. В достаточно общей постановке речь идет о многокомпонентной системе, где каждая компонента является осциллятором. При этом система связанных осцилляторов симметрична (эквивариантна) по отношению к некоторой группе перестановок компонент.

Основное внимание уделим задаче о бифуркации Хопфа, то есть рождении циклов из положения равновесия при изменении параметров системы (не нарушающем ее симметрии). При сохранении эквивариантности эта задача, как правило, характеризуется наличием множества ветвей циклов, причем циклы, принадлежащие каждой ветви, инвариантны относительно определенной подгруппы полной группы симметрий. Например, если цикл инвариантен относительно полной группы симметрий, то все его компоненты идентичны, то есть все осцилляторы функционируют синхронно. Если цикл инвариантен относительно подгруппы симметрий, не совпадающей с полной группой, то часть осцилляторов функционирует синхронно, а остальные “бездействуют”.

Изучались системы, в которых каждый осциллятор содержит компоненту с памятью, моделируемую оператором Преизаха и, следовательно, негладкую. В связи с этим потребовалось найти альтернативу гладким методам анализа эквивариантных систем. Был разработан метод исследования бифуркации Хопфа, основанный на использовании топологической степени Баланова-Кравцевича, предложенной недавно и приспособленной для анализа симметрических систем [23, 24]. Таким образом, эти исследования тесно связаны с задачами, изучавшимися в разделе 3.2. Они также примыкают к исследованиям бифуркации Хопфа, проводившимся в разделе 3.1 для индивидуальных оптических осцилляторов (лазеров).

Предложенный метод позволяет определять точки бифуркации Хопфа, оценить число рождающихся ветвей циклов для каждой точки бифуркации и классифицировать ветви в соответствии с подгруппами симметрий, оставляющими инвариантными составляющие ветвь циклы. Он также обеспечивает частичную информацию, полезную при анализе устойчивости и асимп-

тотики циклов. Метод носит достаточно общий характер в задачах о бифуркации Хопфа для эквивариантных систем связанных осцилляторов, содержащих элементы с памятью.

Поясним полученные результаты на примере сети из восьми связанных идентичных осцилляторов Ван-дер-Поля, обладающей октагональной симметрией, в которой каждый осциллятор содержит элемент с памятью типа оператора Прейзаха. В этой реализации осциллятор Ван-дер-Поля с памятью типа нелинейности Прейзаха возникает, например, при введении ферромагнитного элемента в индуктивную компоненту каждого осциллятора вследствие возникающей гистерезисной зависимости между магнетизацией элемента и напряженностью приложенного магнитного поля.

Уравнения, описывающие динамику такой системы, выписываются стандартным образом; для электрической реализации используются законы Кирхгофа, которые дополняются операторными соотношениями между магнетизацией и напряженностью магнитного поля в индуктивностях в форме оператора Прейзаха. Показано, что подобная система имеет 4 точки бифуркации Хопфа из нулевого положения равновесия при изменении скалярного параметра (например, сопротивления проводов, соединяющих осцилляторы). В двух из этих точек бифуркации рождается по одной ветви циклов, обладающих полной группой симметрий. В каждой из оставшихся двух точек бифуркации рождается по 27 ветвей циклов, характеризующихся различными симметрическими свойствами, которые полностью описаны. Результаты частично основаны на недавних работах авторов, посвященных анализу бифуркации Хопфа и исследованию глобального поведения рождающейся (единственной) ветви циклов для индивидуального осциллятора Ван-дер-Поля, содержащего элемент памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: АН СССР, 1963. 450 с.
2. Асарин Е. А., Козьякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А. Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем. М.: Наука, 1992. 408 с.
3. Барабанов Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. I // *Автоматика и телемеханика*. 1988. № 2. С. 40–46.
4. Барабанов Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. II // *Автоматика и телемеханика*. 1988. № 3. С. 24–29.
5. Барабанов Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. III // *Автоматика и телемеханика*. 1988. № 5. С. 17–24.
6. Гельфанд И. М. Нормированные кольца // *Матем. сб.* 1941. Т. 9. С. 3–24.
7. Козьякин В. С. О наблюдаемости периодических режимов, возникающих при потере устойчивости положения равновесия импульсных систем // *Автоматика и телемеханика*. 1985. № 9. С. 42–48.
8. Козьякин В. С. Абсолютная устойчивость рассинхронизованных систем // *Доклады АН СССР*. 1990. Т. 312, № 5. С. 1066–1070.
9. Козьякин В. С. Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем // *Автоматика и телемеханика*. 1990. № 6. С. 41–47.
10. Козьякин В. С. Об абсолютной устойчивости систем с несинхронно работающими импульсными элементами // *Автоматика и телемеханика*. 1990. № 10. С. 56–63.
11. Козьякин В. С. Об анализе устойчивости рассинхронизованных систем методами символической динамики // *Доклады АН СССР*. 1990. Т. 311, № 3. С. 549–552.
12. Козьякин В. С. Об устойчивости фазочастотно рассинхронизованных систем при возмущении моментов переключения компонент // *Автоматика и телемеханика*. 1990. № 8. С. 35–42.

13. Козьякин В. С. О возмущении линейных рассинхронизованных систем // *Доклады АН СССР*. 1991. Т. 316, № 1. С. 54–57.
14. Козьякин В. С. Об устойчивости линейных рассинхронизованных систем с несимметрическими матрицами // *Автоматика и телемеханика*. 1991. № 7. С. 52–58.
15. Козьякин В. С. О неопределимости в ω -минимальных структурах конечных наборов матриц, бесконечные произведения которых сходятся, ограничены или неограниченны // *Автоматика и телемеханика*. 2003. № 9. С. 24–41.
16. Козьякин В. С. Экстремальные нормы, разрывные отображения окружности и контрпример к гипотезе Лагариаса–Ванга о конечности // *Информационные процессы*. 2005. Т. 5, № 4. С. 301–335.
17. Козьякин В. С. Структура экстремальных траекторий дискретных линейных систем и гипотеза Лагариаса–Ванга о конечности // *Информационные процессы*. 2006. Т. 6, № 4. С. 327–363.
18. Козьякин В. С. О вычислительных аспектах теории совместного спектрального радиуса // *Доклады АН*. 2009. Т. 427, № 2. С. 160–164.
19. Козьякин В. С., Покровский А. В. Роль свойств типа управляемости в изучении устойчивости рассинхронизованных динамических систем // *Доклады АН СССР*. 1992. Т. 324, № 1. С. 60–64.
20. Козьякин В. С., Покровский А. В. Квазиуправляемость и оценка амплитуд переходных процессов в дискретных системах // *Известия РАН, серия МММИУ*. 1997. Т. 1, № 3. С. 128–150.
21. Протасов В. Ю. Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов // *Фундамент. и прикл. матем.* 1996. Т. 2, № 1. С. 205–231.
22. Протасов В. Ю. Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1997. Т. 61, № 5. С. 99–136.
23. Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D. On the equivariant Hopf bifurcation in hysteretic networks of Van der Pol oscillators // *Journal of Physics: Conference Series*. 2011. To appear.
24. Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D., Zhezherun D. Hopf bifurcation in symmetric systems of coupled oscillators with Preisach memory // *Nonlinearity*. 2011. Submitted.
25. Bandelow U., Wenzel H., Wunsche H. Influence of inhomogeneous injection on sidemode suppression in strongly coupled DFB semiconductor lasers // *Electron. Lett.* 1992. no. 28. Pp. 1324–1326.
26. Barabanov N. Lyapunov Exponent and Joint Spectral Radius: Some Known and New Results // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005*, Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 2332–2337.
27. Barabanov N. E. Asymptotic behavior of extremal solutions and structure of extremal norms of linear differential inclusions of order three // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2357–2367.
28. Baudet G. M. Asynchronous iterative methods for multiprocessors // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1978. Vol. 25, no. 2. Pp. 226–244.
29. Bertsekas D. P., Tsitsiklis J. N. *Parallel and Distributed Computation. Numerical Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. 715 pp.
30. Blondel V. D., Nesterov Y. Computationally efficient approximations of the joint spectral radius // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2005. Vol. 27, no. 1. Pp. 256–272. math/0407485.
31. Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A. Switched Systems that are Periodically Stable May be Unstable // *Proc. of the Symposium MTNS*. Notre-Dame, USA: 2002.
32. Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A. An elementary counterexample to the finiteness conjecture // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2003. Vol. 24, no. 4. Pp. 963–970.
33. Blondel V. D., Tsitsiklis J. N. When is a pair of matrices mortal? // *Inform. Process. Lett.* 1997. Vol. 63, no. 5. Pp. 283–286.

34. *Blondel V. D., Tsitsiklis J. N.* The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable // *Systems Control Lett.* 2000. Vol. 41, no. 2. Pp. 135–140.
35. *Blondel V. D., Tsitsiklis J. N.* A survey of computational complexity results in systems and control // *Automatica J. IFAC.* 2000. Vol. 36, no. 9. Pp. 1249–1274.
36. *Bochi J.* Inequalities for numerical invariants of sets of matrices // *Linear Algebra Appl.* 2003. Vol. 368. Pp. 71–81. math/0206128.
37. *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic height optimization for topological IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // *J. Amer. Math. Soc.* 2002. Vol. 15, no. 1. Pp. 77–111.
38. *Brayton R. K., Tong C. H.* Stability of dynamical systems: a constructive approach // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1979. Vol. 26, no. 4. Pp. 224–234.
39. *Brayton R. K., Tong C. H.* Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1980. Vol. 27, no. 11. Pp. 1121–1130.
40. *Brokate M., McCarthy S., Pimenov A., Pokrovskii A.* Energy dissipation in hydrological systems due to hysteresis // *Environmental Modeling & Assessment.* 2010. To appear.
41. *Caballero R., Farhi E., Hammour M. L.* Speculative growth: Hints from the US economy // *American Economic Review.* 2006. Vol. 96. Pp. 1159–1192.
42. *Calvo G. A., Izquierdo A., Talvi E.* Hoenix miracles in emerging markets: recovering without credit from systemic financial crises, // *NBER Working Paper.* 2006. Vol. 12101.
43. *Cerra V., Saxena S. C.* Growth dynamics: the myth of economic recovery // *IMF Working Paper.* 2005. Vol. WP/05/147.
44. *Cerra V., Saxena S. C.* Growth Dynamics: The Myth of Economic Recovery // *American Economic Review.* 2008. Vol. 98.
45. *Chazan D., Miranker W.* Chaotic relaxation // *Linear Algebra Appl.* 1969. Vol. 2. Pp. 199–222.
46. *Chen Q., Zhou X.* Characterization of joint spectral radius via trace // *Linear Algebra Appl.* 2000. Vol. 315, no. 1-3. Pp. 175–188.
47. *Chu Y., Penty R. V., White I. H.* Measurement of the linewidth enhancement factor of quantum dot lasers using external light injection // *Conference on Lasers and Electro-Optics.* Tokyo. Pp. 390–401.
48. *Cross R., McNamara H., Kalachev L., Pokrovskii A.* Hysteresis in the fundamentals of macroeconomics // *Working Papers University of Strathclyde Business School.* 2010. Vol. 10-08.
49. *Cross R., McNamara H., Pokrovskii A.* Modelling macroeconomic flows related to large ensembles of elementary exchange operations // *Physica B: Condensed Matter.* 2008. Vol. 403. Pp. 451–455.
50. *Daubechies I., Lagarias J. C.* Two-scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions // *SIAM J. Math. Anal.* 1991. Vol. 22, no. 5. Pp. 1388–1410.
51. *Daubechies I., Lagarias J. C.* Sets of matrices all infinite products of which converge // *Linear Algebra Appl.* 1992. Vol. 161. Pp. 227–263.
52. *Daubechies I., Lagarias J. C.* Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // *SIAM J. Math. Anal.* 1992. Vol. 23, no. 4. Pp. 1031–1079.
53. *Daubechies I., Lagarias J. C.* Corrigendum/addendum to: “Sets of matrices all infinite products of which converge” // *Linear Algebra Appl.* 2001. Vol. 327, no. 1-3. Pp. 69–83.
54. *Elsner L.* The generalized spectral-radius theorem: an analytic-geometric proof // *Linear Algebra Appl.* 1995. Vol. 220. Pp. 151–159.
55. *Gomis-Bresco J., Dommers S., Temnov V. et al.* Ingaas dots coupled to a reservoir of nonequilibrium free carriers // *IEEE J. Quantum Electron.* 2009. no. 45. Pp. 1121–1128.
56. *Gripenberg G.* Computing the joint spectral radius // *Linear Algebra Appl.* 1996. Vol. 234. Pp. 43–60.

57. *Guglielmi N., Zennaro M.* On the asymptotic properties of a family of matrices // *Linear Algebra Appl.* 2001. Vol. 322, no. 1-3. Pp. 169–192.
58. *Guglielmi N., Zennaro M.* Polytope Norms and Related Algorithms for the Computation of the Joint Spectral Radius // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 3007–3012.
59. *Guglielmi N., Zennaro M.* An algorithm for finding extremal polytope norms of matrix families // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2265–2282.
60. *Habruseva T., O'Donoghue S., Rebrova N. et al.* Quantum-dot mode-locked lasers with dual mode optical injection // *IEEE Photonics Technology Letters.* 2010. Vol. 22. Pp. 359–361.
61. *Hare K. G., Morris I. D., Sidorov N., Theys J.* An explicit counterexample to the Lagarias-Wang finiteness conjecture. ArXiv.org e-Print archive. 2010. — Nov. 1006.2117.
62. *Huttl B., Kaiser R., Kindel C. et al.* Monolithic 40 GHz mqw mode-locked lasers on GaInAsP/InP with low pulse widths and controlled Q-switching // *Appl. Phys. Lett.* 2006. no. 88. P. 221104.
63. *Jiang L. A., Ippen E. P., Yokoyama H.* Semiconductor mode-locked lasers as pulse sources for high bit rate data transmission // *Ultrahigh-Speed Optical Transmission Technology.* Springer. Pp. 21–51.
64. *Jungers R.* The joint spectral radius. Berlin: Springer-Verlag, 2009. Vol. 385 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Pp. xiv+144. ISBN: 978-3-540-95979-3. Theory and applications.
65. *Jungers R. M., Blondel V. D.* On the finiteness property for rational matrices // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2283–2295.
66. *Jungers R. M., Protasov V., Blondel V. D.* Efficient algorithms for deciding the type of growth of products of integer matrices // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2296–2311.
67. *Kalachev L., Kelly T., O'Callaghan M. et al.* Analysis of threshold-type behaviour in mathematical models of the intrusion of a novel macroparasite in a host colony // *Mathematical Medicine & Biology.* 2010 (to appear). 400 pp.
68. *Kalman R. E., Bertram J.* A unified approach to the theory of sampling systems // *J. Franklin Inst.* 1959. Vol. 267. Pp. 405–436.
69. *Kaszakurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2000. xiv+267 pp. ISBN: 0-8176-4088-6.
70. *Kleptsyn A. F., Krasnosel'skiĭ M. A., Kuznetsov N. A., Kozjakin V. S.* Desynchronization of linear systems // *Math. Comput. Simulation.* 1984. Vol. 26, no. 5. Pp. 423–431.
71. *Kozyakin V.* A Dynamical Systems Construction of a Counterexample to the Finiteness Conjecture // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 2338–2343.
72. *Kozyakin V.* A Relaxation Scheme for Computation of the Joint Spectral Radius of Matrix Sets. ArXiv.org e-Print archive. 2008. — Oct. 0810.4230.
73. *Kozyakin V.* On accuracy of approximation of the spectral radius by the Gelfand formula // *Linear Algebra Appl.* 2009. Vol. 431, no. 11. Pp. 2134–2141. 0810.2856.
74. *Kozyakin V.* An explicit Lipschitz constant for the joint spectral radius // *Linear Algebra Appl.* 2010. Vol. 433, no. 1. Pp. 12–18. 0909.3170.
75. *Kozyakin V.* Iterative Building of Barabanov Norms and Computation of the Joint Spectral Radius for Matrix Sets // *DCDSB.* 2010. — Jul. Vol. 14, no. 1. Pp. 143–158. 0810.2154.
76. *Kozyakin V.* Max-Relaxation Iteration Procedure for Building of Barabanov Norms: Convergence and Examples. ArXiv.org e-Print archive. 2010. — Feb. 1002.3251.
77. *Kozyakin V.* On Explicit A Priori Estimates of the Joint Spectral Radius By the Generalized Gelfand Formula // *Differential Equations and Dynamical Systems.* 2010. Vol. 18, no. 1 & 2. Pp. 91–103. 0810.2157.

78. *Kozyakin V. S.* Sturmian Sequences Generated by Order Preserving Circle Maps: Preprint 11/2003. Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May.
79. *Kozyakin V. S.* Discontinuous Order Preserving Circle Maps Versus Circle Homeomorphisms: Preprint 12/2003. Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May.
80. *Kozyakin V. S.* Asynchronous Systems: A Short Survey and Problems: Preprint 13/2003. Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May.
81. *Kozyakin V. S.* Extremal Norms, Discontinuous Circle Maps and a Counterexample to the Finiteness Conjecture // *Information Processes*. 2005. Vol. 5, no. 4. Pp. 301–335. in Russian.
82. *Kozyakin V. S.* Structure of Extremal Trajectories of Discrete Linear Systems and the Finiteness Conjecture // *Automat. Remote Control*. 2007. Vol. 68, no. 1. Pp. 174–209.
83. *Kozyakin V. S.* On the computational aspects of the theory of joint spectral radius // *Dokl. Akad. Nauk*. 2009. Vol. 427, no. 2. Pp. 160–164. in Russian, translation in *Doklady Mathematics* 80 (2009), no. 1, 487–491.
84. *Kozyakin V. S., Kuznetsov N. A., Pokrovskii A. V.* Transients in Quasi-Controllable Systems. Overshooting, Stability and Instability // Preprints of the 12th World IFAC Congress, Sydney, Australia, 18–23 July, 1993. 1993. Pp. 465–468. 0909.4372.
85. *Kozyakin V. S., Kuznetsov N. A., Pokrovskii A. V.* Quasi-Controllability and Estimates of Amplitudes of Transient Regimes in Discrete Systems // Proceedings of CESA'98 IMACS-IEEE Multiconference, Hammamet, Tunisia, April 1–4, 1998 / Ed. by P. Borne, M. Ksouri, A. El Kamel. Vol. 1. CD-ROM ISBN 2-9512309-0-7, 1998. Pp. 266–271. 0909.4374.
86. *Kozyakin V. S., Pokrovskii A. V.* The role of controllability-type properties in the study of the stability of desynchronized dynamical systems // *Dokl. Akad. Nauk*. 1992. Vol. 324, no. 1. Pp. 60–64. in Russian, translation in *Soviet Phys. Dokl.* 37 (1992), no. 5, 213–215.
87. *Kozyakin V. S., Pokrovskii A. V.* Estimates of Amplitudes of Transient Regimes in Quasi-Controllable Discrete Systems: CADSEM Report 96-005. Geelong, Australia: Deakin University, 1996. 0908.4138.
88. *Kozyakin V. S., Pokrovskii A. V.* Quasi-Controllability and Estimation of the Amplitudes of Transient Regimes in Discrete Systems // *Izv., Ross. Akad. Estestv. Nauk, Mat. Mat. Model. Inform. Upr.* 1997. Vol. 1, no. 3. Pp. 128–150. in Russian.
89. *Kranc G. M.* Compensation of an error sampled system by a multirate controller. 2 // *AIEE Trans.* 1957. Vol. 76. Pp. 149–158.
90. *Kranc G. M.* Input-output analysis of multirate feedback systems // *IRE Trans. Automat. Contr.* 1957. Vol. 3. Pp. 21–28.
91. *Krasnosel'skii M. A., Pokrovskii A. V.* Systems with Hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1989. 400 pp.
92. *Krejci P., O'Kane P., Pokrovskii A., Rachinskii D.* Stability results for a soil model with singular hysteretic hydrology // *WIAS preprint*. 2008. Vol. 134. Pp. 1–26.
93. *Krejci P., O'Kane P., Pokrovskii A., Rachinskii D.* Mathematical models of hydrological systems with Preisach hysteresis // *Physica D*. 2010. Submitted.
94. *Kuntz M., Fiol G., Lammlin M. et al.* 35 GHz mode-locking of 1.3 nm quantum dot lasers // *Appl. Phys. Lett.* 2004. no. 85. P. 843.
95. *Lagarias J. C., Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices // *Linear Algebra Appl.* 1995. Vol. 214. Pp. 17–42.
96. *Maesumi M.* An efficient lower bound for the generalized spectral radius of a set of matrices // *Linear Algebra Appl.* 1996. Vol. 240. Pp. 1–7.

97. *Maesumi M.* Construction of Optimal Norms for Semi-Groups of Matrices // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 3013–3018.
98. *Maesumi M.* Optimal norms and the computation of joint spectral radius of matrices // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2324–2338.
99. *Markus A., Chen J., Gauthier-Lafaye O. et al.* Impact of intraband relaxation on the performance of a quantum-dot laser // *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* 2003. no. 9. Pp. 1308–1314.
100. *Markus A., Rossetti M., Calligari V. et al.* Two-state switching and dynamics in quantum dot two-section lasers // *J. Appl. Phys.* 2006. no. 100. P. 113104.
101. *Mayergoyz I. D.* Mathematical Models of Hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1991. 400 pp.
102. *Miellow J.-C.* Iterations chaotiques a retards // *C. R. Acad. sci. A.* 1974. Vol. 278. Pp. 957–960.
103. *Miellow J.-C.* Iterations chaotiques a retards // *Rev. automat. inform. et rech. operat.* 1975. Vol. 1, no. 9. Pp. 55–82.
104. *Miellow J.-C.* Iterations chaotiques a retards, etudes de la convergence dans le cas d'espaces partiellement ordonne // *C. R. Acad. sci. A.* 1975. Vol. 280. Pp. 233–236.
105. *Miellow J.-C., Comte P., Spiteri P.* La notion de H-accretivite, applications // *C. R. Acad. sci. A.* Vol. 283. Pp. 655–658.
106. *Morris I. D.* A rapidly-converging lower bound for the joint spectral radius via multiplicative ergodic theory. ArXiv.org e-Print archive. 2009. — Jun. 0906.0260.
107. *O'Brien D., Hegarty S., Huyet G., Uskov A.* Sensitivity of quantum-dot semiconductor lasers to optical feedback // *Opt. Lett.* 2004. no. 29. Pp. 1–3.
108. *Ostrowski A. M.* On the linear iterative procedures for symmetric matrices // *Rend. math. e appl.* 1954. Vol. 14, no. 1–2. Pp. 140–163.
109. *Parrilo P. A., Jadbabaie A.* Approximation of the joint spectral radius using sum of squares // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2385–2402. 0712.2887.
110. *Phillips A. W.* Mechanical models in economic dynamics // *Economica.* 1950. Vol. 17. Pp. 283–305.
111. *Pimenov A., Kelly T., Korobeinikov A. et al.* Systems with hysteresis in mathematical biology via a canonical example // *Clustering Algorithms and Mathematical Modeling.* New York: Nova Science Publishers, Inc., 2010.
112. *Plischke E., Wirth F.* Duality results for the joint spectral radius and transient behavior // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2368–2384.
113. *Plischke E., Wirth F., Barabanov N.* Duality Results for the Joint Spectral Radius and Transient Behavior // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 2344–2349.
114. *Pokrovskii A., Rachinskii D.* Effect of positive feedback on Devil's staircase input-output relationship // *Journal of Nonlinear Science.* 2010. Submitted.
115. *Preisach F.* Über die magnetische nachwirkung // *Zeitschrift für Physik.* 1935. Vol. 94. Pp. 277–302.
116. *Protasov V.* The Geometric Approach for Computing the Joint Spectral Radius // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 3001–3006.
117. *Protasov V.* Applications of the Joint Spectral Radius to Some Problems of Functional Analysis, Probability and Combinatorics // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 3025–3030.
118. *Protasov V. Y.* Extremal L_p -norms of linear operators and self-similar functions // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2339–2356.

119. Protasov V. Yu. A generalization of the joint spectral radius: The geometrical approach // *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* 1998. no. 13. Pp. 19–23.
120. Rafailov E., Cataluna M., Sibbett W. Mode-locked quantum-dot lasers // *Nature Photonics.* 2007. no. 1. Pp. 395–401.
121. Rafailov E. U., Cataluna M. A., Sibbett W. et al. High-power picosecond and femtosecond pulse generation from a two-section modelocked quantum-dot laser // *Appl. Phys. Lett.* 2005. no. 87. P. 081107.
122. Robert F. Block H-matrices et convergence des methodes iteratives classiques par blocks // *Linear Algebra Appl.* 1969. Vol. 2, no. 2. Pp. 223–265.
123. Robert F. Methodes iteratives serie parallele // *C. R. Acad. sci. A.* 1970. Vol. 271. Pp. 847–850.
124. Robert F. Contraction en norme vectorielle: convergence d'iterations chaotiques pour des equations non lineaires de point fixe a plusieurs variables // *Linear Algebra Appl.* 1976. Vol. 13. Pp. 19–35.
125. Robert F. Convergence locale d'iterations chaotiques lineaires // *C. R. Acad. sci. A.* 1977. Vol. 284. Pp. 679–682.
126. Robert F., Charnay M., Musy F. Iterations chaotiques serie parallele pour des equations nonlineaires de point fixe // *Aplikace Matematiky.* 1975. no. 20. Pp. 1–38.
127. Rota G.-C., Strang G. A note on the joint spectral radius // *Indag. Math.* 1960. Vol. 22. Pp. 379–381.
128. Rota G.-C., Strang W. G. A Note on the Joint Spectral Radius // *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A.* 1960. Vol. 63. Pp. 379–381.
129. Schechter S. Relaxation methods for convex problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1968. Vol. 5. Pp. 601–612.
130. Shi L., Chen Y. H., Xu B., Wang Z. C. Status and trends of short pulse generation using mode-locked lasers based on advanced quantum-dot active media // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2007. no. 40. Pp. R307–318.
131. Shih M.-H., Wu J.-W., Pang C.-T. Asymptotic stability and generalized Gelfand spectral radius formula // *Linear Algebra Appl.* 1997. Vol. 252. Pp. 61–70.
132. Sklansky J. Network compensation of error-sampled feedback systems: Ph. D. thesis. N.Y., 1955. 217 pp.
133. Theys J. Joint Spectral Radius: Theory and Approximations: Ph.D. thesis / Faculté des sciences appliquées, Département d'ingénierie mathématique, Center for Systems Engineering and Applied Mechanics. Université Catholique de Louvain, 2005. — May. 189 pp.
134. Thompson M. G., Rae A., Sellin R. L. et al. Subpicosecond high-power mode locking using flared waveguide monolithic quantum-dot lasers // *Appl. Phys. Lett.* 2006. no. 88. P. 133119.
135. V. M. Ustinov V., Zhukov A., Egorov A., Maleev N. Quantum Dot Lasers. Oxford University Press.
136. Viktorov E., Mandel P., Vladimirov A., Bandelow U. A model for mode-locking in quantum dot lasers // *Appl. Phys. Lett.* 2006. no. 88. P. 201102.
137. Vladimirov A., Bandelow U., Fiol G. et al. Bifurcations in a model of monolithic passively mode-locked semiconductor laser // *WIAS preprint.* 2010. Vol. 1517. Pp. 1–16.
138. Vladimirov A., Pimenov A., Rachinskii D. Numerical study of dynamical regimes in a monolithic passively mode-locked semiconductor laser // *IEEE Journal of Quantum Electronics.* 2009. Vol. 45. Pp. 462–468.
139. Vladimirov A., Turaev D. Model for passive mode-locking in semiconductor lasers // *Phys. Rev. A.* 2005. no. 72. P. 033808.
140. Vladimirov A., Turaev D., Kozyreff G. Delay differential equations for mode-locked semiconductor lasers // *Opt. Lett.* 2004. no. 29. Pp. 1221–1223.
141. Vladimirov A., Wolfrum M., Fiol G. et al. Locking characteristics of a 40GHz hybrid mode-locked monolithic quantum dot laser // *Proc. of SPIE 7720.* 2010. Pp. 77200Y–1–8.

142. *Wirth F.* On the calculation of time-varying stability radii // *Internat. J. Robust Nonlinear Control*. 1998. Vol. 8, no. 12. Pp. 1043–1058.
143. *Wirth F.* The generalized spectral radius and extremal norms // *Linear Algebra Appl.* 2002. Vol. 342. Pp. 17–40.
144. *Wirth F.* A Monotonicity Property of the Joint Spectral Radius. 2004.
145. *Wirth F.* The generalized spectral radius is strictly increasing // *Linear Algebra Appl.* 2005. Vol. 395. Pp. 141–153.
146. *Wirth F.* On the Structure of the Set of Extremal Norms of a Linear Inclusion // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 Seville, Spain, December 12–15. 2005. Pp. 3019–3024.