Информационные процессы, Том 11, № 2, 2011, стр. 253–261

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Конечная достижимость обобщенного спектрального радиуса ограниченного множества матриц с равномерно субпериферийным спектром[1]

С. Дай, В. С. Козякин

Университет г. Нанкин, КНР
Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 17.06.2011

Аннотация—В статье предлагаются условия, гарантирующие конечную достижимость обобщенного спектрального радиуса ограниченного множества $\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k\in K}$ вещественных или комплексных матриц. Доказано, что существование последовательности матричных произведений $\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}$ длины $n_\ell \to \infty$ с сомножителями из $\boldsymbol{S}$, обладающих тем свойством, что спектр каждой матрицы $\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}$ равномерно субпериферийный и

$$\rho(\boldsymbol{S}) := \sup_{n\ge 1} \sup_{i_1,\dots,i_n\in K} \sqrt[n]{\rho(S_{i_1}\cdots S_{i_n})} = \lim_{\ell\to+\infty} \sqrt[n_\ell]{\rho(\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)})},$$

влечет конечную достижимость обобщенного спектрального радиуса $\boldsymbol{S}$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основная цель настоящей работы — показать, что совместный (обобщенный) спектральный радиус ограниченного множества матриц с так называемым равномерно субпериферийным спектром достигается на конечном числе матричных произведений.

1.1. Совместный и обобщенный спектральные радиусы

В этой работе

$$\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k\in K}, \quad \mathrm{card}(K) \ge 2,$$

обозначает ограниченное множество матриц размерности $d \times d$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ вещественных или комплексных чисел, индексированных элементами некоторого множества K. Символ $\|\cdot\|$ будет использоваться для обозначения как нормы на множестве вектор-строк $\mathbb{F}^{1\times d}$, так и индуцированной нормы на множестве матриц $\mathbb{F}^{d\times d}$. Каждому конечному слову

$$\sigma = \{i_1, \dots, i_n\} \in K^n := \overbrace{K \times \cdots \times K}^{n \text{ раз}}$$

поставим в соответствие матрицу $\boldsymbol{S}_\sigma = S_{i_1}\cdots S_{i_n}$, и определим для каждого целого числа $n \ge 1$ две величины:

$$\hat\rho_n(\boldsymbol{S}) = \sup_{\sigma\in K^n} \|\boldsymbol{S}_\sigma\| \quad \text{и} \quad \rho_n(\boldsymbol{S}) = \sup_{\sigma\in K^n} \rho(\boldsymbol{S}_\sigma),$$

[1] С. Дай частично поддержан Национальным фондом естественных наук Китая (грант 11071112). В.С. Козякин частично поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 10-01-93112).

где $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы $A \in \mathbb{F}^{d\times d}$. Тогда в силу субмультипликативного неравенства $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, имеющего место для произвольных матриц $A, B \in \mathbb{F}^{d\times d}$, существует предел

$$\hat{\rho}(\boldsymbol{S}) = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\hat{\rho}_n(\boldsymbol{S})} \quad \big(= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\hat{\rho}_n(\boldsymbol{S})} = \inf_{n\ge1} \sqrt[n]{\hat{\rho}_n(\boldsymbol{S})} \big),$$

который не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$. Этот предел был введен в рассмотрение Дж.-К. Рота и Дж. Странгом [26] и назван ими *совместным спектральным радиусом* множества матриц $\boldsymbol{S}$. Аналогично, существует предел

$$\rho(\boldsymbol{S}) = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\rho_n(\boldsymbol{S})} \quad \big(= \sup_{n\ge1} \sqrt[n]{\rho_n(\boldsymbol{S})} \big),$$

который был назван И. Добеши и Дж. Лагариасом [13] *обобщенным спектральным радиусом* множества матриц $\boldsymbol{S}$. Как показано в [4], для конечных множеств матриц $\boldsymbol{S}$ величины $\hat{\rho}(\boldsymbol{S})$ и $\rho(\boldsymbol{S})$ совпадают друг с другом, и при каждом n справедливы следующие соотношения

$$\sqrt[n]{\rho_n(\boldsymbol{S})} \le \rho(\boldsymbol{S}) = \hat{\rho}(\boldsymbol{S}) \le \sqrt[n]{\hat{\rho}_n(\boldsymbol{S})}, \tag{1}$$

которые могут быть использованы для оценки погрешности вычисления совместного спектрального радиуса $\hat{\rho}(\boldsymbol{S})$.

1.2. Конечная достижимость обобщенного спектрального радиуса

В [21] Дж. Лагариас и Я. Ванг выдвинули предположение, что величина $\rho(\boldsymbol{S})$ для конечных множеств $\boldsymbol{S}$ на самом деле совпадает $\sqrt[n]{\rho(\boldsymbol{S}_\sigma)}$ при некоторых n и $\sigma \in K^n$, т.е. $\boldsymbol{S}$ обладает свойством *конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса*. Если бы эта *гипотеза о конечности* оказалась справедливой, то оказалась бы разрешимой (за конечное число вычислений) проблема определения условий, при которых $\rho(\boldsymbol{S}) < 1$. Действительно, неравенство $\rho(\boldsymbol{S}) < 1$ влечет существование такого n, что $\rho_n(\boldsymbol{S}) < 1$, в то время как при выполнении неравенства $\hat{\rho}(\boldsymbol{S}) \ge 1$ из гипотезы о конечности вытекает существование такого n, при котором $\hat{\rho}_n(\boldsymbol{S}) \ge 1$. Проверяя оба указанных условия для возрастающих значений n, мы бы получили, что одно из них в конечном счете будет выполнено, а значит, решение о справедливости неравенства $\rho(\boldsymbol{S}) < 1$ будет принято за конечное количество вычислений. Отметим, что для случая, когда множество $\boldsymbol{S}$ состоит из одной матрицы, проблема выполнимости неравенства $\rho(\boldsymbol{S}) < 1$ разрешима. Таким образом, гипотеза о конечности оказывается весьма важной при вычислении совместного или обобщенного спектрального радиуса.

Простейшим примером множества матриц, обладающих свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса, являются множества матриц, все элементы которых являются верхне- или нижне-треугольными матрицами. Другим тривиальным примером являются множества матриц $\boldsymbol{S}$, состоящие из матриц $S \in \boldsymbol{S}$ "изометричных с точностью до множителя" в некоторой норме $\|\cdot\|$ на $\mathbb{F}^{1\times d}$, т.е. из таких матриц, для которых при любом $x \in \mathbb{F}^{1\times d}$ выполняется равенство $\|xS\| = \lambda_S\|x\|$ с некоторой константой λ_S. Еще один пример был описан Э. Плишке и Ф. Виртом в [25], которые доказали, что неприводимые[1], ограниченные и "симметрические" множества матриц[2] обладают свойством конечной достижимости обобщенного

[1] Множество матриц $\boldsymbol{S}$ называется *неприводимым*, если матрицы из этого множества не имеют общих инвариантных подпространств, за исключением тривиальных подпространств $\{\boldsymbol{0}\}$ и $\mathbb{F}^{1\times d}$. Отметим, что это понятие не имеет ничего общего с понятием "неприводимости" переходной матрицы марковского процесса в теории вероятностей.

[2] Множество матриц $\boldsymbol{S}$ называется *симметричным*, если вместе с каждой матрицей $S \in \boldsymbol{S}$ множеству $\boldsymbol{S}$ принадлежит и матрица S^*, сопряженная к S, т.е. $S^* \in \boldsymbol{S}$.

спектрального радиуса. Менее тривиальный пример был построен М. Омладичем и Х. Раджави в [24], где они показали, что свойство конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса справедливо для множеств матриц $\boldsymbol{S}$, у которых соответствующая мультипликативная полугруппа $\boldsymbol{S}^+$ всех произведений матриц из $\boldsymbol{S}$ обладает так называемым свойством "субмультипликативности спектрального радиуса", означающим, что $\rho(FH) \le \rho(F)\cdot\rho(H)$ для всех $F, H \in \boldsymbol{S}^+$.

В [15] Л. Гурвиц показал, что для вещественных множеств матриц $\boldsymbol{S}$ гипотеза о конечности выполняется в том случае, когда существует вещественная полиэдральная экстремальная для $\boldsymbol{S}$ норма[3]. Дж. Лагариас и Я. Ванг в [21]доказали более общий результат о том, что гипотеза о конечности справедлива, если для $\boldsymbol{S}$ найдется вещественная кусочно-аналитическая экстремальная норма. Наконец, как показали Н. Гуглиелми и др. в [14], для комплексных множеств матриц $\boldsymbol{S}$ гипотеза о конечности имеет место в том случае, когда для $\boldsymbol{S}$ найдется комплексная полиэдральная экстремальная норма. Впрочем, следует отметить, что использование упомянутых результатов сводится к не менее простому вопросу о том, при каких условиях множество матриц $\boldsymbol{S}$ обладает экстремальными нормами требуемого типа. В ряде работ, см., например, [1,2,9], было показано, что экстремальные нормы всегда существуют для ограниченных неприводимых множеств матриц. Однако, в каких случаях такие экстремальные нормы являются полиэдральными или кусочно-аналитическими, неизвестно, см., например, [28] и библиографию в этой работе. В [14] Н. Гуглиелми и др. предположили, что каждое недефектное[4] конечное множество комплексных матриц, обладающее свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса, имеет по крайней мере одну комплексную полиэдральную экстремальную норму. К сожалению, впоследствии это предположение было опровергнуто Р. Юнгерсом и В. Протасовым [19].

Несмотря на приведенные выше примеры, в которых гипотеза о конечности выполняется, в общем случае эта гипотеза оказалась не верна. Первый контрпример к гипотезе о конечности был предложен Т. Бушем и Ж. Мерессом в [7], а соответствующие конструкции существенно использовали анализ так называемых топических отображений и штурмовых мер. Позднее в [5, 6] В. Блондель, Ж. Тэсс и А. Владимиров предложили иное доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, которое основывалось на комбинаторных свойствах перестановок произведений положительных матриц. В теории управления, а также в общей теории динамических систем, понятие обобщенного спектрального радиуса используется в основном для описания скорости роста или убывания траекторий, генерируемых матричными произведениями. В связи с этим В. Козякин в [3, 20] представил еще одно доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, выполненное в духе теории динамических систем. В этом доказательстве ключевым инструментом оказался метод норм Барабанова [1]. Соответствующие конструкции были основаны на анализе геометрических свойств единичных шаров некоторых специальных норм Барабанова, а также использовали свойства разрывных сохраняющих ориентацию отображений окружности.

В основе всех упомянутых выше контрпримеров [3, 6, 7, 20] к гипотезе о конечности лежало использование частотных свойств штурмовых последовательностей. В [7] такие свойства были сформулированы и исследованы в терминах так называемых инвариантных эргодических штурмовых мер на пространствах бинарных последовательностей. В [3, 6, 20] эргодическая теория формально не упоминалась. Однако, использование комбинаторных свойств штурмовых последовательностей в [6] или того факта, что штурмовы последовательности естественно возникают при символическом описании траекторий (разрывных) отображений окружности,

[3] Норма $\|\cdot\|$ называется *экстремальной* для множества матриц $\boldsymbol{S}$, если $\|S\| \le \rho(\boldsymbol{S})$ для всех $S \in \boldsymbol{S}$

[4] Множество матриц $\boldsymbol{S}$ называется *недефектным*, если мультипликативная полугруппа, порождаемая множеством $\rho(\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}$, ограничена.

сохраняющих ориентацию [3,20], было мотивировано именно эргодическими свойствами штурмовых последовательностей.

К сожалению, все контрпримеры [3,6,7,20] к гипотезе о конечности были неконструктивны, представляя собой доказательства типа “чистого существования” (или, скорее, “несуществования”). Лишь недавно в [16] К. Хэйр и др., развив технику всех работ [3,6,7,20] и использовав ее в сочетании некоторыми быстро сходящимися нижними оценками совместного спектрального радиуса, полученными И. Моррисом в [23] с помощью методов мультипликативной эргодической теории, явно указали множество матриц, для которого гипотеза о конечности не верна. В частности, для множества матриц

$$\boldsymbol{S}(\alpha) := \left\{ S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

они с помощью явной процедуры вычислили величину

$$\alpha_* \simeq 0.749326546330367557943961948091344672091327370236064317358024\dots,$$

при которой множество $\boldsymbol{S}(\alpha_*)$ не обладает свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса. Впрочем, до сих пор не известно является ли число α_* рациональным или нет.

Таким образом, при построении контрпримеров к гипотезе о конечности оказались плодотворными идеи эргодической теории [3, 6, 7, 16, 20, 23]. Подход, основанный на использовании эргодической теории для анализа свойств совместного спектрального радиуса, получил дальнейшее развитие в работах С. Дая с соавторами [11, 12]. Основываясь на классических мультипликативных эргодических теоремах и некоторых относительно новых полуравномерных субаддитивных эргодических теоремах в [12] было доказано существование по крайней мере одной эргодической вероятностной меры Бореля на пространстве Σ_K^+ односторонне бесконечных символических последовательностей $\sigma\colon \mathbb{N} \to K$, такой, что совместный спектральный радиус конечного множества матриц $\boldsymbol{S}$ может быть реализован для почти всех (относительно данной меры) последовательностей σ.

Так как гипотеза о конечности оказалась неверна в общем случае, различные авторы в последнее время приложили усилия по отысканию менее общих классов матриц, для которых гипотеза о конечности могла бы быть верной. Одним из наиболее интересных с этой точки зрения является класс матриц с рациональными элементами. В [17,18] Р. Юнгерс и В. Блондель показали, что свойство конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса выполняется для неотрицательных рациональных матриц в том и только том случае, если оно справедливо для всех пар бинарных матриц, т.е. матриц с элементами $\{0,1\}$. На основании этого результата они выдвинули гипотезу о том, что пары бинарных матриц всегда обладают свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса. В поддержку этой гипотезы им удалось доказать, что свойство конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса действительно имеет место для пар бинарных матриц размерности 2×2. Аналогичный результат был доказан ими и для рациональных матриц с элементами произвольного знака. В частности, они доказали, что свойство конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса справедливо для общих рациональных матриц в том и только том случае, когда оно выполняется для пар матриц с элементами $\{-1,0,1\}$. Позднее А. Чиконе и др. в [8] доказали, что свойство конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса действительно имеет место для пар матриц размерности 2×2 с элементами $\{-1,0,1\}$. Отметим также, что С. Дай и др. в [10] установили конечную достижимость обобщенного спектрального радиуса для пар матриц $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2\} \subset \mathbb{R}^{d\times d}$, одна из которых имеет единичный ранг.

Целью настоящей работы является представление еще одного достаточного условия, обеспечивающего конечную достижимость обобщенного спектрального радиуса.

2. ЧИСТО ПЕРИФЕРИЙНЫЙ СПЕКТР И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Напомним, что *периферийным спектром* матрицы $A \in \mathbb{F}^{d\times d}$ называют множество тех ее собственных значений λ, для которых выполняется равенство $|\lambda| = \rho(A)$. Если $|\lambda| = \rho(A)$ для всех собственных значений λ матрицы A, то будем говорить, что A имеет *чисто периферийный спектр*. Например, каждая унитарная матрица имеет чисто периферийный спектр. Скажем, что множество матриц $\boldsymbol{S}_\sigma$ имеет *равномерно субпериферийный спектр*, если найдется такая константа $\boldsymbol{\kappa} \in (0,1)$, что для любого σ каждое собственное значение λ матрицы $\boldsymbol{S}_\sigma$ удовлетворяет условиям $\boldsymbol{\kappa}\rho(\boldsymbol{S}_\sigma) \le |\lambda| \le \rho(\boldsymbol{S}_\sigma)$. Если спектр каждой матрицы $\boldsymbol{S}_\sigma$ чисто периферийный, то очевидно, что множество матриц $\boldsymbol{S}_\sigma$ имеет равномерно субпериферийный спектр.

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k\in K} \subset \mathbb{F}^{d\times d}$ — ограниченное множество матриц. Если найдется последовательность матричных произведений $\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}$ с сомножителями из $\boldsymbol{S}$, для которой $\sigma(n_\ell) \in K^{n_\ell}$ и $n_\ell \to +\infty$, такая, что ее спектр равномерно субпериферийный и*

$$\rho(\boldsymbol{S}) = \lim_{\ell\to+\infty} \sqrt[n_\ell]{\rho(\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)})}, \tag{2}$$

то для $\boldsymbol{S}$ имеет место свойство конечная достижимости обобщенного спектрального радиуса, причем $\rho(\boldsymbol{S}) = \sup_{k\in K} \rho(S_k)$.

В свете контрпримера К. Хэйра с соавторами [16], в котором $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2\}$ и спектры обеих матриц S_1 и S_2 чисто периферийные, причем $\rho(S_1) = 1$ и $\rho(S_2) = \alpha_*$, предположение теоремы 1 о том, что последовательность матриц $\{\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}\}_{\ell=1}^{+\infty}$ должна иметь равномерно субпериферийный спектр, существенно для утверждения теоремы.

Представим один пример, в котором утверждение теоремы 1 очевидно. Если каждый элемент мультипликативной полугруппы $\boldsymbol{S}^+ \subset \mathbb{F}^{d\times d}$, порождаемой множеством матриц $\boldsymbol{S}$, имеет чисто периферийный спектр, то

$$\rho(AB) = \sqrt[d]{\det(AB)} = \sqrt[d]{\det(A)} \cdot \sqrt[d]{\det(B)} = \rho(A)\cdot\rho(B), \quad \forall\ A, B \in \boldsymbol{S}^+.$$

Отсюда следует, что

$$\rho(\boldsymbol{S}) = \sup_{k\in K} \rho(S_k)$$

и, значит, в этом случае множество матриц $\boldsymbol{S}$ обладает свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса.

Мультипликативные полугруппы матриц, удовлетворяющих равенству $\rho(AB) = \rho(A)\cdot\rho(B)$ для любых их членов A и B, называются [24] *полугруппами с мультипликативным спектральным радиусом.* Как показано в [24, Theorem 2.5], для любой такой полугруппы матриц найдется (векторная) норма $\|\cdot\|$, в которой каждая матрица из полугруппы является прямой суммой изометрии (в норме $\|\cdot\|$) и нильпотентной матрицы. Нетривиальные примеры полугрупп с мультипликативным спектральным радиусом описаны в [24].

Отметим, что в условиях теоремы 1 не предполагается, что множество матриц $\{\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}\}_{\ell=1}^{+\infty}$ является мультипликативной полугруппой; более того, для этого множества матриц свойство мультипликативности спектрального радиуса также может не выполняться. Тем не менее, теорема 1 справедлива и в этой более ограничительной по сравнению с теоремой 2.5 из [24] ситуации.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}\}_{\ell=1}^{+\infty}$ — некоторая последовательность матричных произведений с сомножителями из $\boldsymbol{S}$, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Тогда, в силу равномерной субпериферийности спектра семейства матричных произведений $\{\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}\}_{\ell=1}^{+\infty}$, мы получаем цепочку соотношений:

$$\boldsymbol{\kappa}\rho(\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}) \le \sqrt[d]{\det(S_{i_1(n_\ell)}\cdots S_{i_{n_\ell}(n_\ell)})} = \sqrt[d]{\det(S_{i_1(n_\ell)})\cdots\det(S_{i_{n_\ell}(n_\ell)})} =$$
$$= \sqrt[d]{\det(S_{i_1(n_\ell)})}\cdots\sqrt[d]{\det(S_{i_{n_\ell}(n_\ell)})} \le \rho(S_{i_1(n_\ell)})\cdots\rho(S_{i_{n_\ell}(n_\ell)}) \le \left(\sup_{k\in K}\rho(S_k)\right)^{n_\ell},$$

где $\sigma(n_\ell) = (i_1(n_\ell),\ldots,i_{n_\ell}(n_\ell))$ и $\boldsymbol{\kappa}\in(0,1)$ — некоторая константа. Отсюда и из (2) следует, что

$$\rho(\boldsymbol{S}) = \lim_{\ell\to+\infty}\sqrt[n_\ell]{\rho(\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)})} \le \lim_{\ell\to+\infty}\sqrt[n_\ell]{\boldsymbol{\kappa}\left(\sup_{k\in K}\rho(S_k)\right)^{n_\ell}} = \sup_{k\in K}\rho(S_k). \tag{3}$$

С другой стороны в силу (1)

$$\rho(\boldsymbol{S}) \ge \sup_{k\in K}\rho(S_k),$$

что вместе с (3) влечет равенство

$$\rho(\boldsymbol{S}) = \sup_{k\in K}\rho(S_k).$$

Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что если множество матриц $\boldsymbol{S}$ не обладает свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса, то для любой последовательности матричных произведений $\{\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}\}$, удовлетворяющей условию (2), минимальный модуль собственных значений $\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}$ деленный на $\rho(\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)})$ стремится к нулю при $\ell\to+\infty$.

Напомним, что *предельная полугруппа* $\boldsymbol{S}_\infty$, порождаемая множеством матриц $\boldsymbol{S}$, определяется в [29] как множество всех предельных точек матричных последовательностей

$$\left\{\sqrt[n_\ell]{\rho(\boldsymbol{S})}\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}\right\}_{\ell=1}^{+\infty},$$

где $\sigma(n_\ell)\in K^{n_\ell}$ и $n_\ell\to\infty$. Известно [29], что предельная полугруппа ограничена, если множество матриц $\boldsymbol{S}$ неприводимо.

Как следствие теоремы 1 мы можем получить следующее достаточное условие конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса для неприводимых множеств матриц $\boldsymbol{S}$.

Теорема 2. *Пусть неприводимое ограниченное множество матриц $\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k\in K}\subset\mathbb{F}^{d\times d}$ не обладает свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса. Тогда каждая матрица $A\in\boldsymbol{S}_\infty$ вырождена, т.е.* $\det A = 0$.

Доказательство. Так как множество $\boldsymbol{S}$ неприводимо и ограничено, то $0<\rho(\boldsymbol{S})<\infty$, см., например, [29]. В этом случае без ограничения общности можно считать, что $\rho(\boldsymbol{S}) = 1$. Зафиксируем произвольную матрицу $A\in\boldsymbol{S}_\infty$. Тогда найдется последовательность слов конечной длины $\{\sigma(n_\ell)\}_{\ell=1}^{+\infty}$, для которой $\sigma(n_\ell)\in K^{n_\ell}$, $n_\ell\to\infty$ при $\ell\to+\infty$, и при этом

$$A = \lim_{\ell\to+\infty}\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}.$$

Если матрица A вырождена, то доказывать нечего. Поэтому рассмотрим случай, когда $\det A\ne 0$ и, значит, $\rho(A)>0$. Так как $\rho(\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)})$ сходится к $\rho(A)$ при $\ell\to+\infty$, то

$$\sqrt[n_\ell]{\rho(\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)})}\to 1 = \rho(\boldsymbol{S}).$$

Значит для последовательности $\{\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}\}$ выполнено условие (2). Тогда, обозначая через λ_ℓ собственное значение матрицы $\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}$ с наименьшим модулем, мы получаем в силу замечания 1, что

$$\lambda_\ell \to 0 \quad \text{при} \quad \ell \to \infty. \tag{4}$$

Теперь заметим, что в силу (1) все остальные собственные значения матрицы $\boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}$ не превосходят по модулю 1. Поэтому

$$|\det \boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)}| \le |\lambda_\ell|$$

и в силу (4) мы получаем

$$\det A = \lim_{\ell \to +\infty} \det \boldsymbol{S}_{\sigma(n_\ell)} = 0,$$

что противоречит предположению $\det A \neq 0$.

В силу произвольности матрицы $A \in \boldsymbol{S}_\infty$ теорема доказана. □

Теорема 2 допускает следующую эквивалентную переформулировку:

Теорема 3. *Пусть ограниченное множество матриц $\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{F}^{d \times d}$ неприводимо. Если найдется невырожденная матрица $A \in \boldsymbol{S}_\infty$, то $\boldsymbol{S}$ обладает свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса.*

Напомним, что неприводимое множество матриц $\boldsymbol{S}$ называют *одноранговым*, если каждая ненулевая матрица из $\boldsymbol{S}_\infty$ имеет ранг 1, см., например, [22]. Тогда в силу следствия 1.6 из [22] для каждой пары чисел $\operatorname{card}(K), d \ge 2$ найдется неприводимый одноранговый конечный набор матриц $\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{F}^{d \times d}$, обладающий свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса. Например, набор матриц

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{где} \quad 0 < |\lambda| < 1,$$

обладает свойством конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса [22, Example 2]. Следовательно, условия теоремы 3 не являются необходимыми для конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса. Тем не менее, существуют открытые подмножества неприводимых пар матриц $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$, для которых свойство одноранговости не выполняется [22], и в таких случаях свойство конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса может быть получено с помощью теоремы 3. Наконец, отметим, что в силу теоремы 3 множество матриц $\boldsymbol{S}(\alpha_*)$ из контрпримера К. Хэйра с соавторами [16], упомянутого в разделе 1.2, имеет свойство одноранговости.

3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ КАК СЛЕДСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Напомним, что конечное множество матриц $\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k \in K} \subset \mathbb{F}^{d \times d}$ называется *периодически устойчивым*, если $\rho(\boldsymbol{S}_\sigma) < 1$ для всех $\sigma \in K^n$ и $n \ge 1$, см., например, [11, 27]. Следующий вопрос принципиальной важности был поставлен Е. С. Пятницким в 80-х годах XX века: при каких условиях периодическая устойчивость влечет абсолютную устойчивость множества матриц $\boldsymbol{S}$?

Так как при наличии свойства конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса периодическая устойчивость влечет абсолютную устойчивость, то из теоремы 1 вытекает следующий критерий абсолютной устойчивости:

Теорема 4. *Пусть множество матриц* $\boldsymbol{S} = \{S_k\}_{k\in K} \subset \mathbb{F}^{d\times d}$, *где* K *— конечное индексное множество, периодически устойчиво. Если найдется последовательность слов* $\{\sigma(n_\ell)\}_{\ell=1}^{+\infty}$, *удовлетворяющая условиям теоремы 1, то множество матриц* $\boldsymbol{S}$ *абсолютно устойчиво, т.е.* $\|S_{i_1}\cdots S_{i_n}\| \to 0$ *при* $n \to +\infty$ *для всех односторонне бесконечных последовательностей индексов* $i.\colon \mathbb{N} \to K$.

Таким образом, в условиях теоремы 1 вопрос об абсолютной устойчивости множества матриц $\boldsymbol{S}$ алгоритмически разрешим.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен краткий обзор публикаций, посвященных анализу проблемы конечной достижимости обобщенного спектрального радиуса для конечных множеств матриц. Доказано, что в случае, когда ограниченное множество матриц $\boldsymbol{S}$ имеет равномерно субпериферийный спектр для некоторой последовательности матричных произведений, "приведенные" спектральные радиусы которых сходятся к обобщенному спектральному радиусу, то обобщенный спектральный радиус $\boldsymbol{S}$ конечно достижим. Этот результат позволяет получить еще один критерий абсолютной устойчивости для конечных множеств матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барабанов Н. Е.* О показателе Ляпунова дискретных включений. I-III // *Автоматика и телемеханика.* 1988. № 2, 3, 5. С. 40–46, 24–29, 17–24.

2. *Козякин В. С.* Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем // *Автоматика и телемеханика.* 1990. № 6. С. 41–47.

3. *Козякин В. С.* Структура экстремальных траекторий дискретных линейных систем и гипотеза Лагариаса–Ванга о конечности // *Информационные процессы.* 2006. Т. 6, № 4. С. 327–363.

4. *Berger M. A., Wang Y.* Bounded semigroups of matrices // *Linear Algebra Appl.* 1992. Vol. 166. Pp. 21–27.

5. *Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A.* Switched Systems that are Periodically Stable May be Unstable // Proc. of the Symposium MTNS. Notre-Dame, USA: 2002.

6. *Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A.* An elementary counterexample to the finiteness conjecture // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2003. Vol. 24, no. 4. Pp. 963–970 (electronic).

7. *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // *J. Amer. Math. Soc.* 2002. Vol. 15, no. 1. Pp. 77–111 (electronic).

8. *Cicone A., Guglielmi N., Serra-Capizzano S., Zennaro M.* Finiteness property of pairs of 2×2 sign-matrices via real extremal polytope norms // *Linear Algebra Appl.* 2010. Vol. 432, no. 2-3. Pp. 796–816.

9. *Dai X.* Extremal and Barabanov semi-norms of a semigroup generated by a bounded family of matrices // *J. Math. Anal. Appl.* 2011. Vol. 379, no. 2. Pp. 827–833.

10. *Dai X., Huang Y., Liu J., Xiao M.* The finite-step realizability of the joint spectral radius of a pair of square matrices one of which being rank-one. ArXiv.org e-Print archive. 2011. — Jun. arXiv:1106.0870.

11. *Dai X., Huang Y., Xiao M.* Periodically switched stability induces exponential stability of discrete-time linear switched systems in the sense of Markovian probabilities // *Automatica J. IFAC*. 2011. Vol. 47. Pp. 1512–1519.

12. *Dai X., Huang Y., Xiao M.* Realization of joint spectral radius via ergodic theory // *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 2011. Vol. 18. Pp. 22–30.

13. *Daubechies I., Lagarias J. C.* Sets of matrices all infinite products of which converge // *Linear Algebra Appl.* 1992. Vol. 161. Pp. 227–263.

14. *Guglielmi N., Wirth F., Zennaro M.* Complex polytope extremality results for families of matrices // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2005. Vol. 27, no. 3. Pp. 721–743 (electronic).

15. *Gurvits L.* Stability of discrete linear inclusion // *Linear Algebra Appl.* 1995. Vol. 231. Pp. 47–85.

16. *Hare K. G., Morris I. D., Sidorov N., Theys J.* An explicit counterexample to the Lagarias-Wang finiteness conjecture // *Advances in Math.* 2011. — Apr. Vol. 226, no. 6. Pp. 4667–4701.

17. *Jungers R.* The joint spectral radius. Berlin: Springer-Verlag, 2009. Vol. 385 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Pp. xiv+144. ISBN: 978-3-540-95979-3. Theory and applications.

18. *Jungers R. M., Blondel V. D.* On the finiteness property for rational matrices // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2283–2295.

19. *Jungers R. M., Protasov V. Y.* Counterexamples to the complex polytope extremality conjecture // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2009. Vol. 31, no. 2. Pp. 404–409.

20. *Kozyakin V.* A Dynamical Systems Construction of a Counterexample to the Finiteness Conjecture // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 2005. Pp. 2338–2343.

21. *Lagarias J. C., Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices // *Linear Algebra Appl.* 1995. Vol. 214. Pp. 17–42.

22. *Morris I. D.* Criteria for the stability of the finiteness property and for the uniqueness of Barabanov norms // *Linear Algebra Appl.* 2010. Vol. 433, no. 7. Pp. 1301–1311.

23. *Morris I. D.* A rapidly-converging lower bound for the joint spectral radius via multiplicative ergodic theory // *Advances in Math.* 2010. Vol. 225, no. 6. Pp. 3425–3445.

24. *Omladič M., Radjavi H.* Irreducible semigroups with multiplicative spectral radius // *Linear Algebra Appl.* 1997. Vol. 251. Pp. 59–72.

25. *Plischke E., Wirth F.* Duality results for the joint spectral radius and transient behavior // *Linear Algebra Appl.* 2008. Vol. 428, no. 10. Pp. 2368–2384.

26. *Rota G.-C., Strang G.* A note on the joint spectral radius // *Indag. Math.* 1960. Vol. 22. Pp. 379–381.

27. *Shorten R., Wirth F., Mason O. et al.* Stability criteria for switched and hybrid systems // *SIAM Rev.* 2007. Vol. 49, no. 4. Pp. 545–592.

28. *Theys J.* Joint Spectral Radius: Theory and Approximations: Ph. D. thesis / Faculté des sciences appliquées, Département d'ingénierie mathématique, Center for Systems Engineering and Applied Mechanics. Université Catholique de Louvain, 2005. — May. 189 pp.

29. *Wirth F.* The generalized spectral radius and extremal norms // *Linear Algebra Appl.* 2002. Vol. 342. Pp. 17–40.