

Многокритериальное дерево Штейнера с стоимостью вершин Штейнера

Марк Ш. Левин*, Антон А. Замковой**

**Институт проблем передачи информации, Российская академия наук
Большой Каретный пер. 19, Москва 127994, Россия
email: mslevin@acm.org*

***Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный 141700, Россия,
email: anton.zamkovoy@gmail.com*

Поступила в редколлегию 15.03.2011

Аннотация—Исследуется многокритериальная задача построения дерева Штейнера с учетом стоимости дополнительных вершин Штейнера. Описаны постановки задач построения покрывающих деревьев Штейнера, алгоритмические подходы. Инженерная постановка задачи направлена на построение телекоммуникационной сети с учетом пространственного распределения радиотехнических помех. Предложен подход к решению сформулированной многокритериальной задачи на основе комбинации двух схем решения: (1) базовая схема для построения покрывающего дерева Штейнера на основе кластеризации вершин исходного графа, (2) общая схема для построения покрывающих деревьев Штейнера с учетом числа дополнительных вершин и выделения Парето-эффективных решений. Дополнительно используется модуль на основе модифицированного алгоритма Прима для построения многокритериального покрывающего дерева. Кластеризация вершин исходного графа основана на применении иерархического алгоритма. Приведены примеры численного эксперимента по построению многокритериальных деревьев Штейнера.

1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и управлении функционированием сетевых систем (проектирование топологий сетей, маршрутизация, коммуникационные протоколы на основе покрывающих деревьев и др.) широко используются задача построения деревьев, покрывающих вершины некоего исходного графа (или сети) ([1], [2], [7], [9], [14], [34], [39], [40], [44]). В качестве целевой функции обычно рассматривается минимизация суммы весов ребер покрывающего дерева. Задача построения покрывающего дерева Штейнера (с использованием дополнительных вершин) может позволить получить лучшие решения, чем в случае покрывающего дерева только на основе множества вершин исходного графа (сети). Эта задача является одной из интереснейших задач комбинаторной оптимизации и исследуется многие годы ([2], [4], [5], [7], [9], [11], [12], [14], [15], [17], [38], [40], [42], [44], [45], [47]). В последние годы стали исследовать многокритериальные варианты задачи дерева Штейнера ([24], [34], [45]).

В данной статье рассматривается версия задачи дерева Штейнера:

Построение многокритериального покрывающего дерева Штейнера с учетом стоимости дополнительных вершин Штейнера.

Эта задача рассматривается применительно к коммуникационной сети с учетом пространственного распределения радиотехнических помех. Для построения минимального покрывающего дерева существует ряд полиномиальных алгоритмов (например, [9], [38]). Уже при построении покрывающего дерева с учетом двух критериев задача становится NP-трудной.

Задача построения покрывающего дерева Штейнера является NP-трудной и в базовом однокритериальном случае [11] и не допускает применения полиномиальных аппроксимирующих алгоритмов PTAS (как это возможно, например, для задачи о рюкзаке или задачи блочного рюкзака ([9], [20])). Таким образом представляется целесообразным использование макроэвристик (т.е., приближенных составных схем решений, состоящих из быстрых приближенных алгоритмов). Следует отметить, что задачи покрывающих деревьев широко используются в сетевых системах, например: (а) проектирование топологий сетей (коммуникации, энергетика, Интернет), (б) организация тестирования сетевых систем, (в) маршрутизация, (г) коммуникационные протоколы на основе покрывающих деревьев. При этом в последних приложениях построение покрывающих деревьев осуществляется в реальном времени. Это требует применения быстрых (полиномиальных) алгоритмов.

Предложенный в данной работе подход к решению основан на общей комбинированной эвристической схеме решения (композиция полиномиальных алгоритмов): (1) построение приближенного покрывающего дерева Штейнера для исходного графа при двух заданных (фиксированных) алгоритмических параметрах: число кластеров сети (k), число дополнительных точек Штейнера (N); (2) построение "сетки" решений с учетом указанных двух алгоритмических параметров; (3) оценивание полученных решений и выделение Парето-эффективных решений. На локальном уровне схемы решения используются модификации известных алгоритмов: (а) модифицированный алгоритм Прима для построения многокритериального покрывающего дерева, (б) иерархическая кластеризация, (в) жадный (greedy) алгоритм для задачи блочного рюкзака, (г) выделение Парето-эффективных альтернатив.

Описанный в работе вычислительный эксперимент базируется на использовании исходных графов, построенных на основе генератора случайных чисел (число вершин исследуемых графов: 10 и 20). Исходные данные по пространственному распределению радиопомех получают аналогично. Вычислительные программы и программы визуализации решений реализованы в среде C^{++} .

2. БАЗОВЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ

Базовая постановка задачи построения минимального покрывающего дерева имеет следующий вид (например, [9]). Дан связный неориентированный граф $G(V, E)$ (V - множество вершин, E - множество ребер) с весами ребер, т.е., для каждого ребра $(u, v) \in E$ определена вещественная функция $w(u, v)$ (вес). Требуется найти такой связный ациклический подграф (покрывающее дерево) $T = (V, E')$ ($E' \subseteq E$), что суммарный вес ребер в T будет минимальным. Для этой задачи известны полиномиальные алгоритмы. В случае постановки задачи с двумя критериями (и более) задача является NP-трудной. В данной работе задача построения минимального покрывающего дерева используется как вспомогательная подзадача. Для ее решения применяется составная эвристическая полиномиальная схема с целью построения многокритериального покрывающего дерева (отображение векторной оценки ребра исходного графа на порядковую шкалу, применение модифицированного алгоритма Прима).

Базовая постановка задачи дерева Штейнера допускает использование дополнительных вершин (например, [2], [4], [7], [9], [12], [14], [15], [38], [42], [47]). Пусть дан неориентированный граф $G = (V, E)$, V - множество узлов/вершин, E - множество ребер, неотрицательные веса ассоциированы с ребрами. Дополнительно дано множество вершин (точки Штейнера) Q (это терминальные или обычные вершины). Задача заключается в следующем:

Найти подграф минимальной стоимости (т.е., по сумме весов ребер) $T_s = (Q, E') \subseteq G$ ($E' \subseteq E$) такой, что существует путь в подграфе T_s между всеми парами базовых вершин.

Здесь оптимальное решение T_s является деревом и называется деревом Штейнера. Задача построения покрывающего дерева Штейнера является NP-трудной [11]. Эта характеристика

сложности имеет место для практически всех вариантов задачи дерева Штейнера. Основные алгоритмические подходы для решения задачи построения дерева Штейнера включают следующие: (1) переборные схемы решения (enumerative algorithms) (например, [3], [14], [19], [22], [36], [45], [46]), (2) эвристики ([6], [7], [14], [44]), включая генетические алгоритмы (например, [17]), (3) композиции переборных схем и эвристик (например, [37]).

Специальная версия задачи дерева Штейнера на плоскости была рассмотрена в [24], [29], [34]). Дан неориентированный связный граф $G = (V, E)$, V - множество узлов/вершин, E - множество ребер, неотрицательные веса ассоциированы с ребрами. Строится дополнительное множество вершин Q (элементы множества Q строятся как точки Штейнера для соседних троек вершин (Рис. 1) из множества V). Очевидно, возникает соответствующее множество дополнительных ребер (с ассоциированными весами) $W = \{(q, v)\}, \forall q \in Q, \forall v \in V$. В процессе решения проводится отбор подмножества $Q' \subseteq Q$ и расширение исходного графа вершинами Q' и соответствующими ребрами $W' \subset W$. Таким образом получается расширенный исходный граф: $\hat{G} = (V \cup Q, E \cup W)$. Задача имеет вид (на основе отбора добавляемых вершин из множества Q'):

Найти подграф минимальной стоимости $\hat{S} = (V \cup Q', E' \subset (E \cup W')) \subseteq G'$ такой, что существует путь в подграфе \hat{S} между любыми парами вершин.

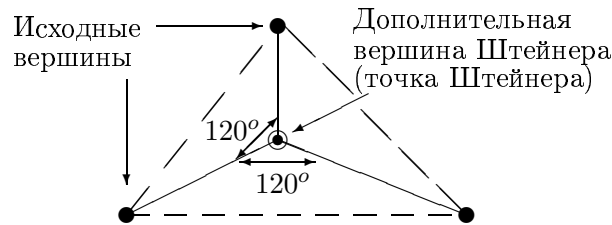


Fig. 1. Иллюстрация точек Штейнера

Здесь оптимальное решение \hat{S} представляет собой дерево (дерево Штейнера). При этом дополнительное множество вершин Q' рассматривается как дополнительный (ограниченный) ресурс (например, дополнительные вершины, сумма весов вершин).

Многокритериальная версия данной задачи дерева Штейнера применительно к коммуникационной сети исследовалась в [34] (4 оптимизируемых критерия качества получаемого дерева Штейнера). В данной работе аналогичная задача рассматривается с учетом 6-ти критериев, включая стоимость анализ радиотехнических помех, стоимость дополнительных вершин Штейнера. Для решения задачи предложена комбинированная схема (Рис. 2):

I. Построение многокритериального покрывающего дерева T_0 для исходного графа $G(V, E)$:

1.1. Оценка векторных весов ребер исходного графа в порядковой шкале (многокритериальное ранжирование).

1.2. Построение многокритериального покрывающего дерева на основе модифицированного алгоритма Прима T_0 .

II. Построение "сетки" решений в виде покрывающих деревьев Штейнера по узлам решетки параметров k (число кластеров) \times N (число точек Штейнера).

2.1. Получение k поддеревьев (кластеров) полученного покрывающего дерева на основе алгоритма иерархической кластеризации $(\{T_1, \dots, T_k\})$.

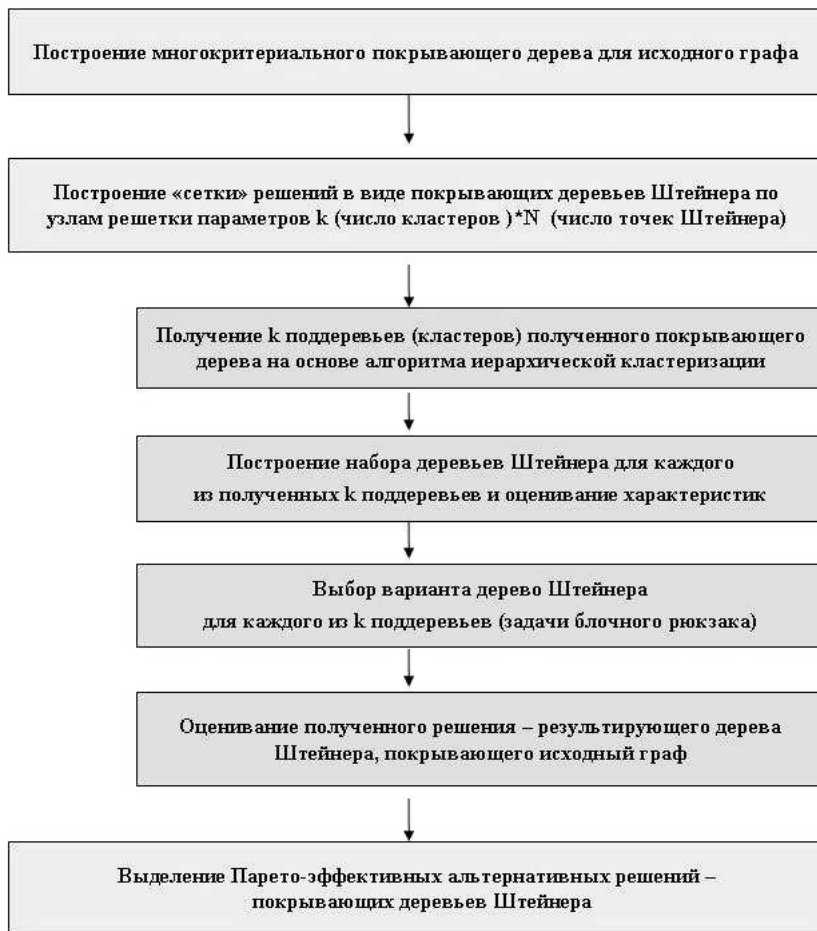


Рис. 2. Общая блок-схема решения

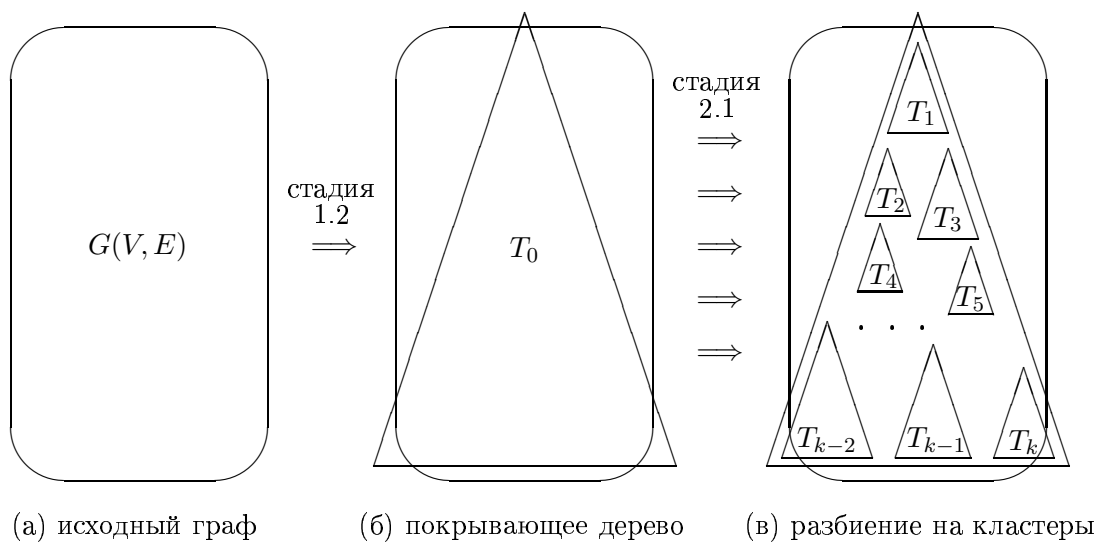


Рис. 3. Иллюстрация процесса решения

2.2. Построение набора деревьев Штейнера (включая вариант для поддерева в виде базового поддерева) для каждого из полученных k поддеревьев и оценивание характеристик.

2.3. Выбор вариантов покрывающих поддеревьев (т.е., покрывающее поддерево или дерево Штейнера для каждого из k поддеревьев-кластеров) на основе решения задачи блочного рюкзака (жадный алгоритм).

2.4. Оценивание полученного решения - результирующего дерева Штейнера, покрывающего исходный граф.

III. Выделение Парето-эффективных альтернативных решений на множестве построенных покрывающих деревьев Штейнера с учетом их многокритериальных оценок.

Рис. 3 иллюстрирует процесс решения. По сути дела, используется декомпозиционный подход [24]: (i) разбиение исходного графа на подграфы, (ii) построение локального решения для каждого подграфа, (iii) композиция глобального решения из полученных ранее локальных решений. Следует отметить, что каждому узлу сетки параметров (стадия II) может соответствовать (по решению многокритериальной задачи) множество Парето-оптимальных (т.е., несравнимых по Парето) решений (покрывающих деревьев Штейнера).

3. ИНЖЕНЕРНАЯ ПОСТАНОВКА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

На плоскости задано множество точек (*базовых* вершин) $U = \{1, \dots, i, \dots, n\}$. Используются следующие параметры точек: (x_i, y_i) - координаты на плоскости, r_i - спрос на услуги связи, агрегированный в данной точке, e_i - важность данной вершины, p_i - характеристика радиотехнических помех в данной точке.

Для соединения (т.е., ребра) $\Upsilon(i, j)$ между точками i и j определяются следующие параметры: $d_{i,j}$ - расстояние, используется обычная Эвклидова метрика $d_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$; $q_{i,j} = \max(e_i, e_j)$ - характеристики QoS; $p_{i,j} = (\int_{t \in \Upsilon_{i,j}} p(t) dt) / d_{i,j}$ - подверженность помехам; $l_{i,j} = r_i \times r_j$ - полезность соединения; $c_{i,j} = d_{i,j}^2 \times q_{i,j} \times p_{i,j}$ - стоимость линии.

В задаче Штейнера используются дополнительно N вершин Штейнера (каждая - на основе троек базовых вершин) с характеристиками (точка Штейнера обозначена ξ): (x_ξ, y_ξ) - координаты (по формуле Торричелли): $r_\xi = \max(r_1, r_2, r_3)$ - агрегированный спрос на услуги связи (где r_1, r_2, r_3 - спрос в базовых вершинах, составляющих соответствующий треугольник): $e_\xi = \max(e_1, e_2, e_3)$ (где e_1, e_2, e_3 - важность в базовых вершинах, составляющих соответствующий треугольник).

Получаемые деревья Штейнера ($\{S\}$) оцениваются по следующим интегрированным характеристикам (критериям): $D(S) = \sum_{(i,j) \in S} d_{i,j}$ - общая протяжённость (min); $Q(S) = (\sum_{(i,j) \in S} q_{i,j})/m$ - усреднённая характеристика QoS (max), где m - число соединений; $P(S) = (\sum_{(i,j) \in S} p_{i,j})/m$ - среднее значение подверженности помехам линий связи (min); $L(S) = (\sum_{(i,j) \in S} l_{i,j})/m$ - усреднённая полезность соединения (max); $C(S) = \sum_{(i,j) \in S} c_{i,j}$ - общая стоимость (min).

Таким образом приведены пять критериев для построения многокритериального дерева Штейнера. В качестве дополнительного критерия можно использовать сумму весов использованных дополнительных вершин Штейнера (указанные веса могут рассматриваться как векторные) или просто число дополнительных вершин (в работе рассматривается простейший случай с дополнительным критерием в виде числа вершин Штейнера $N(S)$ (min)). Данный критерий соответствует дополнительным затратам на создание (обустройство) узла связи. Очевидно, что могут использоваться более сложные подходы для определения интегрированных характеристик решений.

4. МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ

4.1. Схема решения

Общий подход к решению задачи соответствует Рис. 2. Базовая схема (алгоритм A_1 включает следующие этапы:

Этап 1. Построение многокритериального покрывающего дерева, используя модифицированный алгоритм Прима.

Этап 2. Кластеризация исходных данных, используя аггломеративный алгоритм (agglomerative algorithm A_2) для декомпозиции задачи (получаем множество подсетей - поддеревьев небольшой размерности).

Этап 3. (Для каждого кластера) Построение множества троек вершин, т.е., возможных фрагментов сети для добавления точек Штейнера

Этап 4. На основе оценок множества фрагментов сети, решение задачи о рюкзаке (на основе жадного алгоритма - алгоритм A_3) с выделением подмножества фрагментов сети для включения точек Штейнера.

Этап 5. Анализ решения.

Общая схема решения (алгоритм A_0) включает пять стадий:

Стадия 1. Задание числа кластеров $k = 1, \dots, 15$ и числа N имеющихся точек Штейнера (множество дополнительного телекоммуникационного оборудования)

Стадия 2. Построение дерева Штейнера для всех пар конкретных значений k и N (алгоритм A_1). Получается множество решений - деревьев Штейнера ($\{S\}$).

Стадия 3. Оценка элементов множества $\{S\}$ по пяти основным критериям (базовым требованиям, предъявляемым к телекоммуникационной сети: стоимость, параметры QoS, подверженность помехам и т.д.) и числу дополнительных точек Штейнера N (или их суммарному "весу") и выделение Парето-эффективных решений - итоговых решений (алгоритм A_4).

Стадия 4. Анализ Парето-эффективных решений.

4.2. Вспомогательные алгоритмы

Предложенная схема решения задачи основана на ряде известных подзадач, для которых имеется много алгоритмов решения. Рассмотрим некоторые подзадачи.

При анализе соединений (построение покрывающего дерева), при анализе деревьев Штейнера, построенных для частей исходного графа, используется многокритериальное ранжирование. В качестве подходов к многокритериальному ранжированию можно использовать различные методы, например: (1) методы на основе функций полезности ([8], [18]), (2) интерактивные методы [23], (3) на основе последовательного выделения Парето-эффективных альтернатив, (4) методы порогов несравнимости ([32], [43]). Указанные методы имеют полиномиальную сложность. В вычислительных экспериментах был использован вариант метода на основе функции полезности.

В случае однокритериальной задачи построения покрывающего дерева, алгоритм Прима получает на вход полный граф и корень, из которого путём добавления "минимальных" ("безопасных") соединений выстраивается остов. При этом "безопасным" называют соединение (ребро) между вершиной остова и вершиной не входящей в остов. Для случая многокритериальной постановки задачи используется модифицированный алгоритм Прима (Рис. 4):

Шаг 1. Все соединения сортируются по вектору оценок (многокритериальное ранжирование, при равенстве векторов оценок выбирается любое соединение).

Шаг 2. Формируется множество безопасных соединений.

Шаг 3. Выбирается наиболее эффективное соединение из множества "безопасных" соединений и, добавляется к остову (если соединены не все вершины, то переход к **шагу 2**).

Шаг 4. Построенный остов является искомым деревом.

Указанный алгоритм является эвристический и имеет полиномиальную сложность.

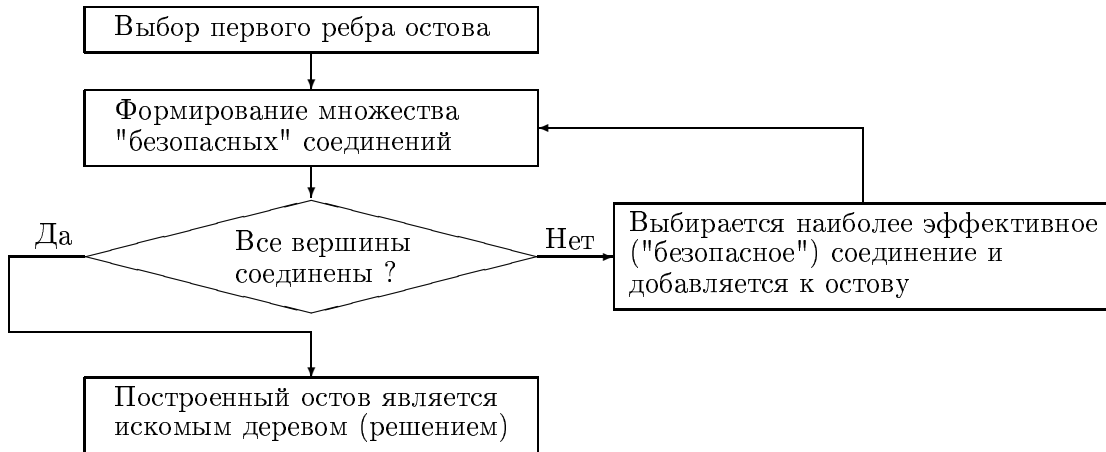


Рис. 4. Модифицированный алгоритм Прима

В данной работе общее дерево Штейнера строится на основе предварительной кластеризации покрывающего дерева (число кластеров k), полученного на основе модифицированного алгоритма Прима. Для кластеризации покрывающего дерева могут использоваться различные алгоритмы, в работе использовалась иерархическая кластеризация ([16], [27]). Следует отметить, что задача разбиения графа на подграфы является давно известной для нее разработано много известных, которые также могут использоваться (например, [10], [13], [21], [41]). Для каждого полученного кластера (поддерева) осуществляется построение вариантов дерева (поддерева) Штейнера при различном значении дополнительных вершин Штейнера ($N' = 1, 2, 3, \dots$).

Вспомогательный алгоритм построения дерева Штейнера в каждом поддереве (Этап 3 алгоритма A_1) имеет вид:

Шаг 1. Построение многокритериального покрывающего дерева в каждом кластере.

Шаг 2. Каждая вершина кластера рассматривается как начальная; исследуются все возможные треугольники (т.е., тройки вершин), сторонами которых являются ребра построенного на кластере дерева.

Построение вариантов дерева Штейнера при фиксированном k для заданного числа вершин Штейнера N (этап 4 алгоритма A_1) представляет собой многократные обращения к этапу 3 того же алгоритма:

Шаг 1. Построение минимального покрывающего дерева в каждом кластере.

Шаг 2. Формирование множества треугольников, которые могут рассматриваться для включения дополнительной вершины Штейнера. (этап 3 алгоритма A_1 , описан выше).

Шаг 3. Выбор "треугольника" изменение исходного покрывающего дерева в кластере: добавление точки Штейнера и соединений с ней.

Шаг 4. Если точки Штейнера использованы, работа завершается, иначе переход к шагу 2.

Общее дерево Штейнера формируется на основе решения многокритериальной задачи блочного рюкзака для фиксированного k и при общем ограничении на общее число вершин Штейнера $N = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ (Рис. 5).

Используются 5 критериев: $\{ \min D(S), \max Q(S), \min P(S), \max L(S), \min C(S) \}$. Многокритериальная задача блочного рюкзака и эвристический подход к ее решению исследованы в [33]. Постановка задачи имеет вид ([29], [33]) (α - номер кластера, β - номер варианта локального дерева Штейнера для соответствующего кластера):

$$\min D(S), \max Q(S), \min P(S), \max L(S), \min C(S)$$

$$s.t. \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^{q_{\alpha}} a_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta} \leq b, \sum_{j=\beta}^{q_{\alpha}} x_{\alpha,\beta} = 1, \alpha = \overline{1, k}, x_{\alpha,\beta} \in \{0, 1\}.$$

В данной работе была использована упрощенная полиномиальная эвристика на основе ранжирования (использована свертка оценок по критериям).

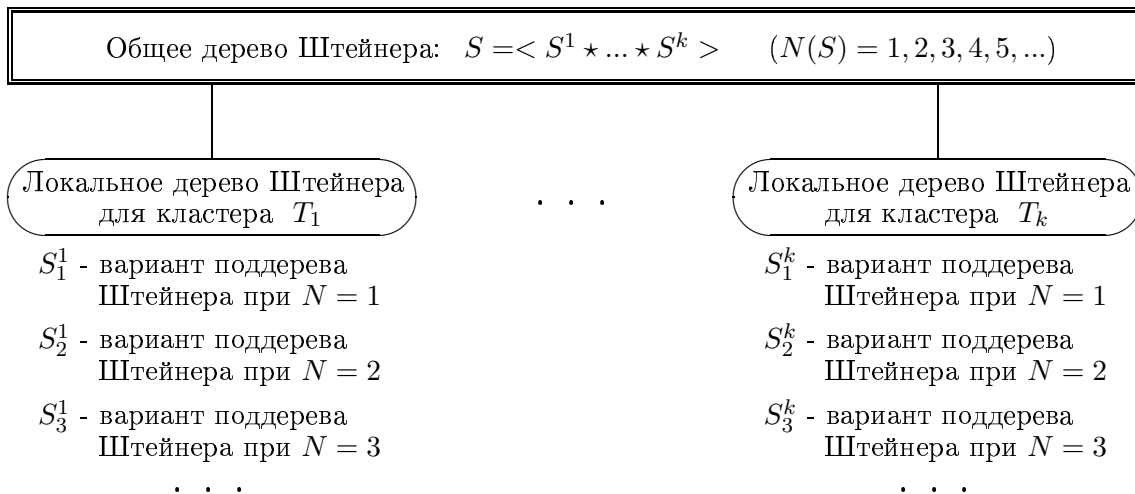


Рис. 5. Иллюстрация построения дерева Штейнера

Отбор Парето-эффективных альтернатив является обычной вычислительной процедурой, основанной на сравнении многокритериальных оценок альтернатив:

- (i) применение правила Парето (для выявления типа отношения: предпочтение/доминирование или несравнимость),
- (ii) выделение недоминируемых альтернатив.

В рассматриваемом случае исходное множество альтернатив представляет собой множество решений - построенных деревьев Штейнера.

Каждое из указанных решений (или набор несравнимых решений) соответствует узлу решетки на основе двух алгоритмических параметров: число кластеров k и число точек Штейнера N . Процесс выполнения алгоритма A_4 проиллюстрирован на Рис 6.

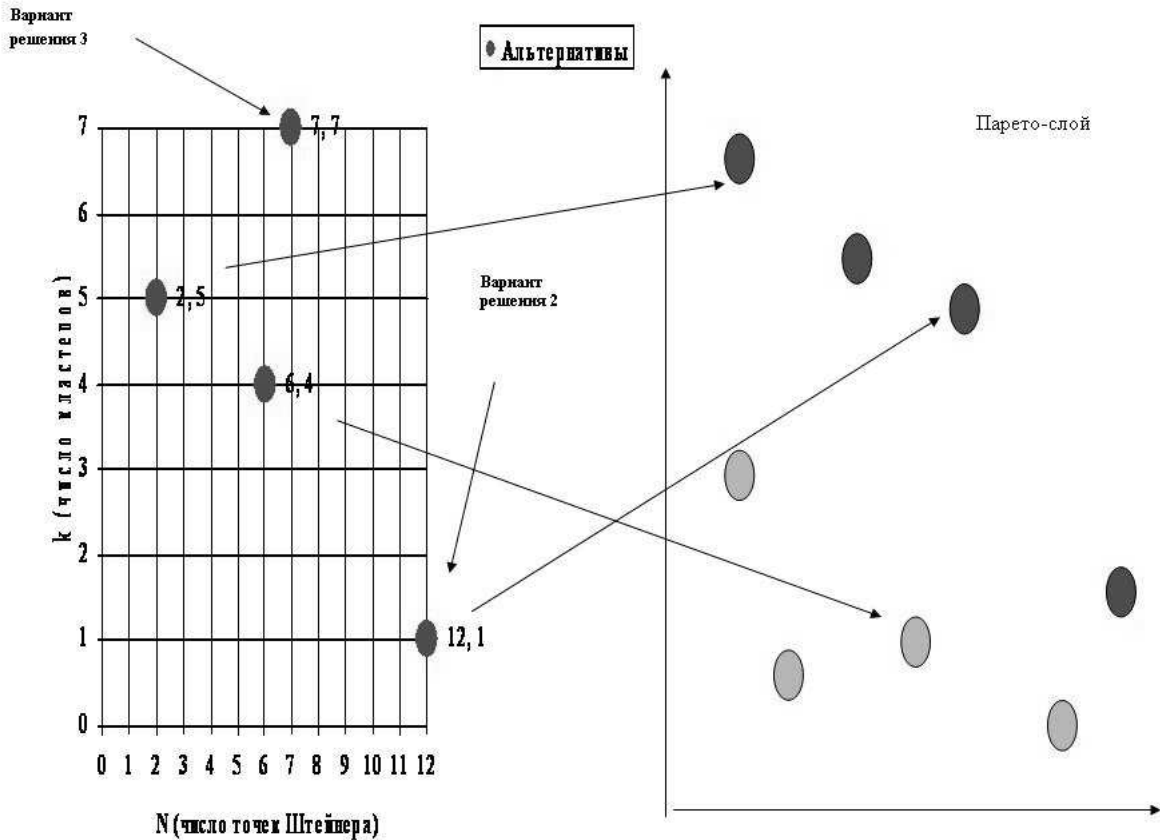


Рис. 6. Иллюстрация отбора Парето-эффективных решений

5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

5.1. Упрощенный пример для графа с 10 вершинами (без помех)

Исходные данные этого примера (таблица 1) отличаются от двух предыдущих, так как содержат в себе значения агрегированного в базовых вершинах спроса и важности вершины среди других:

Таблица 1. Базовые вершины: координаты, характеристики

Номер i	x_i	y_i	Спрос r_i	QoS q_i
1	149.6108	137.457	2	3
2	92.6785	420.0128	1	4
3	711.4572	401.7639	2	2
4	677.5481	203.9847	2	3
5	294.64	390.0669	4	1
6	385.5054	325.8236	3	3
7	621.2722	58.79285	1	4
8	53.87545	339.8291	2	4
9	233.253	38.44019	3	3
10	368.8332	148.098	2	1

Многокритериальное покрывающее дерево (таблица 2, решение \tilde{T}) будет отличаться от однокритериального дерева (решение \hat{T}), ввиду роли других параметров связей, таких как важность, QoS и стоимость. Это можно проследить на Рис. 5: так, например, соединив вершины 2 и 5 и убрав соединение между 2 и 6, мы получили бы дерево с меньшей суммарной длиной.

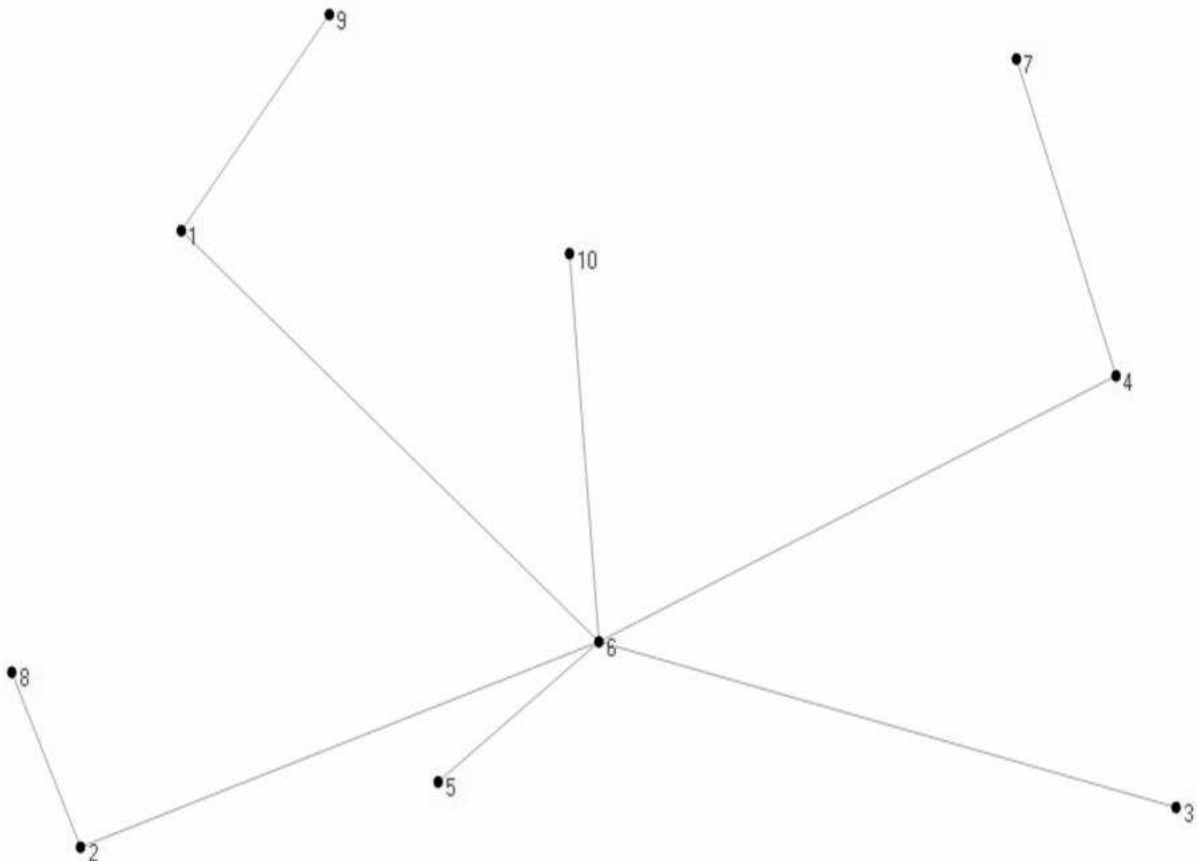


Рис. 7. Многокритериальное покрывающее дерево (10 вершин, без помех)

Таблица 2. Многокритериальное покрывающее дерево: характеристики

Начало i	Конец j	Полезность $l_{i,j}$	QoS $q_{i,j}$	Расстояние $d_{i,j}$	Помехи $p_{i,j}$	Стоимость $c_{i,j}$
6	1	6	9	301.8745428	1.0	823997.4394
9	1	6	9	129.6161694	1.0	152704.5386
6	4	6	9	316.4390032	1.0	904156.9759
7	4	2	12	155.7165619	1.0	292591.3531
6	2	3	12	307.6023594	1.0	1139979.087
6	3	6	6	334.6811735	1.0	672168.3537
8	2	1	16	89.07916813	1.0	128254.1279
6	5	12	3	111.2821953	1.0	37615.06975
10	6	6	3	178.5937682	1.0	96325.50057

Таблице 2 (многокритериальное покрывающее дерево \tilde{T}) соответствуют следующие интегрированные характеристики: $L(\tilde{T}) = 5.444$, $Q(\tilde{T}) = 8.788$, $D(\tilde{T}) = 1924.88494198035$, $P(\tilde{T}) = 1.0$, $C(\tilde{T}) = 4247792.44614501$.

Теперь рассмотрим многокритериальное дерево Штейнера (таблица 3) с числом кластеров $k = 1$ и числом точек Штейнера $N = 6$ (решение \tilde{S}). Соответствующее дерево Штейнера \tilde{S} представлено на Рис. 8.

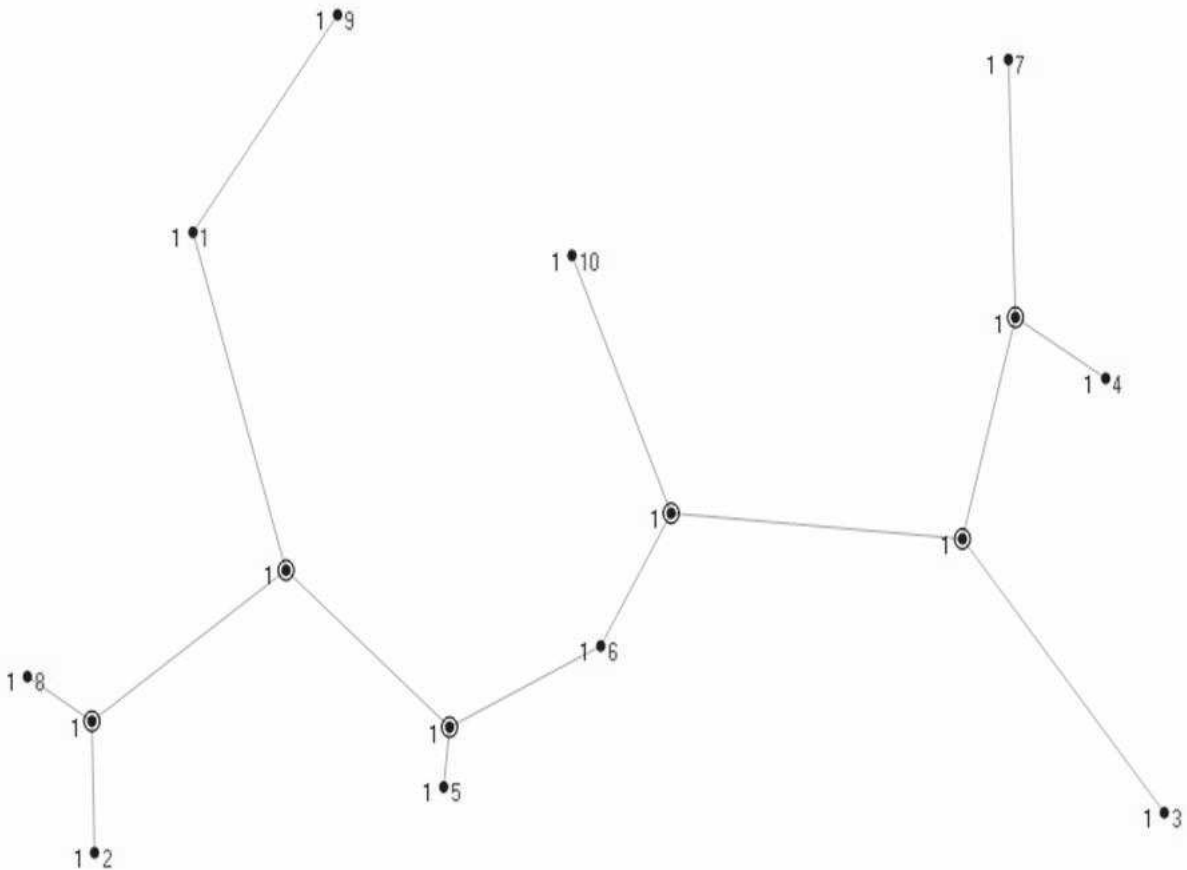


Рис. 8. Многокритериальное дерево Штейнера (10 вершин, без помех)

Таблица 3. Характеристики многокритериального дерева Штейнера

Начало i	Конец j	Полезность $l_{i,j}$	QoS $q_{i,j}$	Расстояние $d_{i,j}$	Помехи $p_{i,j}$	Стоимость $c_{i,j}$
9	1	6	9	129.6161694	1.0	152704.5386
1	14	6	12	163.0318711	1.0	321251.985
5	40	16	4	27.45500019	1.0	3098.560371
6	40	12	12	94.98493812	1.0	110142.663
14	40	12	16	118.5543223	1.0	228241.7899
4	58	6	12	59.18706182	1.0	43450.75323
7	58	3	16	117.4449554	1.0	221866.8952
3	62	6	8	170.8336423	1.0	235915.539
58	62	9	16	105.4428359	1.0	179830.7019
10	72	6	4	130.6612894	1.0	68640.34682
6	72	9	12	72.84118546	1.0	65338.27127
62	72	9	16	168.8958228	1.0	460495.6625
8	76	6	16	42.41361785	1.0	29351.34992
2	76	3	16	59.9468229	1.0	58527.39812
14	76	9	16	131.663745	1.0	279104.0709

Таблице 3 (решение \tilde{S}) соответствуют следующие интегрированные характеристики: $L(\tilde{S}) = 7.867$, $Q(\tilde{S}) = 12.33$, $D(\tilde{S}) = 1592.97327997166$, $P(\tilde{S}) = 1.0$, $C(\tilde{S}) = 2457960.52575807$.

5.2. Пример для графа с 20 вершинами (с помехами)

В данном примере приведены результаты вычислений для трех случаев:

1. Многокритериальное покрывающее дерево (решение: T_0);
2. Многокритериальное дерево Штейнера при $k = 1$, $N = 12$ (решение: S_1);
3. Многокритериальное дерево Штейнера при $k = 1$, $N = 12$ (решение: S_2).

Вычислительные эксперименты проводились на оборудовании со следующими характеристиками: (а) процессор IntelR CoreT 2 Duo T7100 @ 1800GHz, (б) оперативная память: 1024 Мб 789МHz. Время каждого расчета не превышало секунды. (использовались полиномиальные алгоритмы). Расположение точек (таблица 4) и распределение помех представлены на Рис. 9.

Многокритериальное покрывающее дерево (таблица 5) для этого примера представлено на Рис. 10 (модифицированный алгоритм Прима) (решение: T_0).

Таблице 5 (решению T_0) соответствуют следующие интегрированные характеристики: $L(T_0) = 5.947$, $Q(T_0) = 510.210$, $D(T_0) = 2864.3798097$, $P(T_0) = 1.14494498$, $C(T_0) = 5139764.21577171$.

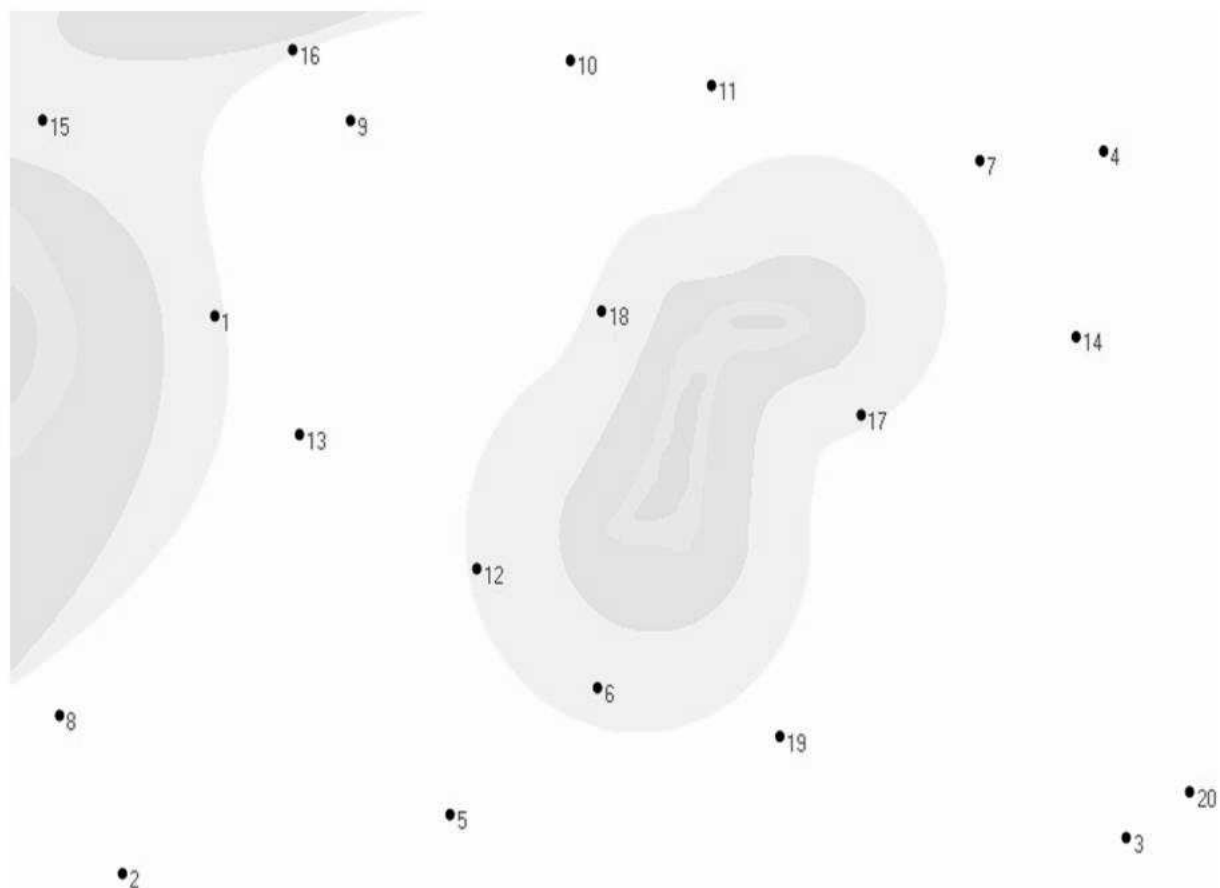


Рис. 9. Исходные данные (20 вершин, помехи)

Для рассматриваемого примера (таблица 4, таблица 5) были построены два многокритериальных дерева Штейнера:

(а) с числом кластеров $k = 1$ и числом точек Штейнера $N = 12$, (рис. 11., таблице 6) (решение: S_1);,

(б) с числом кластеров $k = 7$ и числом точек Штейнера $N = 7$, (рис. 12., таблице 7) (решение: S_2).

Таблице 6 (решение: S_1) соответствуют следующие интегрированные характеристики: $L(S_1) = 7.742$, $Q(S_1) = 13.839$, $D(S_1) = 2333.5673293$, $P(S_1) = 1.2060$, $C(S_1) = 4462117.969561$.

Таблице 7 (решение: S_2) соответствуют следующие интегрированные характеристики: $L(S_2) = 7.4230$, $Q(S_2) = 11.423$, $D(S_2) = 2402.3622929$, $P(S_2) = 1.229339186$, $C(S_2) = 4188824.533322386$.

Интегрированные характеристики для полученных решений (три покрывающих дерева: T_0 , S_1 , S_2) представлены в таблице 8. Эти решения являются несравнимыми. Следует заметить, что при учете только первых 3-х критериев (L - полезность, Q - QoS, D - длина дерева), Парето-оптимальным решением является дерево Штейнера для случая $k = 1$ и $N = 12$ (решение S_1).

Таблица 4. Базовые вершины: координаты, характеристики

Номер i	x_i	y_i	Спрос r_i	QoS q_i
1	149.6108	137.457	2	3
2	92.6785	420.0128	1	4
3	711.4572	401.7639	2	2
4	697.5481	53.9847	2	3
5	294.64	3900669.	4	1
6	385.5054	325.8236	3	3
7	621.2722	58.79285	1	4
8	53.87545	339.8291	2	4
9	233.2531	38.44019	3	3
10	368.8332	8.009759	2	1
11	455.8238	20.6785	1	4
12	311.0669	265.5064	3	2
13	201.7639	197.5481	3	3
14	680.6081	148.0798	3	4
15	43.43363	38.27282	3	2
16	197.6117	2.649694	2	4
17	548.1151	187.6409	2	5
18	387.9937	135.0223	1	1
19	497.9479	350.4937	1	5
20	750.5044	378.5867	2	1

Таблица 5. Многокритериальное покрывающее дерево: характеристики

Начало i	Конец j	Полезность $l_{i,j}$	QoS $q_{i,j}$	Расстояние $d_{i,j}$	Помехи $p_{i,j}$	Стоимость $c_{i,j}$
13	12	9	6	128.7064663	1.216800507	120940.3902
13	9	9	9	162.1940047	1.011891868	239577.5996
13	1	6	9	79.56683614	1.031766767	58787.93756
13	8	6	12	205.2191033	1.007516153	509177.0666
8	2	2	16	89.07916813	1.010180693	128254.1279
12	5	12	2	125.6400184	1.437040991	45368.5746
6	5	12	3	111.2821953	1.474708618	54787.16681
16	9	6	12	50.51007424	1.452899663	44480.83004
10	9	6	3	138.9531173	1.010472936	58530.5398
11	9	3	12	223.2781335	1.006422483	602079.6691
11	7	1	16	169.7820385	1.003332805	462752.1895
14	7	3	16	107.2049945	1.007985917	185355.0765
17	14	6	20	138.2732311	1.267990993	484866.7322
14	4	6	12	95.6078128	1.009616699	110745.1045
19	17	2	25	170.4047586	1.142135639	829127.1353
14	3	6	8	255.5528934	1.005187222	525168.3576
15	9	9	6	189.8195192	1.559376593	337119.5971
20	14	6	4	240.8972535	1.006477661	233629.5801
18	9	3	3	182.4081907	1.092150452	109016.5404

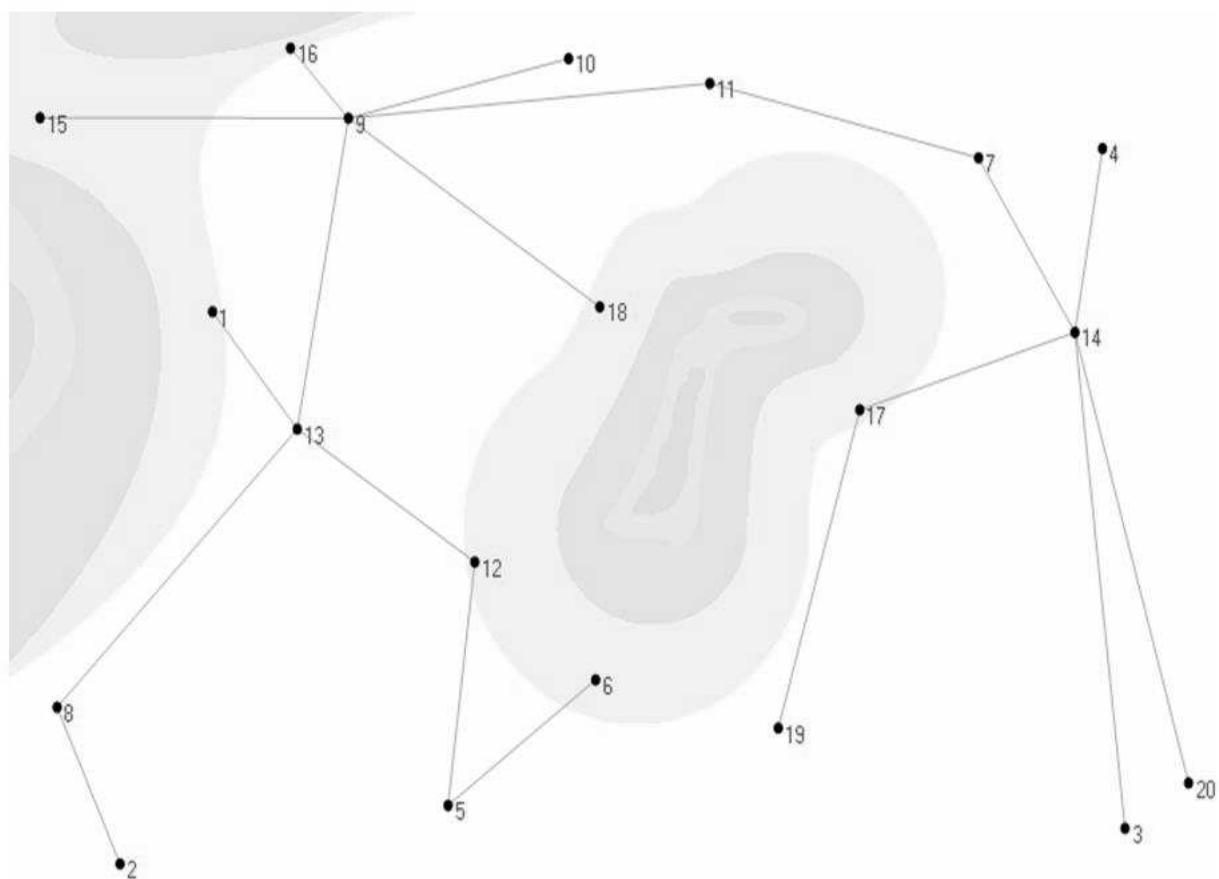


Рис. 10. Многокритериальное покрывающее дерево (20 вершин, помехи)

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые исследована задача построения многокритериального покрывающего дерева Штейнера с учетом стоимости дополнительных вершин Штейнера применительно к построению телекоммуникационной сети с учетом пространственного распределения радиотехнических помех. Предложенный подход к решению представляет собой комбинацию двух частей: (а) базовая схема для построения покрывающего дерева Штейнера на основе кластеризации вершин исходного графа (локально использованы модифицированный алгоритм Прима для построения многокритериального покрывающего дерева и иерархическая кластеризация вершин исходного графа), (б) общая схема для построения покрывающих деревьев Штейнера с учетом числа дополнительных вершин и выделений Парето-эффективных решений.

На основе разработанных авторами программ (включая программы визуализации результатов) проведен вычислительный эксперимент по построению многокритериального покрывающего дерева Штейнера с учетом различного числа дополнительных вершин и формирования Парето-эффективных решений.

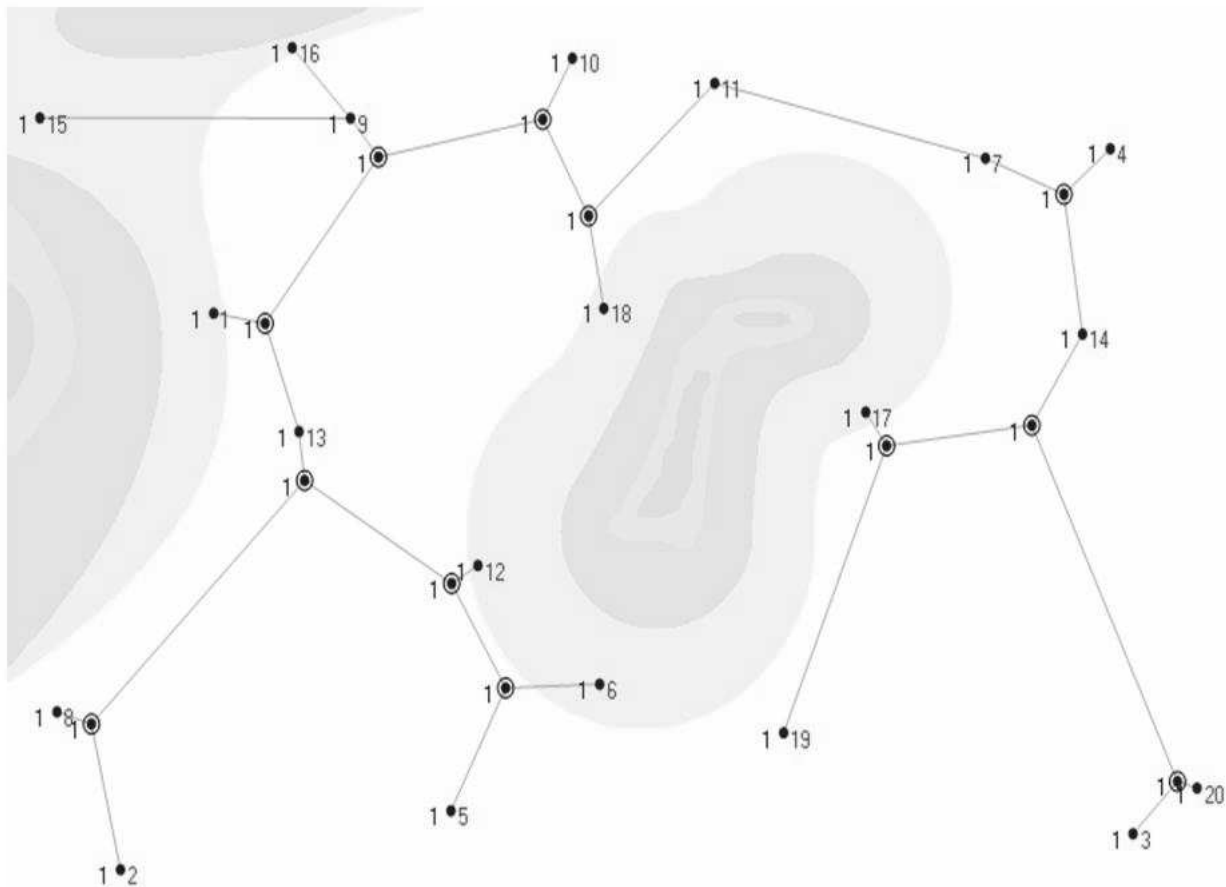


Рис. 11. Многокритериальное дерево Штейнера (20 вершин, $k = 1$, $N = 12$),

В качестве перспективных исследований можно указать следующие направления:

1. Усовершенствование и проведение дополнительных вычислительных расчетов для стадии построения множества деревьев Штейнера для узлов параметрической решетки (число кластеров и число вершин Штейнера) и выделения Парето-эффективных решений.
2. Разработка модифицированных вариантов использованных алгоритмов и их исследование, включая сравнительные вычислительные эксперименты (в частности, это относится к возможности использования различных алгоритмов на уровне решения локальных подзадач).
3. Исследование и применение более сложных подходов для определения интегрированных характеристик решений (критериев для оценивания деревьев Штейнера).
4. Использование нечетких множеств при оценивании параметров задачи.

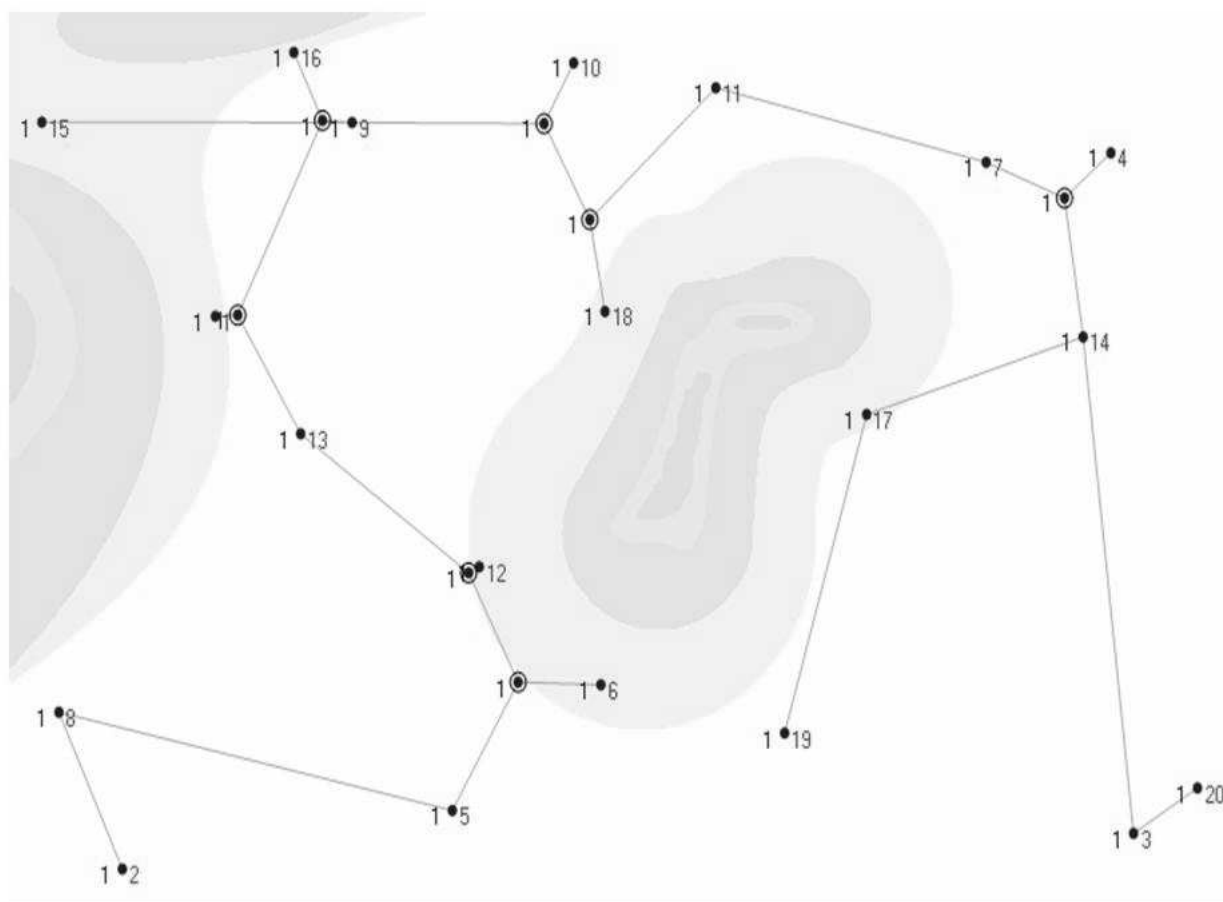


Рис. 12. Многокритериальное дерево Штейнера (20 вершин, $k = 7$, $N = 7$)

5. Применение многопараметрического оценивания дополнительных вершин Штейнера (т.е., стоимости организации дополнительных вершин, включая оборудование и техническое обслуживание).

6. Проведение дополнительных вычислительных экспериментов, включая сравнение различных алгоритмических схем с учетом особенностей исходных данных (например, особенности исходного графа, типы пространственного распределения радиотехнических помех) для выявления специальных типов исходных данных (наилучших, наихудших) для алгоритмов и/или их комбинаций.

7. Использование многокритериальных деревьев Штейнера с учетом стоимости дополнительных вершин/узлов в других приложениях (например: электрические сети, проектирование электронных схем).

8. Исследование задачи построения многокритериального дерева Штейнера с учетом стоимости вершин Штейнера в рамках подхода реструктуризации решений в комбинаторной оптимизации [31].

Таблица 6. Многокритериальное дерево Штейнера ($k = 1, N = 12$): характеристики

Начало i	Конец j	Полезность $l_{i,j}$	QoS $q_{i,j}$	Расстояние $d_{i,j}$	Помехи $p_{i,j}$	Стоимость $c_{i,j}$
16	9	6	12	50.51007424	1.452899663	44480.83004
11	7	1	16	169.7820385	1.003332805	462752.1895
15	9	9	6	189.8195192	1.559376593	337119.5971
3	32	6	8	37.9757886	1.06750011	12316.05211
20	32	6	4	12.4331388	1.085967514	671.4882057
14	66	9	20	55.71061949	1.015193431	63016.57133
32	66	9	20	201.5664086	1.006350033	817740.2537
11	120	3	16	102.3991935	1.011771212	169744.3678
18	120	3	4	47.85193737	1.427143857	13071.54117
10	148	6	4	35.90632364	1.032016371	5322.166535
120	148	9	16	56.48823708	1.019194642	52034.71222
7	156	3	16	51.28078668	1.022591924	43025.07192
14	156	9	16	71.93327899	1.01378132	83931.30626
4	156	6	12	36.55960678	1.057886315	16967.71172
19	178	3	25	158.7435194	1.001697637	631057.1137
17	178	6	25	21.31663613	1.871318061	21258.12525
66	178	9	25	89.38020572	1.013773623	202471.4047
13	200	9	12	25.03681035	1.007922138	7581.693609
2	224	3	16	76.06986933	1.014021977	93884.23912
6	224	6	16	21.92446351	1.046452241	8048.173776
200	224	9	16	179.6464634	1.005564898	519239.1508
9	234	9	12	26.07624368	1.063880384	8680.887122
146	234	9	16	102.246745	1.015581387	169876.6537
1	238	6	12	31.87284415	1.017489785	12403.74822
13	238	9	12	58.68912829	1.019734493	42148.65049
234	238	9	16	109.2028461	1.018322788	194300.2501
12	244	12	8	18.45239779	2.123245705	5783.568161
200	244	12	16	104.0002181	1.101470774	190616.9258
6	248	12	12	57.5337072	2.052052567	81510.66672
5	248	16	4	70.73757546	1.202383114	24065.96054
244	248	16	16	62.42070436	2.037100153	125995.8982

Предварительный материал для данной статьи был подготовлен в рамках курса "Проектирование систем" (МФТИ, автор и лектор: М.Ш. Левин) ([25], [26], [28], [30]) как лабораторная работа 12 (студент: А.А. Замковой) и как бакалаврская работа А.А. Замкового (2010 г., руководитель: М.Ш. Левин). Программный комплекс в среде C^{++} разработан А.А. Замковым. Предварительный вариант материала был опубликован как статья в трудах конференции [35].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bern M.W., Graham R.L., The shortest-network problem. *Scientific American*, 1989, vol. 3, pp. 64-70.
2. Cheng X., Du D.-Z., *Steiner Trees in Industry*. Dordrecht: Kluwer, 2001.
3. Chopra S., Gores E.R., Rao M.R., Solving the Steiner tree problem on graph using branch and cut. *ORSA J. on Computing*, 1992, vol. 4, no. 3, pp. 320-335.
4. Cieslik D., *Steiner Minimal Trees*. Berlin: Springer, 1998.
5. Cieslik D., *Steiner Ratio*. Berlin: Springer, 2001.
6. Dreyer D.R., Overtony M.L., Two heuristics for the Euclidean Steiner tree problem. *J. of Global Optimization*, 1998, vol. 13, no. 1, pp. 95-106.
7. Du D.-Z., Hu X., *Steiner Tree Problem in Computer Communication Networks*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2008.
8. Fishburn P.C., *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York, 1970.
9. Garey M.R., Johnson D.S., *Computers and Intractability. The Guide to the Theory of NP-Completeness*, New York: W.H. Freeman & Company, 1979.
10. Gil C., Ortega J., Montoya M.G., Banos R., A mixed heuristic for circuit partitioning. *J. Computational Optimization and Application*, 2001, vol. 23, no. 2, pp. 321-340.
11. Gilbert E.N., Graham R.L., Johnson D.S., The complexity of computing Steiner minimal trees. *SIAM J. on Applied Mathematics*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 835-859.
12. Гордеев Е.Н., Тарасцов О.Г., Задача Штейнера. Обзор. *Дискретная математика*, 1993, том 5б вып. 2, pp. 3-28.
13. Hendrickson B., Leland R., A multilevel algorithm for partitioning graphs. Technical Report SAND93-1301, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1993.
14. Hwang F.K., Richards D.S., Winter P., *The Steiner Tree Problem*. Dordrecht: Kluwer, 1992.
15. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., *Minimal Networks: The Steiner Problem and Its Generalizations*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994.
16. Jain A.K., Murty M.N., Flynn P.J., Data clustering: a review, *ACM Comput. Surv.*, 1992, vol. 31, no. 3, pp. 264-323.
17. Kapsalis A., Rayward-Smith V.J., Smith G.D., Solving the graphical Steiner tree problem using genetic algorithm. *J. of the ORS*, 1993, vol. 44, no. 4, pp. 978-981.
18. Keeny R.L., Raiffa H., *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, New York: Wiley, 1976.
19. Khoury B.N., Pardalos P.M., An exact branch and bound algorithm for the Steiner problem in graph. In: *Computing in Combinatorics*, LNCS 959, Springer, 1995, pp. 582-590.
20. Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D., *Knapsack Problems*, Berlin: Springer-Verlag, 2004.
21. Kernighan B.W., Lin S., An efficient heuristic procedure for partitioning graph. *Bell System Technical J.*, 1970, vol. 49, no. 2, pp. 291-307.
22. Koch T., Matin A., Solving Steiner tree problems in graphs to optimality. *Networks*, 1998, vol. 32, no. 3, pp. 207-232.
23. Korhonen P., Wallenius J., Zionts S., Solving the discrete multiple criteria problems using convex cones, *Manag. Sci.*, 1984, vol. 30, no. 11, pp. 1336-1345.
24. Levin M.Sh., *Combinatorial Engineering of Decomposable Systems*, Dordrecht: Kluwer, 1998.
25. Levin M.Sh., Course 'System design: structural approach', *Proc. of 18th Int. Conf. on Design Theory and Methodology DTM2006*, Pennsylvania, DETC2006-99547, pp. 475-484, 2006.

26. Левин М.Ш., О преподавании проектирования систем. *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2007, вып. 2, С. 89-94.
27. Levin M.Sh., Towards hierarchical clustering, *CSR 2007*, LNCS 4649, Springer, 2007, pp. 205-215.
28. Levin M.Sh., Student research projects in system design, *Proc. of 1st Int. Conf. CSEU 2009*, Lisbon, 2009, pp. 291-295.
29. Levin M.Sh., Combinatorial optimization in system configuration design. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 3, pp. 519-561.
30. Levin M.Sh., Course on system design (structural approach). *Information processes*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 303-324. <http://www.jip.ru/2010/303-324-2010.pdf>
31. Levin M.Sh., Restructuring in combinatoial optimization. Electronic preprint arXiv: 1102.1745v1 [cs.DS], 11 pp., Febr. 8, 2011. <http://arxiv.org/abs/1102.1745>
32. Левин М.Ш., Михайлов А.А., *Фрагменты технологии стратификации множества объектов*, Препринт, Москва: ИСА РАН, 1988.
33. Левин М.Ш., Сафонов А.В., Эвристический алгоритм для многокритериальной блочной задачи о рюкзаке. *Искусственный интеллект и принятые решения*, 2009, вып. 4, С. 53-64.
34. Levin M.Sh., Nuriakhmetov R.I., Multicriteria Steiner tree problem for communication network. *Information Processes*, 2009, том 9, вып. 3, С. 199-209. <http://www.jip.ru/2009/199-209-2009.pdf>
35. Левин М.Ш., Замковой А.А., Многокритриальное дерево Штейнера с учетом стоимости вершин. *Труды 10-й между. конф. CAD/CAM/PDM-2010*, Москва, ИПУ РАН, 2010, С. 52-57.
36. Ljubic I., Weiskircher R., Pferschy, Klau G., Mutzel P., Fischetti M., An algorithmic framework for the exact solution of the prize-collecting Steiner tree problem. *Mathematical Programming*, 2006, vol. 105, no. 2-3, pp. 427-449.
37. Maculan N., Souza P., Candia Vejar A., An approach for the Steiner problem in directed graphs. *Annals of Operations Research*, 1991, vol. 33, no. 6, pp. 471-480.
38. Melzak Z.A., On the problem of Steiner. *Canadian Mathematical Bulletin*, 1961, no. 4, pp. 143-148.
39. Oliveira C.A.S., Pardalos P.M., A survey of combinatorial optimization problems in multicast routing. *Computers and Operations Research*, 2005, vol. 32, no. 8, pp. 1953-1981.
40. Penttinen A., Minimum cost multicast trees in ad hoc networks. *Proc. of 2006 IEEE Int. Conf. on Communications (ICC 2006)*, 2006, vol. 8, pp. 3676-3681.
41. S. Pettie, V. Ramachandran, An optimal minimum spanning tree algorithm. *J. of the ACM*, 2002, vol. 49, no. 1, pp. 16-34.
42. Протасов В.Ю., Минимумы и максимумы в геометрии. *Библиотека "Математическое просвещение"*, Москва, 2005, вып. 3, С. 16-28.
43. Roy B., *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, Dordrecht: Kluwer, 1996.
44. Voss S., Steiner tree problems in telecommunication. In: M. Resende, P.M. Pardalos (Eds.), *Handbook of Optimization in Telecommunications*, New York, Springer, 2006, pp. 459-492.
45. Vujoisevic M., Stanojevic M., A bicriterion Steiner tree problem on graph. *Yugoslav J. of Operations Research*, 2003, vol. 13, no. 1, pp. 25-33.
46. Warme D.M., Winter P., Zachariasen M., Exact Algorithms for Plane Steiner Tree Problems: A Computational Study. In: D.-Z. Du, J. MacGregor Smith, J.H. Rubinstein (eds.), *Advances in Steiner Trees*, Dordrecht, Kluwer, 2000, pp. 81-116.
47. Winter P., Steiner problem in networks: A survey. *Networks*, 1987, vol. 17, no. 2, pp. 129-167.

Таблица 7. Многокритериальное дерево Штейнера ($k = 7, N = 7$): характеристики

Начало i	Конец j	Полезность $l_{i,j}$	QoS $q_{i,j}$	Расстояние $d_{i,j}$	Помехи $p_{i,j}$	Стоимость $c_{i,j}$
8	2	2	16	39.07916813	1.010180693	128254.1279
11	32	3	16	102.3992935	1.011771212	169744.3678
18	32	3	16	47.85193737	1.427143857	13071.54117
10	46	6	4	35.90632364	1.032016371	5322.166535
9	46	9	12	117.475863	1.012986256	167757.5546
32	46	9	16	56.48823700	1.019194642	52034.71222
13	62	12	9	124.9410852	1.187091806	166777.4633
12	62	12	6	7.226289344	2.143663673	671.6431542
9	72	9	12	18.13073802	1.049612358	4140.389004
16	72	6	16	38.94218096	1.524360604	36986.92614
13	76	9	12	71.87749374	1.021948275	63357.20525
1	76	6	12	13.62031722	1.020000005	2290.271694
72	76	9	16	112.2029706	1.016470565	204648.3339
6	80	12	9	50.66611165	2.053373727	47440.10723
5	80	16	3	76.93343843	1.296035538	23012.74638
62	80	16	9	63.57961825	2.004156953	72913.85681
4	60	6	12	36.55960678	1.057886315	16967.71172
14	60	9	16	71.93327899	1.01378132	83931.30626
7	60	3	16	61.28078668	1.022591924	43026.07192
20	3	4	2	45.48518122	1.047597578	4334.752843
17	14	6	20	138.2732311	1.267990993	484866.7322
19	17	2	25	170.4047586	1.142135639	829127.1358
8	5	8	4	245.9500324	1.005131271	243207.2653
15	9	9	6	189.8195192	1.559376593	337119.5971
11	7	1	16	169.7820385	1.003332806	462752.1895
14	3	6	8	255.5528934	1.005187222	525168.3575

Таблица 8. Сравнение интегрированных характеристик (20 базовых вершин, помехи)

Тип покрывающего дерева	Полезность (L, \max)	QoS (Q, \max)	Расстояние (D, \min)	Помехи (P, \min)	Стоимость (C, \min)	Вершины Штейнера (N, \min)
Многокритериаль- ное дерево T_0	5.947	10.21	2864.37981	1.14494498	5139764.216	0
Дерево Штейнера S_1 ($k = 1, N = 12$)	7.742	13.839	2333.567329	1.206	4462117.97	12
Дерево Штейнера S_2 ($k = 7, N = 7$)	7.423	11.423	2402.362293	1.229339186	4188824.533	7